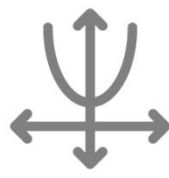


مفهوم حد:

الف)  $f(x) = x + 2$

ب)  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$

ج)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

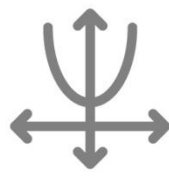


د)  $f(x) = [x]$

ه)  $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

و)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

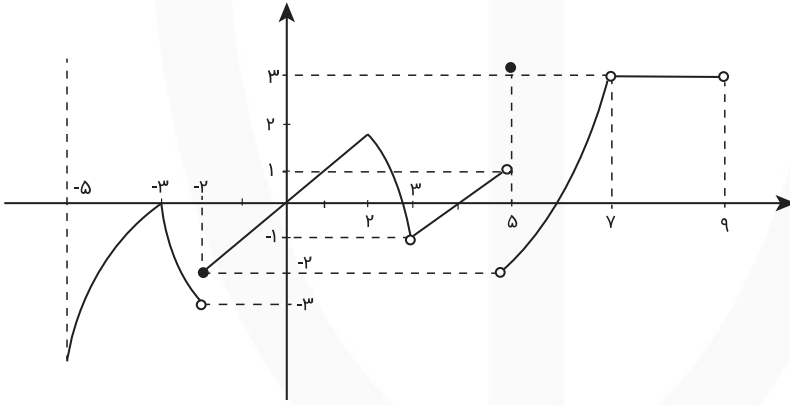
ز)  $f(x) = \frac{1}{[x-2]}$



تعریف: گوئیم تابع  $f(x)$  در نقطه‌ای به طول  $a$  حدّ دارد هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ و می‌نویسیم:}$$

مثال: با توجه به نمودار  $f(x)$ ، موارد خواسته‌شده را بنویسید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

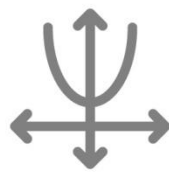
ج)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

د)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

هـ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

و)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

ز)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$



حدّ راست:

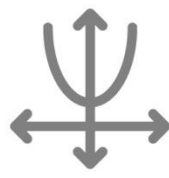
حدّ چپ:

شرط لازم و کافی وجود حد در نقطه  $a$ :

مثال: حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases} \quad (x=1)$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{x-3} \quad (x=3)$$

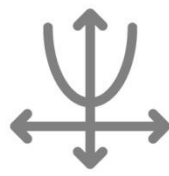


ج)  $f(x) = \frac{[x]}{x-2} \quad (x=0)$

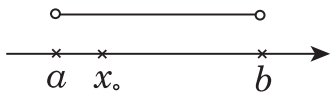
د)  $f(x) = x - [x] \quad (x=1)$

هـ)  $f(x) = [x^2 - 2x + 3] \quad (x=1)$

و)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}} \quad (x=2)$



$$x_0 \in (a, b)$$



همسایگی:

$$(a, b) - \{x_0\}$$

همسایگی محذوف:

$$(x_0, x_0 + r)$$

$$r > 0$$

همسایگی راست:

$$(x_0 - r, x_0)$$

$$r > 0$$

همسایگی چپ:

تذکر ۱: همسایگی محذوف  $x_0$ ، همسایگی چپ  $x_0$  و همسایگی راست  $x_0$ ، همسایگی  $x_0$  نیستند.  
تذکر ۲: همسایگی محذوف، از اجتماع همسایگی راست و چپ تشکیل می‌شود.

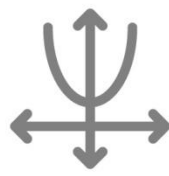
مثال: بازه  $(۳x - ۱, ۲x + ۷)$  یک همسایگی عدد ۵ است. مجموعه مقادیر  $x$  کدام است؟

(۱)  $[-۲, ۱]$

(۲)  $(-۲, ۱)$

(۳)  $[-۱, ۲]$

(۴)  $(-۱, ۲)$



مثال: کدام گزینه همسایگی محذوف عدد ۲ نمی‌باشد؟

(۱)  $(-1, 2) \cup (2, 3)$

(۲)  $0 < (x-2)^2 < 4$

(۳)  $\frac{1}{(x-2)^2} > 4$

(۴)  $x^2 - 2x < 0$

مثال: تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$  در همسایگی محذوف چند نقطه تعریف شده که در خود آن نقطه تعریف نشده است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

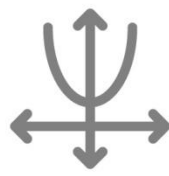
(۴) ۶

مثال: در هر مورد بررسی کنید که تابع در همسایگی، همسایگی راست و چپ و همسایگی محذوف ۲ تعریف شده است یا خیر؟

