

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

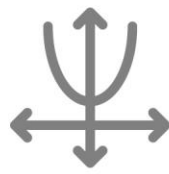
هندسی	حسابی	
۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, ...	-۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...	مثال
		تعریف
		تعریف ریاضی
		جمله عمومی
		واسطه
		مجموع جملات

مثال: اگر جمله دهم یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله سیزدهم آن ۶۷ باشد، جمله سوم این دنباله را بیابید.

مثال: اگر مجموع جملات دوم و سوم یک دنباله حسابی ۷- و مجموع جملات هفتم و هشتم این دنباله ۳۷- باشد، جمله اول این دنباله را بیابید.

مثال: در یک دنباله حسابی  $a_4 + a_7 + a_{10} = 60$ ,  $a_1 + a_7 + a_{13} = 15$  است. جمله پانزدهم این دنباله را به دست آورید.

مثال: بین دو عدد ۷ و ۴۳، شش واسطه حسابی درج کرده ایم. این ۶ واسطه را بیابید.



مثال: در دنباله‌های حسابی «۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ...» و «۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ...» چند عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۳۰۰، موجود است؟ (خ ۹۵)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

مثال: با توجه به دنباله حسابی، مجموع  $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$  کدام است؟ (خ ۹۵)

۰/۲۵ (۴)

۰/۲۴ (۳)

۰/۱۸ (۲)

۰/۱۵ (۱)

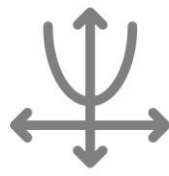
مثال: اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی  $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$  در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۷۴ (۴)

۷۳ (۳)

۷۲ (۲)

۷۱ (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله سوم ۶ و جمله نهم ۴۸ است. جمله اول این دنباله را بیابید.

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۵ و جمله ششم ۱۵ واحد بیشتر از جمله دوم است. جمله پنجم این دنباله را بیابید.

مثال: بین دو عدد ۷ و ۱۷۰۱ چهار واسطه هندسی درج کرده ایم. این چهار واسطه را بیابید.

مثال:  $x$  را به گونه‌ای بیابید که اعداد  $12+x, x, 8-x$  سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند.

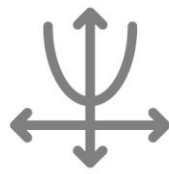
مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین سه عدد کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



مثال: جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟ (تجربی خ ۹۰)

$$\frac{9}{4} \text{ (۴)}$$

$$۲ \text{ (۳)}$$

$$\frac{۳}{۲} \text{ (۲)}$$

$$\frac{۴}{۳} \text{ (۱)}$$

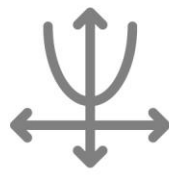
مثال: حاصل ضرب ۵ جمله اول یک دنباله هندسی برابر  $-۳۲$  است. اگر مجموع جملات دوم و چهارم دنباله برابر  $-۵$  باشد، جمله اول آن کدام می‌تواند باشد؟

$$-۱۶ \text{ (۴)}$$

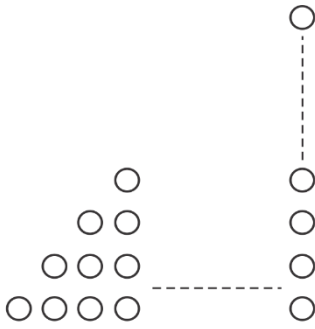
$$-۸ \text{ (۳)}$$

$$-۴ \text{ (۲)}$$

$$-۲ \text{ (۱)}$$



مجموع جملات دنباله حسابی



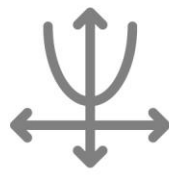
مثال: در یک دنباله حسابی، جمله هفتم برابر ۲۴ و مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۱۸ است. مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم این دنباله را بیابید.

مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت را بیابید.

مثال: در سی جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۲۰ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول این دنباله را بیابید.

