

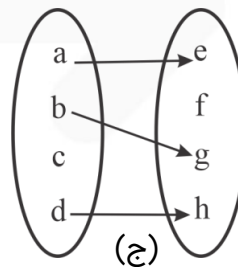
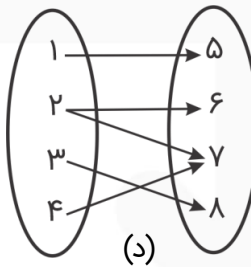
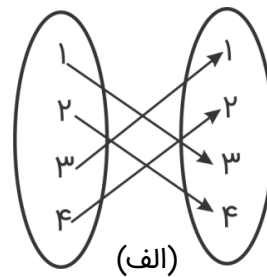
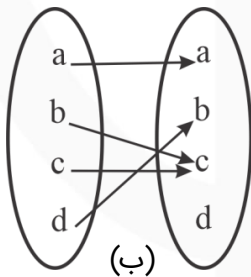
آشنایی بیشتر با تابع

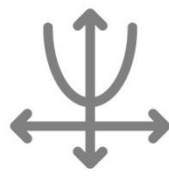
تعریف تابع:

تذکرات: A : مجموعه ورودی‌های تابع است که دامنه نامیده می‌شود.

B : مجموعه‌ای دربرگیرنده خروجی‌های تابع است که هم‌دامنه نامیده می‌شود. برد تابع مجموعه خروجی‌های تابع است که زیرمجموعه‌ای از B است.

مثال: کدامیک از روابط زیر تابع است؟





نمایش‌های تابع

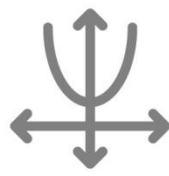
۱- زوج مرتب: اگر رابطه‌ای به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نشان داده شده باشد، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم تکراری نداشته باشند.

مثال: m را طوری تعیین کنید که $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ تابع باشد.

مثال: اگر $f = \{(3, 5), (1, 2), (3, a+2b), (0, -1), (1, a^2 + 2b^2 + 3ab)\}$ یک تابع باشد، $a+b$ کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

تذکر: در نمایش زوج مرتبی، مجموعهٔ مؤلفه‌های اول دامنه و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم برد تابع است.



۲- نمودار پیکانی

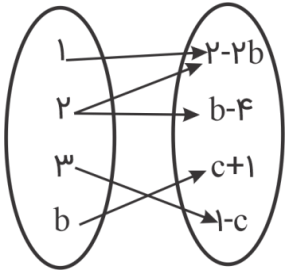
مثال: با توجه به نمودار پیکانی تابع f ، $f(-c)$ چقدر است؟

۴ (۱)

-۲ (۲)

۲ (۳)

-۴ (۴)

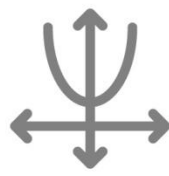


مثال: از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ چند تابع مختلف می‌توان نوشت؟

۳- جدول: جدولی دوسطری که سطر بالا، ورودی‌ها و سطر پایین خروجی‌هاست.

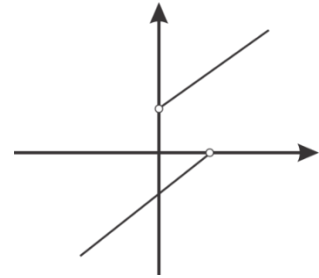
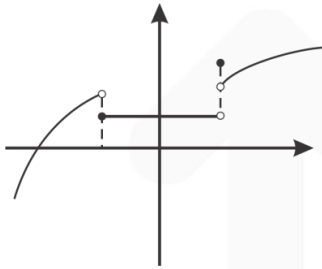
x	۳	۵	۷	۹
y	-۴	۰	۴	۸

مثال: رابطه‌ای بین x و y ‌های جدول زیر بیابید.

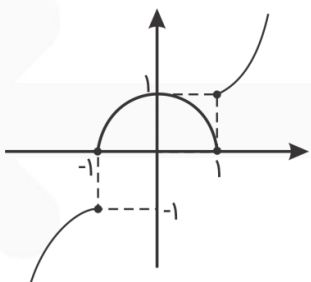


۴- نمودار مختصاتی: اگر رابطه‌ای به کمک نمودار نمایش داده شده باشد، در صورتی تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید.