الف)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$

ب)  $f(x) = \frac{x-2}{[x]-1}$

ج)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2(x+3)}}$



مثال: بررسی کنید دامنه چه تعداد از توابع زیر همسایگی محذوف ۲ می‌باشد؟

الف)  $f(x) = \sqrt{|x-2|-1}$

ب)  $g(x) = \sqrt{\frac{1}{|x-2|}-1}$

ج)  $h(x) = \frac{x}{[x]^2 - 3[x] + 2}$

د)  $k(x) = \frac{1}{\sqrt{3-|x-2|}} + \frac{1}{x-2}$

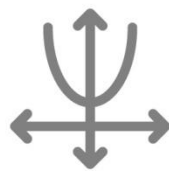
مثال: در هر مورد، نمودار تابعی رسم کنید که شرایط ذکر شده را داشته باشد.  
الف) در همسایگی محذوف ۳ تعریف شده و حد دارد.

ب) در همسایگی ۳ تعریف شده و حد دارد ولی حد و مقدار آن در  $x=3$  برابر نیست.

ج) در همسایگی چپ ۳ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

د) در ۳ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

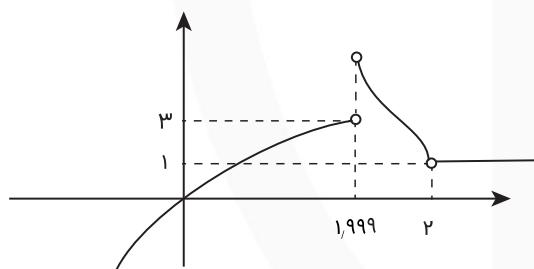




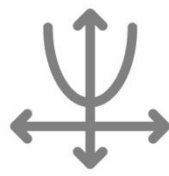
تذکرات:

۱. مفهوم حد تابع در نقطه  $a$ ، هیچ ربطی به مفهوم مقدار تابع در نقطه  $a$  ندارد. همچنین ربطی به مقدار داشتن در نقطه  $a$  نیز ندارد.

۲. نزدیک شدن  $x$  به  $a$ ، یعنی  $x$  در یک همسایگی محذوف نقطه  $a$  باشد و فاصله  $x$  با  $a$  از هر مقدار مثبتی کم‌تر باشد.

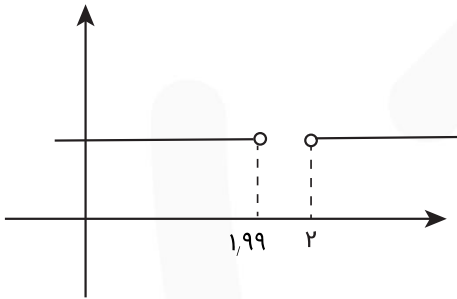


۳. شرط لازم وجود حد در یک نقطه این است که بتوان از نقاط داخل دامنه تابع، به میزان دلخواه به آن نقطه نزدیک شد. به بیان دیگر تابع باید لااقل در یک همسایگی محذوف آن نقطه تعریف شده باشد.



مثال:  $f(x) = 2$  با  $D_f = \mathbb{Z}$  در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

مثال:



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.99} f(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow 2.000001} f(x):$$

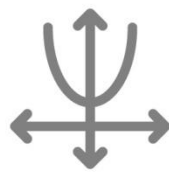
مثال: نشان دهید توابع زیر در نقطه داده شده حد ندارند.

الف)  $f(x) = \frac{x}{[x]}$  ( $x = 0$ )

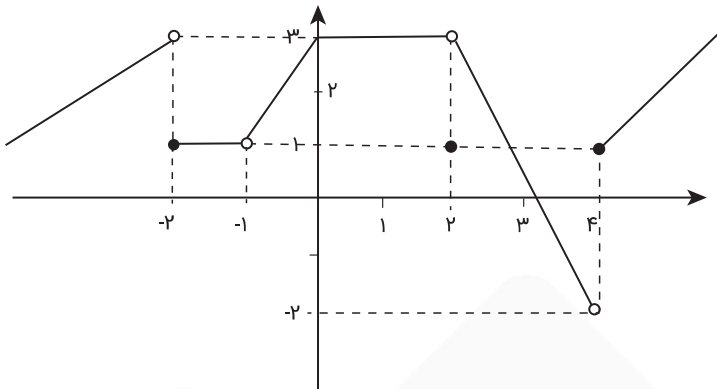
ب)  $f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x+1}}$  ( $x = -2$ )

ج)  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x([x]-1)}$  ( $x = 2$ )

\* به دامنه توجه کنیم نه به خاطر خود  $a$ ، بلکه به خاطر اطراف  $a$



مثال: با توجه به نمودار مقابل، موارد خواسته شده را به دست آورید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2-x)$

