آموزشگاه آلاء

ریاضیات رشته ریاضی فارغ

کنکور

ریاضی

۸۰ دقیقه

بنام خدا

حسابان ۲ و کنکور پایه ۱
هندسه ۳ .... ۳
ریاضیات گسسته ۴

حسابان ۲ و کنکور پایه

۱. مجموعه جواب نامعادلهٔ $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$، به کدام صورت است؟

(۱) $\mathbb{R}-[-6,4]$ (۲) $\mathbb{R}-[-4,6]$ (۳) $x>4$ (۴) $x<-6$

۲. نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ در بازهٔ $[x_0,+\infty)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y=3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد، کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳. یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-5t^2+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

(۱) $(0,4)$ (۲) $(1,4)$ (۳) $(1,3.6)$ (۴) $(0,3.6)$

۴. عبارت $P(x)=6mx^2+2x-1$ همواره منفی است. حدود m کدام است؟

(۱) $m<0$ (۲) $m<-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{6}<m<0$ (۴) $m>-\frac{1}{6}$

۵. اگر $xy^2=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $(x+3y^2)^2-(x-3y^2)^2$، کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۶. اگر $A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$، کدام است؟

(۱) ۰٫۲۵ (۲) ۰٫۵ (۳) ۰٫۷۵ (۴) ۱

۷. سطح بین نمودار تابع $f(x)=|x-2|+|x-4|$ و محور xها و دو خط $x=3$ و $x=5$ چند واحد سطح است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱۲

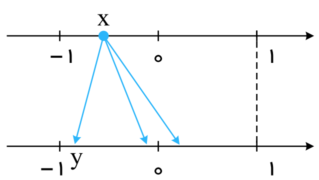
۸. خط $x=-2$ محور تقارن $y=|2x+1|+|2x+k|$ است. آن‌گاه:

(۱) $k=-7$ (۲) $k=-3$ (۳) $k=3$ (۴) $k=7$

۹. تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{15}{8}x^2-30x+200$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

(۱) پس از ۴ دقیقه (۲) پس از ۸ دقیقه (۳) پس از ۱۲ دقیقه (۴) پس از ۱۶ دقیقه

۱۰. در شکل روبه‌رو، عدد حقیقی x به چند توان و ریشه‌اش مربوط شده است. y کدام می‌تواند باشد؟



(۱) x^2 (۲) x^3 (۳) $\sqrt{x}$ (۴) $\sqrt[3]{x}$

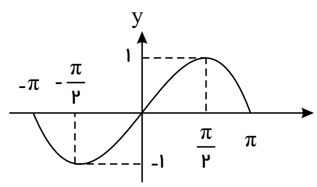
۱۱. مجموع مقادیر ممکن برای a به‌طوری که دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+x+12}+\sqrt{a^2x-a}$ یک مجموعهٔ تک عضوی باشد، کدام است؟

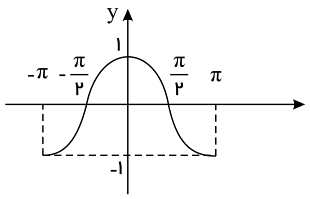
(۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

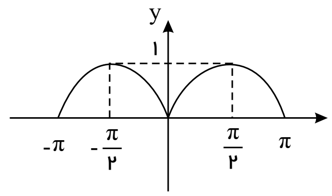
۱۲. حدود a کدام باشد تا دو مجموعهٔ $A=\{x|x\in\mathbb{R},-2<1-x<3\}$ و $B=\{x|\ |ax+2|<1\}$ هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند؟

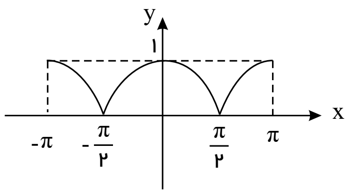
(۱) $[-1,\frac{1}{2}]-\{0\}$ (۲) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]-\{0\}$ (۳) $(-1,\frac{1}{3})-\{0\}$ (۴) $(0,\frac{1}{2})$

۱۳. نمودار $y=|\cos x|$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴. نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $y=-x+۶;\ x<-۴$
۲) $y=-x+۵\,;\ x>۲$
۳) $y=-\frac{۱}{۲}x+۱\,;\ -۴<x<۳$
۴) $y=-\frac{۱}{۲}x+۱\,;\ -۴\le x\le ۱۰$