مثال: می‌خواهیم نمودار زیر را با حذف حداقل نقاط به تابع تبدیل کنیم. چند حالت مختلف برای این کار امکان‌پذیر است؟

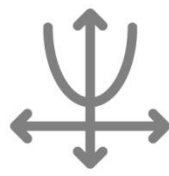


۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)



۵- ضابطه: قانونی است که رابطه بین ورودی و خروجی را نشان می‌دهد.

$$f(x) = 2x - 5$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 6$$

تذکر ۱: نماد $f(x)$ یعنی خروجی تابع f به ازای ورودی x . به عبارت دیگر: $y = f(x)$

تذکر ۲: گاهی اوقات به همراه ضابطه تابع، دامنه و هم‌دامنه تابع نیز معرفی می‌شود. در این صورت از نمایش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) \end{cases}$$

مثلاً:

$$\begin{cases} f : [0, +\infty) \rightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

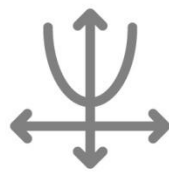
$$\begin{cases} g : R \rightarrow R \\ g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

مثال: بررسی کنید که برای تابع $\begin{cases} f : [0, 3] \rightarrow [0, 9] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ کدام نمایش قابل قبول نیست؟

$$\begin{cases} f : [0, 3] \rightarrow R \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f : [0, 3] \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g : R \rightarrow [0, 9] \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$



مثال: اگر $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 2}$ باشد، مقدار $f(\sqrt{5} - 2)$ چقدر است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

مثال: تابعی اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۵ را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کند و سپس از چهار برابر مربع آن عدد، سه واحد کم می‌کند. اگر خروجی آن ۱۴۱ باشد، ورودی آن چقدر بوده است؟

۶ (۱)

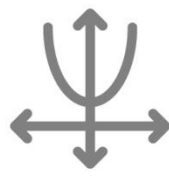
-۶ (۲)

۳ (۳)

-۳ (۴)

مثال: تابع f به‌صورت $f = \{(x, 3x - 4) \mid x \in N\}$ تعریف شده است. حاصل $f(1) + f(2) + \dots + f(50)$ را بیابید.

مثال: a را به‌گونه‌ای بیابید که رابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3ax & x \geq 1 \\ -x^2 + 3ax & x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد.



معادلات و توابع

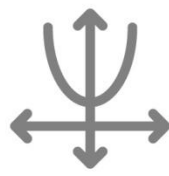
معادلاتی که دارای دو متغیر x و y هستند، بیان‌گر یک رابطه هستند. این رابطه ممکن است بیان‌گر یک تابع باشد مانند $x^2 + y = 7$ و ممکن است بیان‌گر تابع نباشد، مانند $x + |y| = 3$

مثال: تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 25$

ب) $y^3 + 2x = x^2 - 5$

ج) $|x^2 - 16| + y^2 - 6y + 9 = 0$



د) $4x^2 + y^2 + 4xy^2 = 0$

هـ) $2x + y = |x - 1|$

و) $y^2 - 2xy = 0$

ز) $|x - 2y| + 2x = 3$

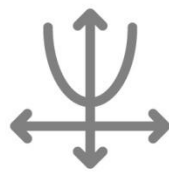
مثال: کدامیک از روابط زیر بیانگر تابع نیست؟

(۱) $yx^2 = xy + 5$

(۲) $x = \sin y$

(۳) $y^3 + 3y^2 + 3y + 7 = x^2 + 2x$

(۴) $x^2 + y^2 - 4x + y + 4 / 25 = 0$



برابری دو تابع

مثال: در هر مورد برابری دو تابع را بررسی کنید.

الف)
$$\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ f(x) = -3x^2 \end{cases}$$

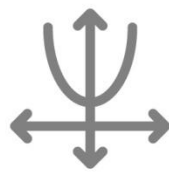
$$\begin{cases} g: R \rightarrow (-\infty, 0] \\ g(t) = -3t^2 \end{cases}$$

ب)
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

$$g(x) = x - 3$$

ج)
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$$



د) $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x}$

$g(x) = \frac{1}{\cos x}$

ه) $f(x) = |x| \sqrt{x-1}$

$g(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$

و) $f(x) = \tan x \cdot \cot x$

$g(x) = 1$

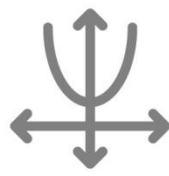
مثال: در کدام گزینه، دو تابع باهم برابرند؟

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4}$, $g(x) = \frac{x}{x-4}$ (۱)

$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$, $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$ (۲)

$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$ (۳)

$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $g(x) = \sin x$ (۴)



مثال: دو تابع $f(x) = \frac{7}{x-3}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم مساوی هستند. a, b, c, d را بیابید.