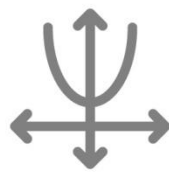
ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(4-x^2)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} fof(x)$

د)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(1+f(x))$

ه)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]$

و)  $\left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right]$



## محاسبه حد

## قضایای حد

۱. حد تابع ثابت و تابع همانی

۲. حد مجموع، تفاض، ضرب و تقسیم: اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه‌ای به طول  $a$  حد داشته باشند و داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = n \text{ آن گاه:}$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) =$

ج)  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) =$

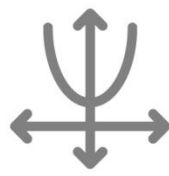
د)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) =$

۳. حد ضریب و توان و رادیکال

الف)  $\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^r =$

ج)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[r]{f(x)} =$



مثال: حد تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$  را در نقطه  $x = 3$  محاسبه کنید.

نتیجه: حد توابع چند جمله‌ای و گویا در نقطه‌ای به طول  $a$  از دامنه‌شان، برابر مقدار این توابع در نقطه  $a$  است.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

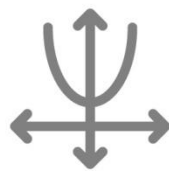
الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x+1}}$

ج)  $f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} + 2 & -3 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & x > 3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$



مثال: در تابع زیر، مقادیر  $b$  و  $a$  را به گونه‌ای بیابید که حد تابع در  $x = \pm 2$  موجود باشد.

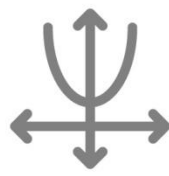
$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & x < -2 \\ ax + 2b & -2 < x < 2 \\ b + x & x > 2 \end{cases}$$

مثال: در تابع با ضابطه زیر، مقادیر مجهول را به گونه‌ای بیابید که  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{2x-b} & x > 2 \\ ax^2 + bx + c & x < 2 \end{cases}$$

مثال: در تابع زیر،  $a$  را به گونه‌ای بیابید که تابع در نقطه  $x = 0$  حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & x > 0 \\ \frac{[x] + a}{x - 2} & x \leq 0 \end{cases}$$

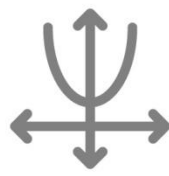


مثال:  $a$  را به گونه‌ای بیابید که تابع  $f(x) = [-x] + a \left[ \frac{x-1}{3} \right]$  در نقطه  $x = 4$  حد داشته باشد.

مثال:  $a$  و  $b$  را به گونه‌ای بیابید که تابع  $f(x) = (ax+b)[x]$  در  $x = 2$  حد داشته باشد و نیز  $f(3) = 6$  باشد.

مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x)+1}{2f(x)+1}$  را بیابید.

مثال: اگر بدانیم تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 5$  حد دارد و  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2f(x)+3}{f^2(x)+4f(x)} = 1$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  را به دست آورید.



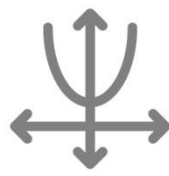
مثال: دو تابع  $g$  و  $f$  را مثال بزنید که در  $x=2$  حد نداشته باشند ولی تابع  $f+g$  در  $x=2$  حد داشته باشد.

مثال: دو تابع  $g$  و  $f$  را مثال بزنید که در  $x=1$  حد نداشته باشند ولی  $f \cdot g$  در  $x=1$  حد داشته باشد.

مثال: دو تابع  $g$  و  $f$  را مثال بزنید که  $f$  در  $x=2$  حد داشته باشد،  $g$  در  $x=2$  حد نداشته باشد ولی  $f \cdot g$  در  $x=2$  حد داشته باشد.

مثال: تابع  $f$  را مثال بزنید به طوری که در  $x=1$  حد نداشته باشد ولی  $|f|$  در  $x=1$  حد داشته باشد.



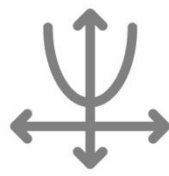


مثال: دو تابع  $f$  و  $g$  مثال بزنید که هر دو در  $x = 3$  حد داشته باشند، اما  $\frac{f}{g}$  در  $x = 3$  حد نداشته باشد.

مثال: دو تابع  $f$  و  $g$  مثال بزنید که  $f$  در  $x = 1$  داشته باشد.  $g$  در  $x = 1$  حد نداشته باشد ولی  $\frac{f}{g}$  در  $x = 1$  حد داشته باشد.

مثال: ثابت کنید اگر  $f + g$  در  $x = a$  حد داشته باشد و  $f$  نیز در  $x = a$  حد داشته باشد،  $g$  نیز در  $a$  حد دارد.