مثال: در دنباله حسابی  $5, 8, 11, \dots$  حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟



مثال: اعداد طبیعی را طوری دسته بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، یعنی  $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$  . مجموع اعداد واقع در دسته بیستم کدام است؟ (س ۹۹)

- ۴) ۳۹۸۰      ۳) ۴۰۱۰      ۲) ۴۰۲۰      ۱) ۴۱۲۰

مثال: مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟ (س ۹۸)

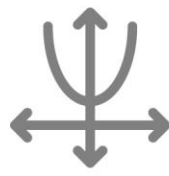
- ۴) ۷۴۲      ۳) ۷۳۵      ۲) ۷۲۸      ۱) ۷۲۱

مثال: اعداد طبیعی فرد را طوری دسته بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد. یعنی  $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$  . در این صورت جمله آخر دسته شماره چهار، کدام است؟ (خ ۹۹)

- ۴) ۱۶۵۱      ۳) ۱۶۳۹      ۲) ۱۵۸۹      ۱) ۱۵۶۳

مثال: مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟ (خ ۹۰)

- ۴) ۱۸      ۳)  $\frac{49}{3}$       ۲)  $\frac{29}{3}$       ۱) ۹



## مجموع جملات دنباله هندسی

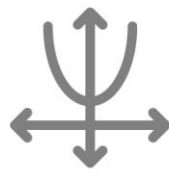
مثال: بین دو عدد ۴ و ۳۲۴، سه عدد مثبت درج کرده ایم به طوری که پنج عدد حاصل دنباله هندسی تشکیل دهند. مجموع این پنج عدد را بیابید.

مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می باشد. جمله اول قدر نسبت این دنباله را بیابید.

مثال: مجموع چند جمله از دنباله هندسی ...، ۲۴، -۱۲، ۶ برابر ۱۰۲۶ است؟

مثال: برای عدد حقیقی  $a$  ( $a \neq 1$ ) و عدد طبیعی  $n$ ، نشان دهید:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$



مثال: شعاع دایره‌ای یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت دایره را رنگ می‌کنیم و سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح دایره رنگ شده است؟

مثال: به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی نزولی اند. مجموع ۷ جمله اول این دنباله کدام است؟ (تجربی ۹۳)

$$\frac{127}{8} \quad (4)$$

$$\frac{63}{4} \quad (3)$$

$$\frac{125}{16} \quad (2)$$

$$\frac{117}{16} \quad (1)$$

مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول تا سوم برابر ۱ و مجموع ۴ جمله اول آن ۳ است. مجموع ۶ جمله اول آن کدام است؟

$$13/4 \quad (4)$$

$$10/8 \quad (3)$$

$$11/2 \quad (2)$$

$$12/6 \quad (1)$$

مثال: بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد درج شده اند به طوری که ۸ عدد حاصل دنباله هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

$$36(\sqrt{2}+1) \quad (4)$$

$$30(\sqrt{2}+1) \quad (3)$$

$$48\sqrt{2} \quad (2)$$

$$30(2+\sqrt{2}) \quad (1)$$

مثال: حاصل عبارت  $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  کدام است؟ (خ ۹۳)

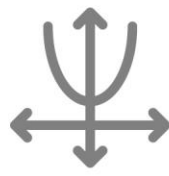
$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$





معادلات درجه دوم

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $2x^2 - 3x = 5$

ب)  $x^2 + 6x = 187$

ج)  $x^2 - 14x + 13 = 0$

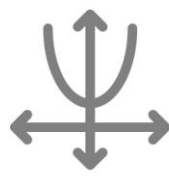
د)  $x^2 + 13x + 36 = 0$

روش حل معادله درجه ۲:

- ۱)  $\Delta$
  - ۲)  $\Delta'$
  - ۳) مربع کامل سازی
  - ۴) تجزیه
  - ۵) حالات خاص
- مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دو

قضیه: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه  
( $a \neq 0$ )

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دو  $x^2 - 3x - 2 = 0$  باشند، مقادیر زیر را بیابید.

الف)  $\alpha^2 + \beta^2$

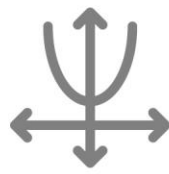
ب)  $\alpha^3 + \beta^3$

ج)  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

د)  $\alpha^3 - 11\alpha$

مثال: اگر در معادله  $2x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از دو برابر ریشه دیگر یک واحد بیشتر باشد،  $m$  را بیابید.

مثال: به ازای چه مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟



تشکیل معادله درجه دو با استفاده از P,S

نکته:

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $2 - \sqrt{3}$  و  $2 + \sqrt{3}$  باشند.

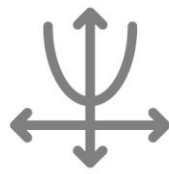
مثال: دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها  $2/5$  و حاصل ضرب آن‌ها  $-6$  باشد.