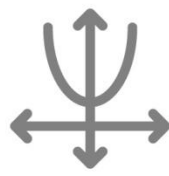
مثال: دو تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & x \neq 3 \\ bx - 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = 2x + b$ برابرند. $a-b$ کدام است؟

۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۶ (۳)

۰ (۴)



انواع توابع

۱- تابع ثابت:

$$f = \{(2, 1), (0, 1), (5, 1)\}$$

$$y = -3$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+1}$$

$$h = \{(5, -1)\}$$

مثال: اگر $f = \{(1, 5), (2, m+n), (3, 2m-n)\}$ تابعی ثابت باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۴) ۴

۵) ۴

۲- تابع همانی:

$$f(x) = x$$

$$g = \{(0, 0), (-1, -1), (6, 6)\}$$

❖ نمودار تابع همانی:

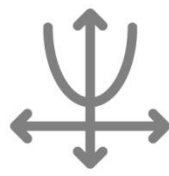
مثال: اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد و بدانیم $f(7) = 3$ ، حاصل $f(g(2)) + g(f(3))$ چقدر است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸



۳- تابع خطی:

مثال: در یک تابع خطی داریم $f(-1) = 5$, $f(2) = 1$ ، ضابطه این تابع را بیابید.

۴- تابع چندجمله‌ای:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$g(x) = 5x$$

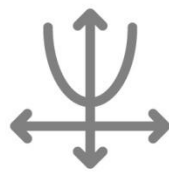
$$h(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + \sqrt{7}$$

$$k(x) = 3$$

تذکر ۱: در توابع چندجمله‌ای، متغیر داخل قدر مطلق، رادیکال، مخرج، نسبت مثلثاتی و ... دیده نمی‌شود.

تذکر ۲: توابع خطی، همانی و ثابت، تابع چندجمله‌ای نیز هستند.

مثال: a, b را به گونه‌ای بیابید که تابع $f(x) = \frac{a-b}{x^2} + \frac{(a-1)x^3}{b} + (a^3 - a)\sqrt{x} + 7$ چندجمله‌ای درجه ۳ باشد.



$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

۵- تابع گویا:

$$f(x) = \frac{4x + 3}{x^2 - 5x + 2}$$

مثال: از میان توابع زیر، توابع گویا را مشخص کنید.

$$f(x) = \frac{|2x - 5|}{x^2 + 6x + 3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x + 5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x} - 3}{x^5 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x + \cos x}$$

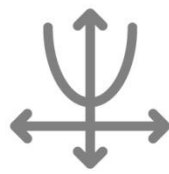
$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(x) = \pi$$

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

❖ شرط دامنه توابع گویا:



مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x-2}$ را به دست آورید.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{ax^2+x+2}{x^2-2(a-1)x+b-3}$ برابر $R - \{-1, -2\}$ می باشد، a و b را بیابید.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{x+5}{x^2-ax+b-5}$ برابر $R - \{3\}$ می باشد. $a+b$ کدام است؟

۱۰ (۱)

۱۵ (۲)

۲۰ (۳)

۲۵ (۴)

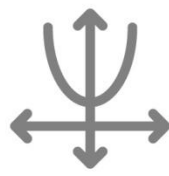
مثال: دامنه $f(x) = \frac{x-1}{x-1-\frac{x-1}{x^2-4}}$ شامل چند عدد صحیح نمی شود؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

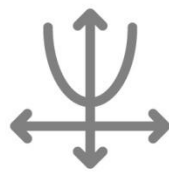
۵ (۴)



تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{x+3}{x+2}$ را رسم کنید.

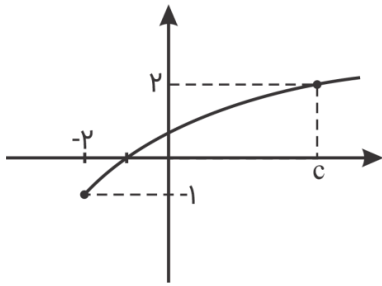
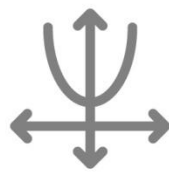


۶- تابع رادیکالی

❖ نمودار $f(x) = \sqrt{x}$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

مثال: دامنه $f(x) = \sqrt{2x+6}$ را به دست آورید و سپس نمودار آن را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.



مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ به صورت مقابل است. کدام $a+b+c$ است؟

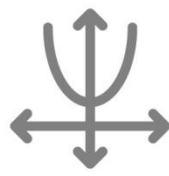
۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

مثال: تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به راست و ۳ واحد بالا می‌بریم تا به تابع $f(x)$ برسیم. تابع $y = \sqrt{x}$ را سه واحد به چپ و یک واحد بالا می‌بریم تا به تابع $g(x)$ برسیم. توابع f و g در چه نقطه‌ای برخورد دارند؟



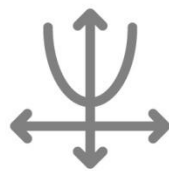
❖ شرط دامنه برای توابع رادیکالی با فرجه زوج:

مثال: توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{5-x}}$

ب) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{4-x^2}}$

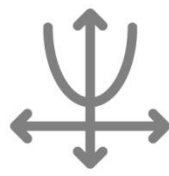
ج) $f(x) = \sqrt{|2x+1| - |x-2|}$



۷- تابع پله‌ای

مثال: یک پارکینگ خودرو برای محاسبه هزینه پارک ماشین از این دستورالعمل پیروی می‌کند: تا ۲ ساعت ۵۰۰۰ تومان، از ۲ تا ۳ ساعت، ۸۰۰۰ تومان و از ۳ تا ۵ ساعت ۱۰۰۰۰ تومان، دستورالعمل هزینه پارکینگ را به صورت تابعی چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

مثال: تابعی به هر عدد صحیح خود آن عدد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن را نسبت می‌دهد. این تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.



جزء صحیح (براکت)

مثال: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $[4/7]$

ب) $[\sqrt{33}]$

ج) $[-3/2]$

د) $[-\frac{124}{13}]$

هـ) $[\sin 200^\circ]$

و) $[(1-\sqrt{2})^{2+30}]$

ز) $[-\sqrt{289}]$

هـ) $[\sqrt[5]{-1000}]$

مثال: برای ادعاهای نادرست زیر، مثال نقض بنویسید.

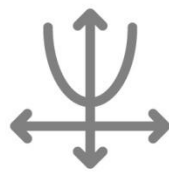
الف) $[2x] = 2[x]$

ب) $[\frac{x}{3}] = \frac{1}{3}[x]$

ج) $[x^y] = [x]^y$

د) $[x+y] = [x]+[y]$

هـ) $[xy] = [x][y]$



❖ ویژگی‌های جزء صحیح

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x] \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

مثال: معادلات $[3x] = 3,5$ ، $[2x] - [x - 3] = 4,8$ جواب ندارند.

$$k \leq x < k+1 \Leftrightarrow [x] = k \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

مثال: اگر $[x] = 2$ باشد، عبارت زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x^2 - 5x + 6|$$

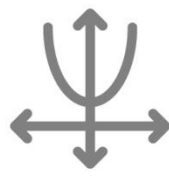
مثال: مجموعه معادله $[x] - 5[x] = -6$ کدام است؟

$$(1) [2, 3)$$

$$(2) [3, 4)$$

$$(3) [2, 4)$$

$$(4) [3, 5)$$



مثال: اگر $7 = [x^2 - 9x] = [x^2 - 3x]$ ، حاصل $[x^2 - 6x + 4]$ کدام است؟

۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۱۳ (۴)

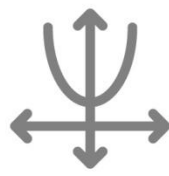
مثال: اگر $n \in N$ باشد، $[\sqrt{n^2 + 2n}]$ کدام است؟

$n - 1$ (۱)

n (۲)

$n + 1$ (۳)

$n + 2$ (۴)



$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = x \quad (۳)$$

مثال: معادله $5[x^2] + x = 6$ چند جواب دارد؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

بی‌شمار (۴)

$$x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \quad [x+k] = [x] + k \quad (۴)$$

مثال: مجموعه جواب معادله $\left[\frac{3x+1}{x}\right] = 5$ را به دست آورید.

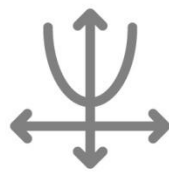
مثال: اگر $|x+1| < 1$ باشد، حاصل $[x^2 + 2x]$ چقدر است؟

۰ (۱)

۱ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)



$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x - [x] < 1 \quad (5)$$

مثال: برد تابع $f(x) = x - \frac{1}{4}[2x]$ را به دست آورید.