مثال: ثابت کنید اگر  $f$  در  $a$  حد داشته باشد و  $g$  در  $a$  حد نداشته باشد،  $f + g$  در  $a$  حد ندارد.



محاسبهٔ حد توابع کسری که حد صورت و مخرج آن‌ها برابر صفر است.  
مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

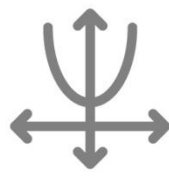
الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 6x - 7}{2x^2 - 3x - 5}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

د)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 7x + 5}{x^2 - 5x^2 + 4}$

هـ)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 3x}$

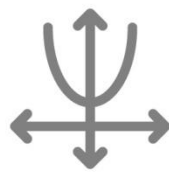


و)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

ز)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x^2 - 5x + 3}$

ح)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{1+2x}}$

ط)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + \sqrt{x+18}}{x + 2\sqrt{x+3}}$

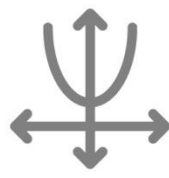


$$س) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^y - a^y}$$

$$ک) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x^y - 26x - 27}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^y - 2x + 1}$$



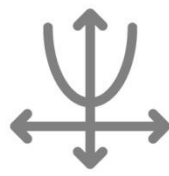
ن)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|}$

س)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + x - 2}$

ع)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4 + 2|x - 4|}{x^2 - 7x + 12}$

ف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$

ص)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} - \left| \frac{x}{x+1} \right| \right)$



## حد توابع مثلثاتی

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

$$\left( a \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

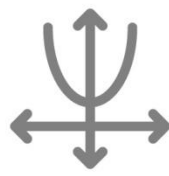
$$(a \neq k\pi)$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x + \cos x}}{1 + \cos^2 x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$



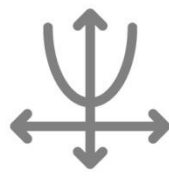
د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos x - \cos 2x}$

ه)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^m x}$

و)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^r x + 3 \sin x - 5}{\cos^s x}$

ز)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 2x}$

ح)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^r x + \cot^s x - 2}{1 - \sin 2x}$



ط)  $\lim_{x \rightarrow n} \frac{1 + \cos^v x}{\sin^v x}$

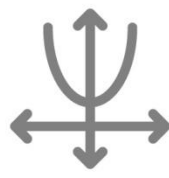
ی)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \tan x - \tan 2x}$

ک)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^v x + \sin x - 1}{2 \sin^v x - 3 \sin x + 1}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 - 2 \cos 2x}}$

م)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\tan x - \tan a}$



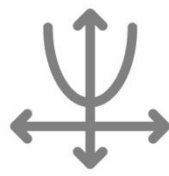


ن)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cot 2x}$

س)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

ع)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

ف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

قضیه:

نتایج:

الف)  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan Kx}{x} = K$

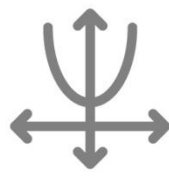
د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

ه)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{4x^3}$



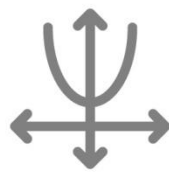
ح)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x}{x^3}$

د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ه)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$

و)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$

ز)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 5x}{3x - \sin 5x}$



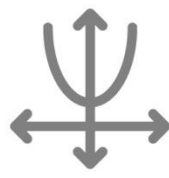
ح)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\tan 7x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

ی)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

ک)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{\tan 3x}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{1-x}$



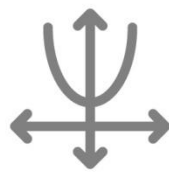
م)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

ن)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}$

س)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x - \pi}{\cos x}$

ع)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi}$

ف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$



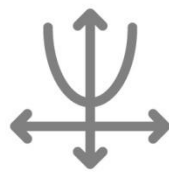
ص)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^r \cos x - 2x^r}{\cos^r x - 2 \cos x + 1}$

ق)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[r]{\cos x}}{x^r}$

ر)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \sqrt{1 - \cos 2x}}{x^r}$

ش)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^r x - \cos 2x}{x \sin x}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^r}$



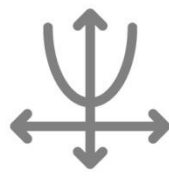
ث)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}$

خ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(1-x)^2}$

ذ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

ض)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{1 - \cos 4x}$

ظ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin^2 x + x \tan 4x}$



غ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3x+3}}{\sin(x-2)}$

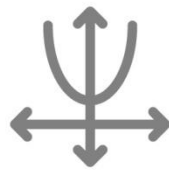
گ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-\sin \frac{\pi}{2}x}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3x - \pi}$

ژ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{1 + \cos x}}{4x^2 - \pi^2}$