مثال: طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن  $19$  و مساحت آن  $21$  باشد.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 5 = 0$  یک واحد بیشتر باشد.

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x + 2 = 0$  باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن  $2 - \frac{1}{\beta}$  و  $\frac{1}{\alpha} - 2$  باشند.

مثال:  $a$  و  $b$  را به گونه‌ای بیابید که هر یک از ریشه‌های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$  دو برابر معکوس هر ریشه از معادله  $4x^2 - 7x + 6 = 0$  باشند.



تشخیص علامت ریشه‌های معادله درجه دوه کمک P,S

مثال: علامت ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

الف)  $x^2 + 5x + 3 = 0$

ب)  $3x^2 + 5x - 4 = 0$

ج)  $2x^2 - 5x + 1 = 0$

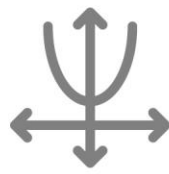
د)  $-x^2 + 2x - 2 = 0$

نتیجه: علامت ریشه‌های معادله درجه ۲  $ax^2 + bx + c = 0$  در شرایط زیر تعیین می‌شود.

{ هر دو +

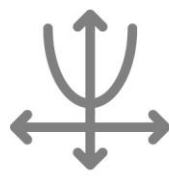
{ هر دو -

{ یکی +، یکی -



مثال: حدود  $m$  را به گونه‌ای تعیین کنید که معادله  $(m-1)x^2 + 3x + 5 - m = 0$  دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد.

مثال: حدود  $m$  را به گونه‌ای تعیین کنید که معادله  $(m-2)x^2 + (2m-3)x + m = 6$  دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد.



صفرهای تابع

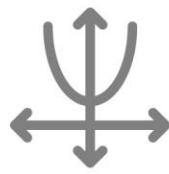
مثال: صفرهای تابع زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$

ب)  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

ج)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

مثال: اگر نمودار تابع  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور  $x$  ها را بیابید.



تغییر متغیر برای حل معادله

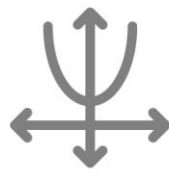
مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $x^6 + 15x^2 - 16 = 0$

ب)  $3x + \sqrt{x} = 10$

ج)  $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$

د)  $(x^2 + 2x + 2)^2 - 5x^2 - 10x - 4 = 0$



تابع درجه دو

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

\* نمودار این تابع به صورت سهمی است که دو حالت کلی دارد:



$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a}$$

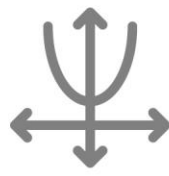
\* مختصات رأس سهمی:

\* عرض رأس سهمی، مقدار ماکسیمم یا مینیمم نامیده می‌شود.  $x = \frac{-b}{2a}$  نیز معادله محور تقارن است.

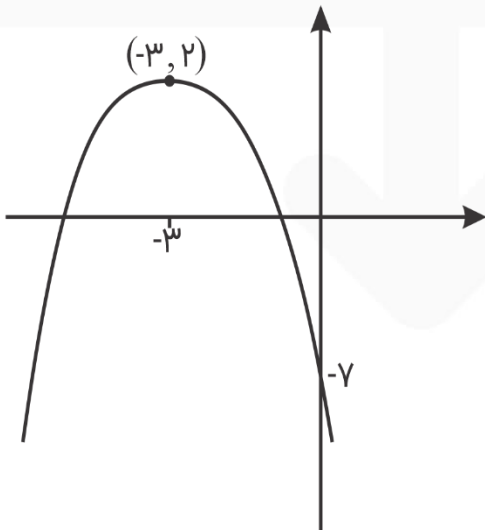
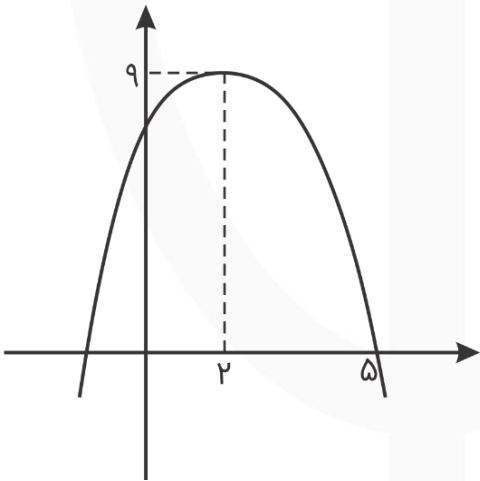
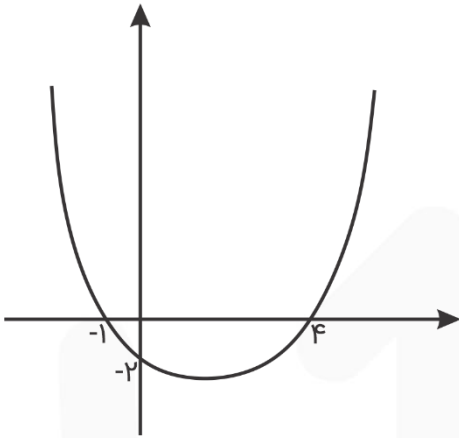
\*  $c$  بیانگر محل برخورد تابع با محور  $y$  هاست.