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (6)$$

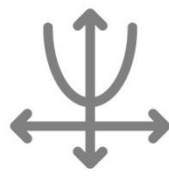
مثال: معادله $([x] + [-x])(x^2 - 5) = -4$ چند جواب دارد؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

بی شمار (۴)

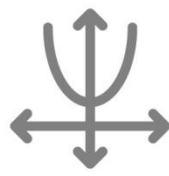


مثال: دامنه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x}{2[x] - 10}$

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\left[\frac{x}{2}\right] - 1}$

ج) $f(x) = \frac{6x + 3}{[x - 3] + [2 - x]}$



رسم توابع شامل جزء صحیح

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]$

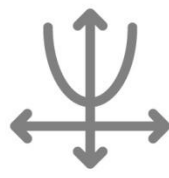
$D_f = [-2, 2]$

ب) $f(x) = [2x]$

$D_f = [-1, 1]$

ج) $f(x) = x - [x]$

$D_f = [-2, 3]$



$$د) f(x) = \left[-\frac{x}{3} \right] + 2$$

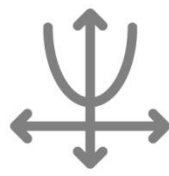
$$D_f = [-3, 6)$$

$$هـ) f(x) = x[x]$$

$$D = [-2, 2)$$

$$و) f(x) = [2x] + |x|$$

$$D = [-1, 1)$$



رسم $y = [f(x)]$ از روی $f(x)$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [\sqrt{x}]$

$D_f = [0, 9)$

ب) $f(x) = [x^2]$

$D_f = [-2, 2)$

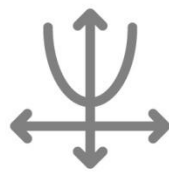
مثال: تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در دامنه $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ از چند قطعه تشکیل شده است؟

۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)



وارون تابع

$$f = \{(1, 4), (2, 7), (-3, 0)\} \Rightarrow f^{-1} = \{ \quad \quad \quad \}$$

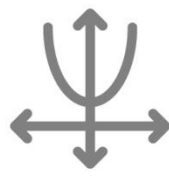
$$D_{f^{-1}} = \quad \quad \quad (a, b) \in f \Leftrightarrow$$

$$R_{f^{-1}} = \quad \quad \quad b = f(a) \Leftrightarrow$$

مثال: در تابع فوق، نمودار f ، f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

نتیجه:

مثال: وارون تابع $g = \{(3, 2), (-3, 5), (0, 2), (7, 4)\}$ را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



تابع یک به یک

❖ زوج مرتب

❖ نمودار پیکانی

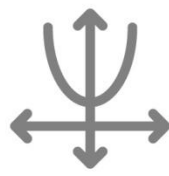
❖ نمودار مختصاتی

❖ ضابطه

مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

ب) $f(x) = |x + 1| - 2$



مثال: یک‌به‌یک بودن روابط زیر را بررسی کنید.

(الف) رابطه افراد و اثر انگشت

(ب) رابطه افراد و گروه خونی

(ج) رابطه افراد ایرانی و کد ملی

(د) رابطه افراد و شماره تلفن همراه

مثال: اگر نمودار وارون تابع $y = \frac{ax+b}{x+1}$ از دو نقطه $(-2, 8)$ و $(1, \frac{1}{2})$ عبور کند، a و b را به دست آورید.

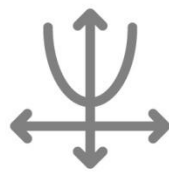
مثال: در تابع خطی f ، می‌دانیم $f(2) = 5$ و $f^{-1}(-4) = -1$ است. مقدار $f^{-1}(1 + f(3))$ کدام است؟

(۱) $\frac{10}{3}$

(۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{8}{3}$

(۴) $\frac{11}{3}$



مثال: m و n را به گونه‌ای تعیین کنید که رابطه زیر، تابعی یک‌به‌یک باشد.

$$f = \{(m^2, 1), (0, 0), (2m+n, 2), (-1, 2), (4, 1), (n+5, 6)\}$$

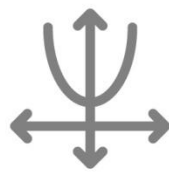
مثال: چند تابع یک‌به‌یک از مجموعه ۳ عضوی A به مجموعه ۵ عضوی B می‌توان نوشت؟

مثال: اگر $f(x) = x^3 + 2x + 4$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ و بدانیم $f(g^{-1}(a)) = 7$ ، a را بیابید.