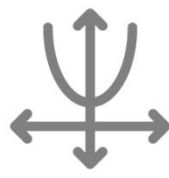
$$A) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 3x \cdot \cot x$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \frac{\pi}{2} x$$

$$C) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x) \cot^2 x$$

$$D) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$E) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan 3x)(1 - \sin x)$$



حدّ توابع شامل جزء صحیح

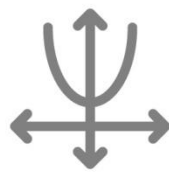
الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} [x]$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1,5} [x]$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)[x]$

د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - 2}{[x]}$

ه)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{[x - 2]}$



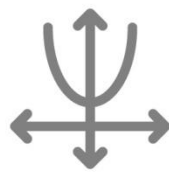
$$و) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9}$$

$$ز) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{[x] - 2}$$

$$ح) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 [x] - 1}{x^2 - [x]}$$

$$ط) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - [x]}{x^2 - 16} \times \sqrt{x^2 - 8x + 16}$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - |x|}{[x + 1] - x}$$



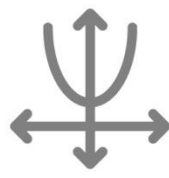
$$ک) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x]^r - [x^r]}{[x] - 1}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \left[ \frac{x}{2} \right] + [\sqrt{x}] \right)$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow 6} \left( \left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{-x}{3} \right] \right)$$

$$ن) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$س) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{[25 - x^2] + \left[ \frac{x}{5} \right]}{x + \left[ \frac{x}{5} \right] - 5}$$



ع)  $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} [\sin x]$

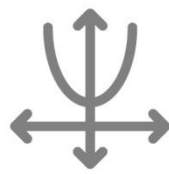
ف)  $\left[ \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \sin x \right]$

ص)  $f(x) = 3 - (x+1)^2$

$\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$

$\left[ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right]$

ق)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right]$

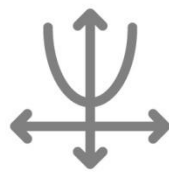


مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - ax + 6} = b$  باشد،  $(b \neq 0)$  و  $a$  و  $b$  را بیابید.

مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{ax + 3}}{x^2 + 3x - 4} = b$  باشد،  $a$  و  $b$  را بیابید.

مثال:  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  حد داشته باشد و حد آن برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} & x < 1 \\ b & x = 1 \\ [-x + 4] & x > 1 \end{cases}$$



مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$  کدام است؟ (خ ۹۸)

۱ (۱)

۲ (۲)

$\pi$  (۳)

$2\pi$  (۴)

مثال: حد عبارت  $\frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  کدام است؟ (خ تجربی ۹۸)

$-\frac{1}{3}$  (۱)

$-\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{1}{6}$  (۳)

$-\frac{1}{8}$  (۴)

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$  کدام است؟ (س ۹۹)

-۱,۵ (۱)

-۱,۲ (۲)

-۰,۸ (۳)

-۰,۶ (۴)

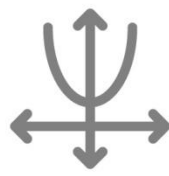
مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$-\infty$  (۱)

-۱ (۲)

صفر (۳)

۱ (۴)



مثال: مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[\frac{-2}{x^2}\right]}$  ، کدام است؟ (س ۱۴۰۰- با کمی تغییر)

(۱)  $\frac{4}{3}$

(۲) ۰

(۳)  $\frac{5}{8}$

(۴)  $\frac{4}{4}$

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$  ، کدام است؟ (تجربی ۹۷)

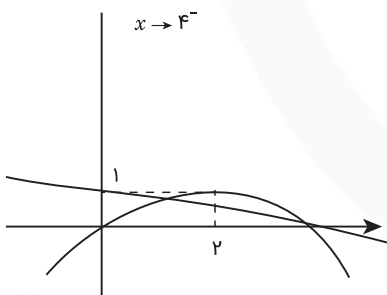
(۱) -۱۱۲

(۲) -۹۶

(۳) -۸۴

(۴) -۷۲

مثال: نمودار سهمی  $f$  و خط راست  $g$  در شکل زیر داده شده است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$  کدام است؟ (تجربی خ ۱۴۰۰)



(۱)  $-\frac{3}{2}$

(۲)  $-\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{5}{4}$

(۴)  $\frac{3}{2}$

مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2^a$  باشد، آن‌گاه  $a$  کدام است؟ (س ۹۲)

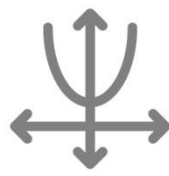
(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $\frac{1}{2}$





مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$  باشد،  $b$  کدام است؟ (خ ۹۵)