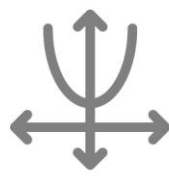
مثال: بیشترین مقدار تابع  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$  را بیابید.



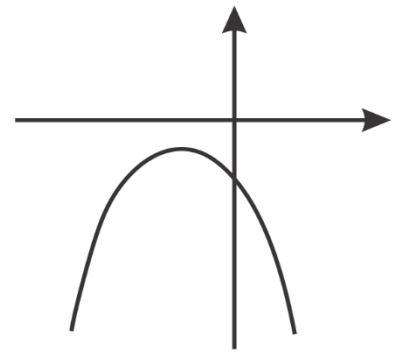
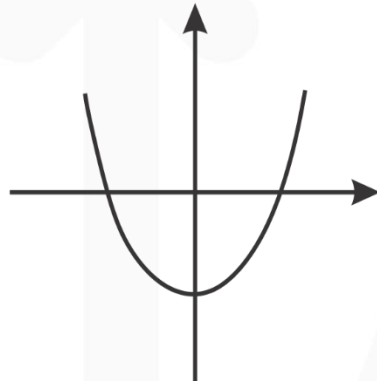
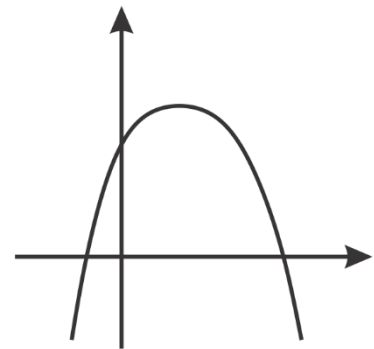
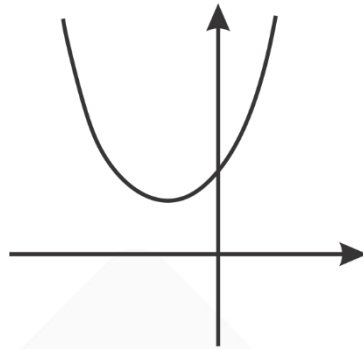


مثال: در هر مورد، معادله سهمی را بنویسید.





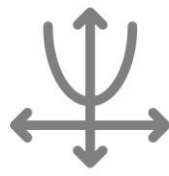
مثال: در هر مورد، علامت ضرایب تابع را تعیین کنید.



مثال: معادله تابع درجه دومی بنویسید که از نقاط  $(-4, 10)$ ,  $(2, 10)$  عبور کند و محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض  $-6$  قطع کند.

مثال: حدود  $m$  را طوری تعیین کنید که نمودار تابع  $f(x) = mx^2 + (m-3)x + m-2$  از هر ۴ ناحیه مختصات عبور کند.

مثال: نمودار سهمی  $y = mx^2 - (m-4)x - 4$  فقط از ناحیه دوم مختصات نمی‌گذرد. حدود  $m$  را بیابید.



مثال: به ازای چه مقادیری از  $a$  نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$  از ناحیه اول مختصات نمی‌گذرد؟

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  معادله درجه دوم  $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است؟ (س ۹۸)

(۲)  $-2 < m < 3/5$

(۱)  $-2 < m < 2/5$

(۴)  $-1 < m < 2/5$

(۳)  $-1 < m < 3/5$

مثال: معادله درجه دوم  $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۴)  $-\frac{5}{2}$

(۳)  $-1$

(۲)  $3$

(۱)  $\frac{7}{2}$

مثال: معادله درجه دوم  $2x^2 + mx + m + 6 = 0$  دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر  $m$  کدام است؟ (تجربی خ ۹۹)