مثال: a و b را به گونه‌ای بیابید که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند.

$$f = \{(a+b^2, \sqrt{a+b}), (\sqrt{a}-b, 5), (2\sqrt{a}-b, 2)\}$$

$$g = \{(1+\sqrt{a}, 0), (2b+1, -1), (2b-\sqrt{a}, 5)\}$$



مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

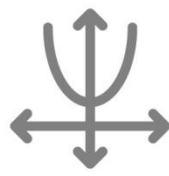
الف) $f(x) = x - \sqrt{x} + 3$

ب) $f(x) = |x+1| - 2|x+2|$

ج) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

د) $f(x) = x|x|$

هـ) $f(x) = 3x + |x|$



محدود کردن دامنه تابع برای یک به یک شدن

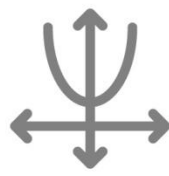
مثال: دامنه توابع زیر را به گونه‌ای محدود کنید تا تابع یک به یک شود.

الف) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

ب) $f(x) = |x - 3| + 2$

ج) $f(x) = x|x - 3|$

د) $f(x) = |x - 3| - |x + 1|$



مثال: اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

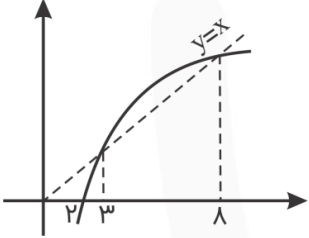
۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

مثال: شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم‌ساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تعریف تابع با ضابطه $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



(۰, ۲] (۱)

[۲, ۳] (۲)

[۲, ۸] (۳)

[۳, ۸] (۴)

مثال: نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 + 3x + a$ خط $2x + 5y = 8$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. a کدام است؟

۱۴ (۱)

-۱۴ (۲)

۱۵ (۳)

-۱۵ (۴)

مثال: تابعی یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 3 \\ x+a & x < 3 \end{cases}$

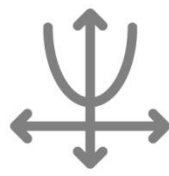
مثال: تابع $x \geq 3$
 $x < 3$

۱ (۱)

۰ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

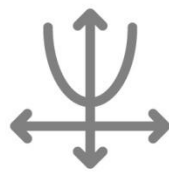


مثال: ضابطه وارون توابع زیر را به همراه دامنه و برد آن به دست آورید و f ، f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید.

الف) $f(x) = -2x + 3$

ب) $f(x) = -2 + \sqrt{x-1}$

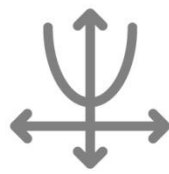
ج) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ($x \leq 1$)



د) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

ه) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

و) $f(x) = -|x+3|+2 \quad (x \geq -3)$



مثال: تابع $f(x) = x^2 - 6x + 3$ با دامنه $(-\infty, \infty)$ را در نظر بگیرید. وارون این تابع کدام است؟

(۱) $x < 3$ $3 + \sqrt{x+6}$

(۲) $x > 3$ $3 + \sqrt{x+6}$

(۳) $x < 3$ $3 - \sqrt{x+6}$

(۴) $x > 3$ $3 - \sqrt{x+6}$

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه افزایشی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

(۱) $x > 8$ $-x + 7$

(۲) $x > 3$ $\frac{1}{3}x + 2$

(۳) $x > -4$ $x + 7$

(۴) $-4 < x < 8$ $\frac{1}{2}x - 1$

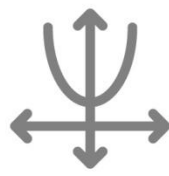
مثال: قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) ۳

(۲) -۳

(۳) -۲

(۴) -۴



مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول،

قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۹)

(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

مثال: اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} ، $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۸

(۴) ۲۱

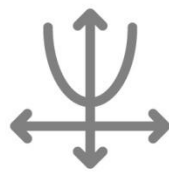
مثال: اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟

(۱) ± 3

(۲) ± 2

(۳) $2, -3$

(۴) $-2, 3$



برخورد f, f^{-1}

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) -۴ و -۱

(۲) ۴ و -۱

(۳) -۴ و ۱

(۴) ۴ و ۱

مثال: فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات کدام است؟ (تجربی)