(۱) -۸

(۲) -۶

(۳) ۴

(۴) ۵

مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax+b} = \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $a+b$  کدام است؟ (خ ۹۲)

(۱) -۲۰

(۲) -۱۶

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$  ، کدام است؟ (س ۹۷)

(۱)  $-2\sqrt{2}$

(۲)  $-\sqrt{2}$

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $2\sqrt{2}$

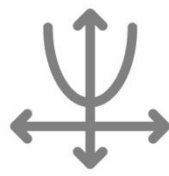
مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2+2\cos x}}$  کدام است؟ (خ ۹۷)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲



مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$  کدام است؟ (س ۹۱)

(۱)  $-2\pi$

(۲)  $2\pi$

(۳)  $\pi$

(۴)  $-\pi$

مثال: حد عبارت  $\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$  وقتی  $x \rightarrow 0^+$  کدام است؟ (خ ۹۶)

(۱)  $-1$

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $1$

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$  کدام است؟ (س ۹۴)

(۱)  $-3$

(۲)  $3$

(۳)  $0$

(۴) حد ندارد

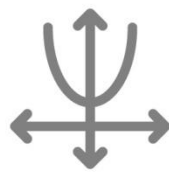
مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$  کدام است؟ (خ ۹۳)

(۱)  $2$

(۲)  $3$

(۳)  $4$

(۴)  $6$



مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$  کدام است؟ (س ۹۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

$\frac{1}{2}$  (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

مثال: اختلاف حد راست و چپ تابع  $f(x) = \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$  در نقطه‌ای به طول  $\frac{1}{2}$  چقدر است؟

$\frac{\pi}{2}$  (۱)

$\pi$  (۲)

$2\pi$  (۳)

$4\pi$  (۴)

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$  کدام است؟ (خ ۹۹)

-۲ (۱)

$-\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۴)

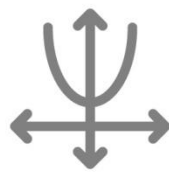
مثال: حد تابع  $f(x) = \left[ \frac{\sin x}{x} \right] - 2 \left[ \frac{x}{\sin x} \right]$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟

۰ (۱)

۲ (۲)

-۲ (۳)

حد ندارد (۴)



مثال: با فرض  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \sin^2 x - 3}{a \cos x + 2} = b$  ، مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۵-

(۲) ۳-

(۳) ۳

(۴) ۵

مثال: به ازای چه مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = 2a \left[ \frac{2}{x+1} \right] + (a-1)[-x-1]$  در نقطه  $x = -2$  دارای حد است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{6}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $-\frac{1}{4}$

مثال: کدام حد به درستی محاسبه شده است؟

۱)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]} = 1$

۲)  $\lim_{x \rightarrow 3} x[x] = 9$

۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$

۴)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{3-x^2}} = 0$

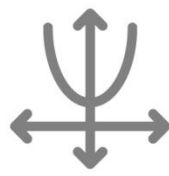
مثال: کدامیک از توابع زیر در نقطه‌ای به طول ۱ حد دارد؟

$f(x) = \frac{1}{[x]}$

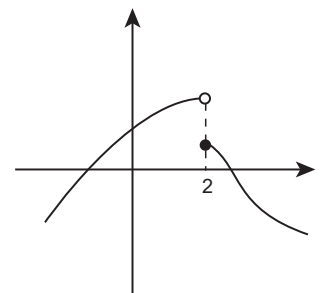
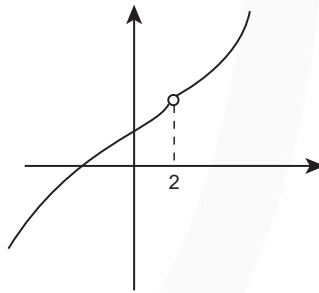
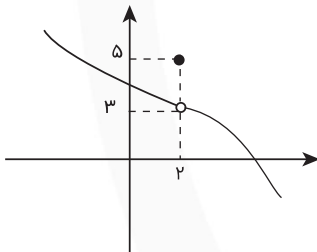
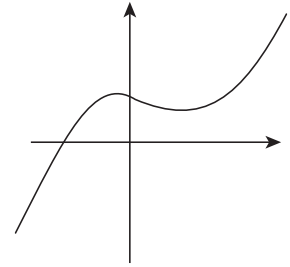
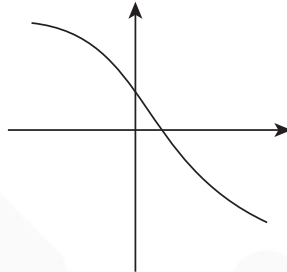
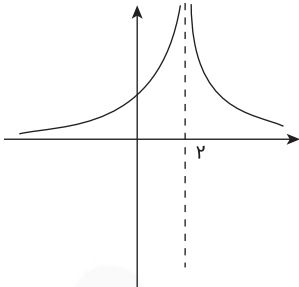
$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$f(x) = \frac{2}{[x] + [-x]}$

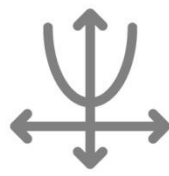
$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$



## پیوستگی



تعریف: تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $a$  پیوسته است هرگاه:



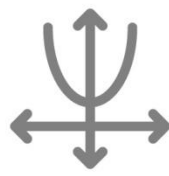
مثال: در هر مورد پیوستگی تابع را در نقطه داده شده، بررسی کنید.