(۴)  $(-6, -4)$

(۳)  $(-6, 0)$

(۲)  $(-4, -2)$

(۱)  $(-4, 0)$

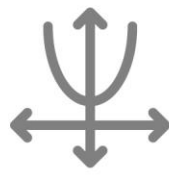
مثال: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 - 7x^2 - 5 = 0$  به ترتیب  $P, S$  باشند، حاصل عبارت  $2P^2 - 3SP + 2S$  کدام است؟ (س ۱۴۰۰)

(۴)  $59 + 7\sqrt{69}$

(۳)  $50$

(۲)  $7 + \sqrt{69}$

(۱)  $59 - 7\sqrt{69}$



مثال: فرض کنید  $x_1, x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x = 0$  باشند.  $\frac{1}{(x_1+1)^3}, \frac{1}{(x_2+1)^3}$  ریشه‌های کدام معادله هستند؟

(تجربی ۱۴۰۰)

$$125x^2 = 16x + 1 \quad (2)$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad (1)$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad (4)$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad (3)$$

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  می‌باشد؟ (خ ۹۶)

$$15 \quad (4)$$

$$13 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

مثال: به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله درجه دوم  $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$  دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ (تجربی خ ۹۴)

$$a > 4 \quad (4)$$

$$a < 4 \quad (3)$$

$$a > -4 \quad (2)$$

$$a < -4 \quad (1)$$

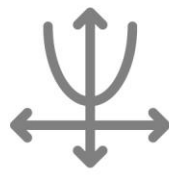
مثال: به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله  $x^2 - 2(a-2)x^2 + 14 - a = 0$  دارای دو ریشه مثبت است؟ (س ۹۶)

$$5 < a < 14 \quad (4)$$

$$2 < a < 14 \quad (3)$$

$$2 < a < 5 \quad (2)$$

$$-2 < a < 2 \quad (1)$$



روش هندسی حل معادلات

مثال: معادله  $x^2 - 2x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  را حل کنید.

نکته: اگر  $y = g(x), y = f(x)$  دو تابع باشند، طول نقاط برخورد نمودار این دو منحنی، جواب‌های معادله  $f(x) = g(x)$  می‌باشند.

مثال: معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف)  $|x-1| = x^2 - 4x + 3$

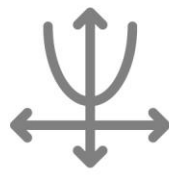
ب)  $|x| + 1 = -x^2 + 2x$

مثال: معادله  $x^2 - x + |x| = 1$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

مثال: معادله  $|x-2| + |x+3| = 5$  چند ریشه دارد؟

- (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۴ بی شمار



معادلات گویا

مثال: معادلات گویای زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

$$\text{ب) } \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2}$$

$$\text{ج) } \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\text{د) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

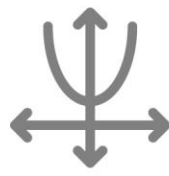
روش حل معادلات گویا:

۱) مخرج کسر ها را تجزیه می‌کنیم و مخرج مشترک می‌گیریم.

۲) طرفین وسطین

۳) حل معادله

۴) جواب‌ها مخرج معادله اصلی را صفر نکنند.

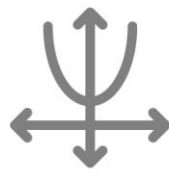


$$ه) \quad x^2 - x + 3 = \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - x + 2}$$

$$و) \quad \frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

مثال: در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰kg محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

مثال: سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟



معادلات گنگ

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sqrt{2x-1} = x-2$

ب)  $\sqrt{2x+6} + 1 = x$

ج)  $\sqrt{5x+6} - \sqrt{x+2} = 2$

د)  $1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7} = 2x$

روش حل معادلات رادیکالی:

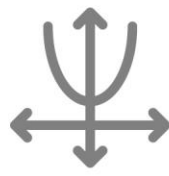
۱) رادیکال را در صورت امکان تنها می‌کنیم.

۲) به توان می‌رسانیم.

۳) در صورت باقی ماندن رادیکال، مراحل ۱ و ۲ را تکرار می‌کنیم.

۴) معادله را حل کرده و جواب‌ها را چک می‌کنیم.





مثال: معادلات زیر را حل کنید.