خ (۱۴۰۰)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{2}$

مثال: نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x+3}}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از

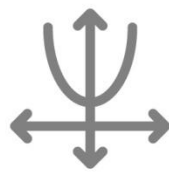
نقاط زیر روی منحنی به دست آمده قرار دارد؟ (خ ۱۴۰۰)

(۱) $(1 - \sqrt{5}, 0)$

(۲) $(-\sqrt{5}, 0)$

(۳) $(0, 1 - \sqrt{5})$

(۴) $(0, -\sqrt{5})$



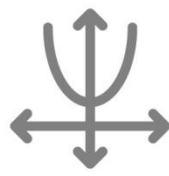
اعمال روی توابع

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (5, 1)\}$ و $g = \{(5, 0), (2, 2), (1, 4), (7, -3)\}$ توابع $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$

را با زوج مرتب نمایش دهید.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x+3$ توابع $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $\frac{f}{g}(x)$ و مقادیر $(f+g)(5)$ و $(f-g)(0)$ و

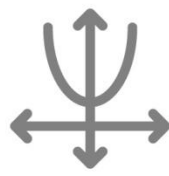
$\frac{g}{f}(1)$ را به دست آورید.



نام عمل	ضابطه	دامنه
جمع		
تفریق		
ضرب		
تقسیم		

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 9), (7, 1)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, -2), (3, 4), (7, 5)\}$ توابع $\frac{2f - 3g}{f - 5g}$, $\frac{1}{f} + 3g$,

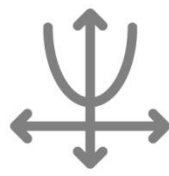
$f \cdot g$, $f - 2g$ را بنویسید.



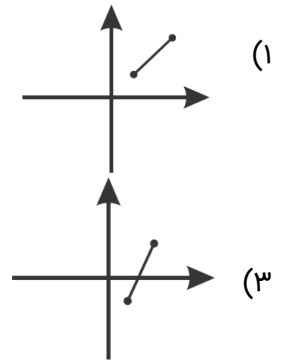
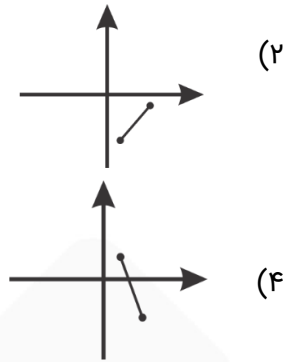
مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$ باشد، دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3-|x+1|}}$, $g(x) = \frac{1-2x}{x^2-9}$ باشد، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

مثال: اگر $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$ ، نمودار توابع f , g , $f+g$, $f.g$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

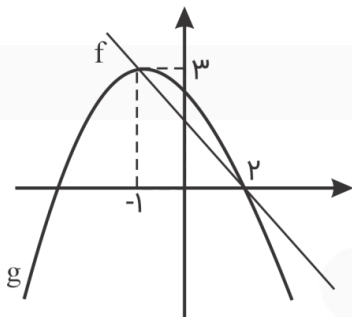


مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ ، نمودار تابع $y = (f.g)(x)$ کدام است؟



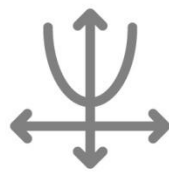
مثال: اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ و $f - g = \{(1, -4), (3, 1)\}$ آن گاه تابع $h(x) = \frac{1}{g(x) - 8}$ شامل کدام عضو است؟

- (1) $(1, \frac{1}{8})$
- (2) $(3, -\frac{1}{5})$
- (3) $(3, \frac{1}{5})$
- (4) $(1, -\frac{1}{8})$



مثال: نمودارهای دو تابع f و g در شکل داده شده است. حاصل $(f.g)(3)$ کدام است؟

- (1) $\frac{7}{3}$
- (2) $\frac{7}{6}$
- (3) $\frac{5}{3}$
- (4) $\frac{5}{6}$



ترکیب توابع

مثال: اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (0, 9)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (2, 1)\}$ مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(g(5))$

ب) $f(g(2))$

ج) $f(f(0))$

د) $g(f(9))$

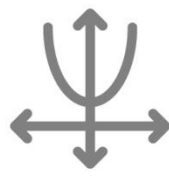
هـ) $g(f(1))$

و) $g(g(3))$

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

تعریف:

در مثال فوق $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$ را بنویسید.