الف)  $f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$  ( $x=4$ )

ب)  $f(x) = \begin{cases} 4 & x=2 \\ \sqrt{x^2+5} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} & x \neq 2 \end{cases}$  (در نقطه  $x=2$ )

ج)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} & x \neq 0 \end{cases}$  (در نقطه  $x=0$ )

د)  $f(x) = x - [x]$  (در نقاط  $x=2, 5$  ,  $x=2$ )



$$ه) f(x) = \left[ \frac{x}{2} \right] - \left[ \frac{x+1}{3} \right]$$

(در نقطه  $x=2$ )

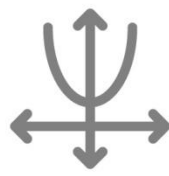
$$و) f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x > 1 \\ x^2 - 1 & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 2x}{4} & \end{cases}$$

(در نقطه  $x=1$ )

$$ز) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$ )

$$ح) f(x) = \begin{cases} \left| \cos \frac{\pi}{2} x \right| & x \neq 1 \\ x - 1 & \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \end{cases}$$



مثال: مقادیر  $b$  و  $a$  را به گونه‌ای تعیین کنید که توابع زیر در نقطه داده شده، پیوسته باشند.

الف)  $f(x) = (x^2 - a)[x]$

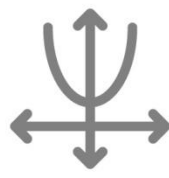
(در نقطه  $x = -3$ )

ب)  $f(x) = \begin{cases} a \left[ \frac{-1}{x} \right] + 2x & x < \frac{1}{2} \\ b & x = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{8x} - 2}{2x - 1} & x > \frac{1}{2} \end{cases}$  (در نقطه  $x = \frac{1}{2}$ )

ج)  $f(x) = \begin{cases} [x - 3, 5] + b \frac{|x - 4|}{x - 4} & x < 4 \\ 2 & x = 4 \\ \frac{a \sin(x - 4)}{\sqrt{x} - 2} - 2 & x > 4 \end{cases}$  (در نقطه  $x = 4$ )

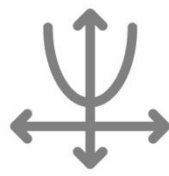
د)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b - 2}{\sqrt{1 + 5x} - 1} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$  (در نقطه  $x = 0$ )





$$\text{هـ) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} x}{(x-a)^r} & x \neq a \\ \frac{\pi^r}{\lambda} & x = a \end{cases} \quad (\text{در نقطه } x = a)$$

$$\text{و) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^r + ax + b}{(x-1)^r} & x \neq 1 \\ r & x = 1 \end{cases} \quad (\text{در نقطه } x = 1)$$



## پیوستگی یک طرفه

مثال: پیوستگی تابع  $f(x) = \sqrt{x-3}$  را در  $x=3$  و پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ x^2 & x \leq 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

پیوستگی راست:

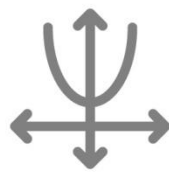
پیوستگی چپ:

مثال:  $a$  را به گونه ای بیابید که تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 27}{|x+3|} & x \neq -3 \\ a & x = -3 \end{cases}$  در نقطه ای به طول ۳ از چپ پیوسته باشد.

مثال: وضعیت پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x^2 - 4} \right| & x \neq 2 \\ \frac{\pi}{8} & x = 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

مثال: وضعیت پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x^2 - 4} \right| & x \neq 2 \\ \frac{\pi}{8} & x = 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

مثال: وضعیت پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x^2 - 4} \right| & x \neq 2 \\ \frac{\pi}{8} & x = 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

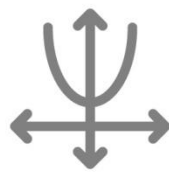


مثال:  $a$  و  $b$  را به گونه ای بیابید که تابع زیر در  $x=1$  از چپ و راست پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \pi x}{\tan^2 \pi x} & x < 1 \\ b & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x}-1} \cdot a & x > 1 \end{cases}$$

مثال: اگر تابع  $f$  با ضابطه زیر در  $x=1$  پیوستگی چپ داشته باشد،  $a$  را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2a \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2} - 2x + 1} \right) & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



پیوستگی روی بازه:

:  $(a, b)$

:  $[a, b)$

:  $(a, b]$

:  $[a, b]$

مثلاً تابع  $f(x) = \sqrt{x-5}$  بر بازه  $[5, \infty)$  پیوسته است. تابع  $f(x) = [x]$  روی بازه  $(1, 2)$  پیوسته است.