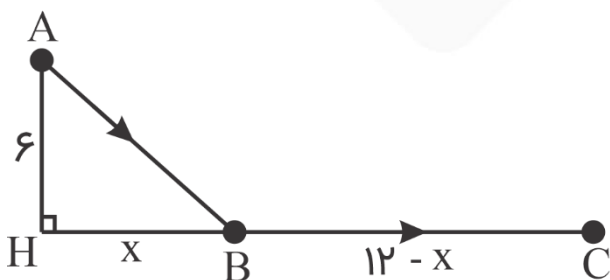
الف)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9} = 0$

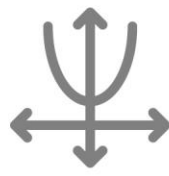
ب)  $\sqrt{x+1} + |x-3| = 0$

ج)  $\sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}+2} = 4$

د)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 3$

مثال: یک مرغ دریایی در نقطه A به فاصله ۶ متر از سطح آب قرار دارد. مرغ ماهی‌ای را در نقطه C مشاهده می‌کند. او ابتدا از A به B می‌آید و سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای پیمودن هر متر در هوا ۱۴Kcal و در سطح آب ۱۰Kcal انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از نقطه C باشد تا مرغ روی هم رفته ۱۸۰Kcal انرژی مصرف کند؟





مثال: بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زود تر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (س ۹۸)

۳۶ (۴)

۳۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)

مثال: اگر  $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$  باشد، حاصل  $\frac{a+1}{a}$  کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

مثال: حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟ (س ۹۴)

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۲ (۱)

مثال: تعداد جواب‌های معادله  $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8}} = x + 2$  کدام است؟

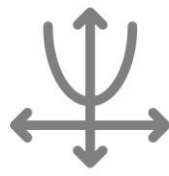
(خ ۱۴۰۰)

۰ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)



قدر مطلق و ویژگی‌های آن

تعریف قدر مطلق

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثال: بدون قدر مطلق بنویسید.

الف)  $|-7 - (-4)|$

ب)  $|3 - \sqrt{10}|$

ج)  $|x + 2|$

د)  $|x - 1| + |x + 4|$

ویژگی‌های قدر مطلق:

۱)  $|x| \geq 0$

۲)  $\sqrt{x^2} = |x|$

۳)  $|-x| = |x|$

۴)  $|x|^2 = x^2$

۵)  $|ab| = |a||b|$

۶)  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

۷)  $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

۸)  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$

۹)  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$   
( $a > 0$ )

۱۰)  $|x| > a \Leftrightarrow x > a$  یا  $x < -a$

مثال: ساده نویسی کنید.

الف)  $\sqrt{A^2 - 6A + 9}$

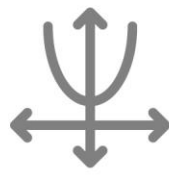
ب)  $|-2x + 6|$

ج)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

د)  $b < 0 < a \Rightarrow |a - b| + |a + 1| - |1 - b|$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $|2x - 1| = |x + 5|$



ب)  $|x-2|=7-3x$

ج)  $|x-1|-2=3$

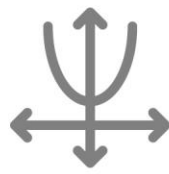
د)  $3|x-2|+|x-1|=4$

ه)  $\sqrt{x^2-4x+4}=2x+1$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف)  $1 < |3x-4| \leq 4$

ب)  $|2x+3| < 4x$



ج)  $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$

د)  $|3x-2| - 2|2x+1| \leq 0$

ه)  $|x-1| + |x-2| > x$

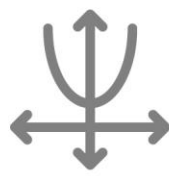
رسم توابع قدر مطلقى

الف)  $f(x) = |x+a|+b$

مثال:  $f(x) = |x+3|-2$  را رسم کنید.

ب)  $y = |f(x)|$

مثال:  $y = ||x|-2|, y = |x^2-4|$  را رسم کنید.



ج) توابع گلدانی و سرسره‌ای

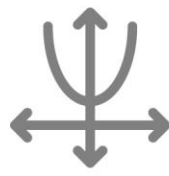
مثال:  $f(x) = |x+2| + |x-1|$  را رسم کنید.

مثال:  $f(x) = |x-2| - |x+3|$  را رسم کنید.

مثال: معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف)  $|x^2 - 4x| = -2x + 8$

ب)  $|x-2| - |x+1| = 3$



نامساوی مثلث

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

نتایج:

$$|a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow$$

$$|a+b| < |a|+|b| \Leftrightarrow$$

مثال: کمترین مقدار تابع  $y = |x+2| + |x-2|$  را به دست آورید.