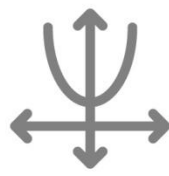
مثال: در هر قسمت موارد خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ $f \circ g(x) = ?$, $g \circ f(x) = ?$

ب) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \sqrt{x+6}$ $f \circ g(x) = ?$ $D_{f \circ g} = ?$

ج) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $f \circ g = ?$ $D_{f \circ g} = ?$
 $f \circ f = ?$ $D_{f \circ f} = ?$

د) $f(x) = \sqrt{4-x}$, $g(x) = \frac{3}{x-2}$ $f \circ g(x) = ?$ $D_{f \circ g} = ?$
 $g \circ f(x) = ?$ $D_{g \circ f} = ?$
 $f \circ f(x) = ?$ $D_{f \circ f} = ?$

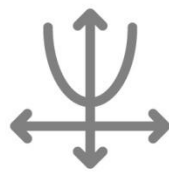


دامنه تابع مرکب

$$D_{fog} = \{ \quad \quad \quad \}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ باشند، دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مثال: اگر $g(x) = x^2 + 3x + 2$ و $f(x) = \sqrt{\frac{x-6}{12-x}}$ باشند، دامنه تابع fog را به دست آورید.

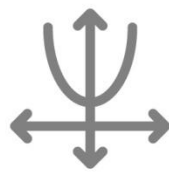


مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ ، $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g(x)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 + x - 1$ و $g(x) = 1 - 2x$ باشند، معادله $g \circ f(x) = -5$ را حل کنید.

مثال: اگر $f \circ g(x) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه $g(x)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^3}{x^5+1}$ ، مقدار $g(1)$ را بیابید.



مثال: در هر مورد ضابطه تابع f را به دست آورید.

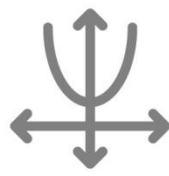
الف) $f(x - 3) = x^r + 1$

ب) $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{3}{x}$

ج) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^r + \frac{1}{x^r}$

د) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^w + \frac{1}{x^w}$

و) $f(\tan x) = 2 \cos^r x - 1$



مثال: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[0, 3]$

(۳) $[0, 4]$

(۴) $[1, 4]$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟ (س ۹۸)

(۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$

(۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$

(۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$

(۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

مثال: تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن گاه

نمودار $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خ ۹۴)

(۱) $\frac{1}{9}, 4$

(۲) $\frac{1}{4}, 9$

(۳) $4, \frac{1}{4}$

(۴) $4, 9$

مثال: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشد، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط $y = 3$ کدام است؟

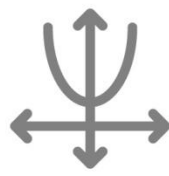
(س ۹۵ تجربی)

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۴٫۵

(۴) ۶



مثال: اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟ (س ۹۶)

(۱) $(0, 1)$

(۲) $\{0\}$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ ، $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ ، دامنه تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$

(۲) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{0\}$

(۴) $(0, +\infty)$

مثال: اگر $D_f = [-1, 1]$ باشد و دامنه تابع $g(x) = f(1-3x)$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد، $b-a$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) ۳

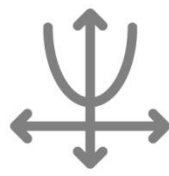
مثال: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $x^2 - x + 3$

(۲) $x^2 - 2x - 1$

(۳) $x^2 - 2x + 1$

(۴) $x^2 - x + 1$

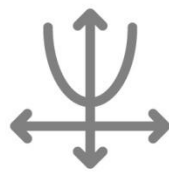


ترکیب تابع f با f^{-1}

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$ را با زوج مرتب نمایش دهید.

نتیجه:

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ ، نمودار $f \circ f^{-1}(x)$ ، $f^{-1} \circ f(x)$ را رسم کنید.



وارون تابع مرکب

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{4} - 8$ ، $g(x) = x^3$ باشند مقادیر $(fog)^{-1}(8)$ ، $g^{-1} \circ f^{-1}(8)$ را به دست آورید.

نتیجه:

مثال: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(20)$ کدام است؟ (س ۹۹)

- (۱) $\frac{2}{5}$
- (۲) $\frac{3}{5}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{4}{4}$

مثال: دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ ، $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض اند. اگر $g^{-1} \circ f^{-1}(a) = 8$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خ ۹۶)

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) ۷