توابع  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = |x|$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته هستند.

مثال: با توجه به نمودار تابع  $f$ ، پیوستگی را بر بازه‌های زیر بررسی کنید.

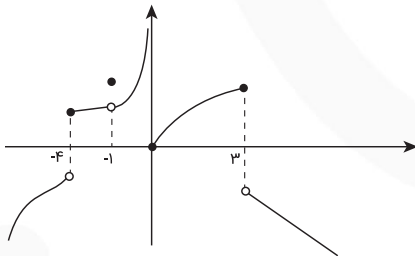
الف)  $[0, 3]$

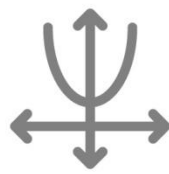
ب)  $(3, 6)$

ج)  $[-4, -1]$

د)  $(-1, 0)$

مثال: حدود  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{-x^2+ax-1}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد.





مثال: فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & |x-1| \geq 1 \end{cases}$  یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار  $a$  کدام است؟ (س ۹۹)

- (۱)  $-\frac{3}{2}$
- (۲)  $-1$
- (۳)  $1$
- (۴)  $\frac{5}{2}$

مثال: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $f(x) = [x] \sin \pi x ; |x| \leq 2$  ، کدام است؟ (خ ۹۹)

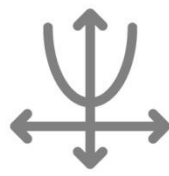
- (۱) ۳
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) صفر

مثال: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته است؟ (خ ۹۹ تجربی)

- (۱)  $1/5$
- (۲)  $1$
- (۳)  $-1$
- (۴)  $-1/5$

مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & x = 0 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.  $b$  کدام است؟ (خ ۹۷)

- (۱)  $\pm 1$
- (۲)  $\pm 2$
- (۳)  $\pm 3$
- (۴)  $\pm 4$



مثال: تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه  $f(x) = \left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$  در بازه  $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$  کدام است؟ (خ ۹۷)

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در بازه  $[2, 3]$  پیوسته است؟ (س ۹۷)

$\frac{1}{11}$  (۱)

$\frac{1}{9}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{1}{6}$  (۴)

مثال: به ازای مقادیری از  $a$  و  $b$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| \geq 1 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.  $a$  کدام است؟ (خ ۹۸)

$-\frac{3}{2}$  (۱)

-۱ (۲)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۴)

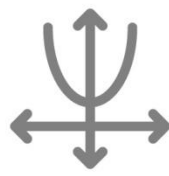
مثال: فرض کنید  $f(x) = 1 - x^2$ ،  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ ، تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $g \circ f$  کدام است؟ (س ۱۴۰۰ تجربی)

صفر (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)



مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (س ۹۶)

۱) -۱

۲) ۱

۳) ۰

۴) همواره ناپیوسته

مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] \cos 4x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ a & x = 0 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟ (خ ۹۶)

۱) -۱

۲) ۰

۳) ۱

۴) همواره ناپیوسته

مثال: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  بر روی بازه  $[0, 2\pi]$  پیوسته است؟ (خ ۹۴ تجربی)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

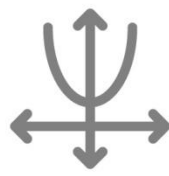
مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$  در نقاط  $x \in \mathbb{Z}$  از نظر پیوستگی چگونه است؟ (خ ۹۳)

۱) همواره پیوسته

۲) فقط در اعداد فرد پیوسته

۳) فقط در اعداد زوج پیوسته

۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته



مثال: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+\cos x} & \pi < x \leq 2\pi \\ x - \pi & \\ a \cos \frac{2x}{3} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در  $x = \pi$  پیوسته است؟ (خ ۹۳ تجربی)

- (۱)  $-2\sqrt{2}$
- (۲)  $-\sqrt{2}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴)  $\sqrt{2}$

مثال: به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$
- (۲)  $-\frac{1}{2}$
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴) هیچ مقدار  $a$

مثال: اگر تابع  $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$  روی بازه  $(2, 5)$  پیوسته باشد،  $a + b$  چقدر است؟

- (۱) ۵
- (۲) -۵
- (۳) ۷
- (۴) -۷

مثال: تابع  $f(x) = [x^2 - 4x + 1]$  در کدام نقطه، فقط پیوستگی چپ دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