مثال: نامعادله  $|2x-1| + |x-2| > 3|x-1|$  را حل کنید.

مثال: معادله  $|6-3x| + |x+4| = |4x-2|$  را حل کنید.

مثال: مجموع جواب‌های معادله  $|2x-1| + |x+2| = 3$  کدام است؟ (خ ۹۸)

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$

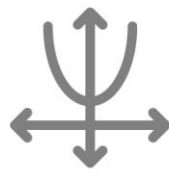
مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = |x+1| - |x-2|$  در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (تجربی ۹۸)

$$(۲, +\infty) \quad (۴)$$

$$(-۱, ۲) \quad (۳)$$

$$(-۱, +\infty) \quad (۲)$$

$$(-\infty, ۲) \quad (۱)$$



مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{4}x + 2$  کدام است؟ (س ۹۹)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

مثال: نمودارهای دو تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  و  $y = x + 7$  در دو نقطه A و B متقاطعند. اندازه پاره خط AB کدام است؟ (خ ۹۹)

$10\sqrt{2}$  (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

$8\sqrt{2}$  (۱)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $|2x - 1| + |x + 2| > |3x + 1|$  برابر بازه (a, b) است.  $b - a$  کدام است؟

$3/5$  (۴)

$2/5$  (۳)

$1/5$  (۲)

$0/5$  (۱)

مثال: اگر مجموعه جواب معادله  $|x + 4| = |x + 1| + |2x + 5|$ ، یک بازه باشد، طول بازه کدام است؟

$5/4$  (۴)

$5/2$  (۳)

$3/2$  (۲)

$3/4$  (۱)

مثال: مجموع ریشه‌های معادله  $x^2 - 5|x - 1| - 2x + 5 = 0$  کدام است؟

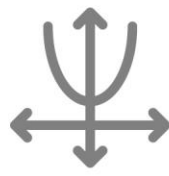
۰ (۵)

۴ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱)





آشنایی با هندسه تحلیلی

$$y = mx + h$$

معادله خط

شیب:

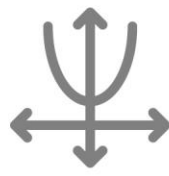
عرض از مبدأ

مثال: معادله خط گذرا از نقاط  $A(1, 4)$  و  $B(-1, 1)$  را بنویسید.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(3, -1)$  بگذرد و با خط  $y = 3x + 7$  موازی باشد.

نکته: معادله خط گذرا از  $A(x_1, y_1)$  یا شیب  $m$ :

مثال: معادله خط گذرا از نقطه  $(1, 1)$  و عمود بر خط  $3y = 2x + 8$  را بنویسید.



وضیعت دو خط نسبت به هم

(۱) موازی

(۲) عمود

(۳) متقاطع غیر عمود

مثال: نقطه برخورد دو خط  $y = 2x + 5$  و  $y = -3x + 10$  را به دست آورید.

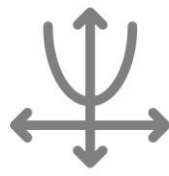
مثال: مستطیل ABCD با مختصات رئوس  $A(-1, 1)$  و  $B(2, 2/5)$  و  $C(1, 4/5)$  را در نظر بگیرید. معادله ضلع AD و مختصات رأس D را بیابید.

فاصله دو نقطه از هم

مثال: فاصله نقاط  $A(2, 1)$  و  $B(2, 4)$  و  $C(6, 1)$  از یکدیگر چقدر است؟

نتیجه:

مثال: نقاط  $A(1, 1)$  و  $B(5, 2)$  و  $C(-1, 9)$  را در نظر بگیرید. نشان دهید  $\triangle ABC$  قائم‌الزاویه است.



مثال: فاصله نقطه  $A(-8, 15)$  از مبدأ مختصات چقدر است؟

مثال: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو سر آن  $A(-2, 1)$  و  $B(4, 7)$  باشند.

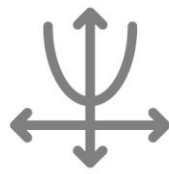
مختصات نقطه وسط پاره خط

مثال: مثلثی با رئوس  $A(2, 4)$  و  $B(-2, 3)$  و  $C(4, 1)$  را در نظر بگیرید. طول میانه  $AM$  و معادله آن را به دست آورید.

مثال: قرینه نقطه  $A(-2, 2)$  را نسبت به نقطه  $(2, 0)$  به دست آورید.

فاصله نقطه از خط

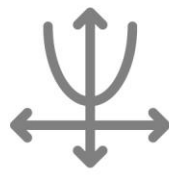
مثال: فاصله نقطه  $(-3, 5)$  از خط  $y = 2x + 1$  را به دست آورید.



نکته: فاصله نقطه  $(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

مثال: خط  $5x - 12y = 7$  بر دایره‌ای به مرکز  $O(4, 0)$  مماس است. قطر دایره را بیابید.

مثال: یکی از اضلاع مربعی بر خط  $y = 2x + 1$  واقع است. اگر  $A(2, 1)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت این مربع چقدر است؟



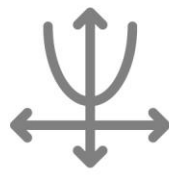
فاصله دو خط موازی

مثال: فاصله دو خط  $3x + 4y = 0$  و  $6x + 8y + 6 = 0$  را به دست آورید.

نکته:

مثال: در ضلع مربعی بر خطوط  $2x - 3y = 7$  و  $-6x + 9y - 18 = 0$  منطبق است. مساحت مربع را بیابید.





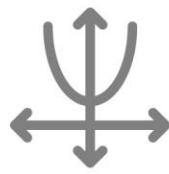
مثال: نوع مثلث با رئوس  $A(1,2)$  و  $B(2,5)$  و  $C(4,1)$  را مشخص کنید.

مثال: نقاط  $A(2,-2)$  و  $B(6,4)$  دو سر یکی از قطرهای دایره هستند. شعاع و مرکز دایره را مشخص کنید. آیا نقطه  $C(7,3)$  روی دایره قرار دارد؟

مثال: مساحت مثلث با رئوس  $A(0,-4)$  و  $B(2,1)$  و  $C(-1,2)$  را به دست آورید.

مثال: خطی با شیب  $m$  از نقطه  $(2,1)$  گذشته و محورهای مختصات را در  $A$  و  $B$  قطع می‌کند.  $m$  را به گونه‌ای بیابید. که مساحت مثلث  $OAB$  برابر ۴ شود. ( $O$ : مبدأ مختصات)

مثال: مرکز دایره‌ای که از سه نقطه  $A(-12,7)$  و  $B(4,3)$  و  $C(-3,-8)$  عبور می‌کند. بیابید.



مثال: نقطه  $A(4, 2)$  یک رأس متوازی الاضلاعی است که دو ضلعش به معادلات  $4x + 3y = 7$  و  $2x - 3y + 1 = 0$  می باشند. مختصات رئوس دیگر متوازی الاضلاع را بیابید.

مثال: نقطه  $O(1, -2)$  مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ و مماس بر خط  $4x + 3y = m$  است.  $m$  را بیابید.

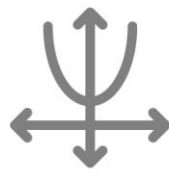
مثال: اگر  $A(2, 5)$  و  $B(3, -1)$  و  $C(0, 2)$  سه رأس یک مثلث باشند، مختصات پای ارتفاع  $AH$  را به دست آورید.

مثال: مثلثی با رأس‌های  $A(1, 5)$  و  $B(7, 3)$  و  $C(2, -2)$  مفروض است. اندازه ارتفاع  $AH$  در مثلث  $ABC$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

- (۱) ۴      (۲)  $3\sqrt{2}$       (۳) ۵      (۴)  $4\sqrt{2}$

مثال: اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات  $y + 2x = 16$  و  $2y - x = 2$  و  $y = 0$  هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟ (تجربی خ ۹۹)

- (۱)  $2\sqrt{5}$       (۲) ۵      (۳)  $3\sqrt{3}$       (۴) ۶



مثال: نقطه  $H(2,1)$  را روی خط  $3x - y = 5$  در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الضلاع  $ABC$  را با ارتفاع  $AH$  می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث  $\sqrt{270}$  واحد باشد. مختصات یک رأس  $A$  کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

- (۱)  $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$       (۲)  $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$       (۳)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$       (۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

مثال: دو نقطه بر خط به معادله  $y = x - 1$  قرار دارند به طوری که فاصله این نقاط از خط  $2x - 3y = 5$  برابر  $\sqrt{13}$  است. طول این دو نقطه کدام است؟

- (۱)  $-15, 9$       (۲)  $-15, 11$       (۳)  $-11, 15$       (۴)  $11, -9$