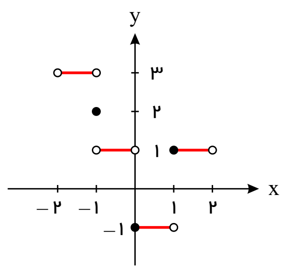
۱۵. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{[x-\frac{۱}{۳}]+[-x+\frac{۱}{۳}]}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ ([ ] نماد جزء صحیح است)

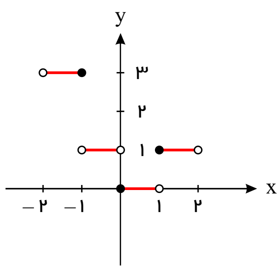
۱) $x=\mathbb{Z}$
۲) $x=k+\frac{۱}{۳}$
۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
۴) $\mathbb{R}$

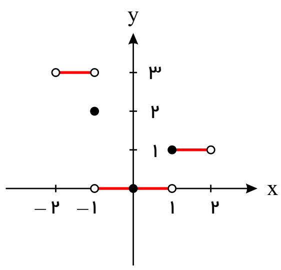
۱۶. کدام گزینه دربارهٔ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۲+۳>۲x$ کامل‌تر است؟

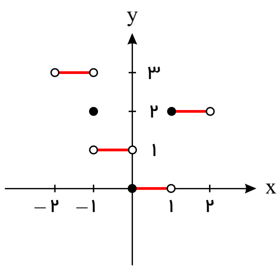
۱) به ازای مقادیر $x<۰$ برقرار است.
۲) به ازای مقادیر $-۳<x<۳$ برقرار است.
۳) به ازای مقادیر $-۳\le x\le ۳$ برقرار است.
۴) به ازای تمام مقایر x برقرار است.

۱۷. نمودار تابع $f(x)=|[x]|+[|x|]$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۸. حاصل $||[۳x]-|[-۴x]||$ به ازای $x=\frac{۱}{۳}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۹. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳>|\frac{۲x-۱}{۳}|>۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۰. اگر $a<۰$ و بازهٔ (a,b) بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که عبارت $p=\frac{x^۳-۱۰x^۲+۲۵x}{-x^۲-۲x+۳}$ در آن بازه منفی است، در این صورت $b-a$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۳

هندسه ۳

۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد $A(I+A)^۲$ کدام است؟

۱) A ۲) $A+I$ ۳) I ۴) $A^۲$

۲۲. هرگاه $A=\begin{bmatrix} ۱-\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱+\sqrt{۲} \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $A^{۹۹}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $-I$ ۴) $-A$

۲۳. معادله $۰=\begin{vmatrix} ۳ & -۳x+۲ & x \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $(۲A-B)\times B$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۵. اگر $A=\left[i^۲-j\right]_{۳\times۳}$ حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶. در دستگاه $\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=۴ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب برابر $\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $y=۲$ به‌دست آمده است. مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ a & ۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع درایه‌های وارون $B=\begin{bmatrix} a+۳ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۸. اگر $\begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ ۹ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ مجموعه درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۹. حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ z & y+z & x+y \\ z^۲ & y^۲+z^۲ & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۲(x+y)(x+z)$ ۲) صفر ۳) $(x-y)(y-z)(z-x)$ ۴) $۴xyz$

۳۰. اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=-۱ \\ cx+dy=-۲ \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $ax+cy$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & k \\ ۵ & m+۲ & ۳ \\ n+۵ & ۷ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=[ij+i-j]_{۳\times۳}$ با هم برابر باشند، آنگاه حاصل $m+n-k$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۴ ۴) -۴

۳۲. اگر $\tan ۲\alpha=۵$ باشد، دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲\cos\alpha & ۰ & \sin\alpha+\cos\alpha \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ \sin\alpha-\cos\alpha & ۰ & -\sin\alpha \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-۶\cos ۲\alpha$ ۲) $۶\cos ۲\alpha$ ۳) $۱۲\cos ۲\alpha$ ۴) $-۱۲\cos ۲\alpha$

۳۳. چند ماتریس اسکالر مانند A وجود دارد به‌طوری که حاصل‌ضرب درایه‌های غیر صفر آن ۶۴ و مجموع تمام درایه‌های آن ۱۲ باشد؟

(۱) چنین ماتریسی وجود ندارد. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

۳۴. فرض کنید A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر از مرتبه ۲ باشد طوری که $A + A^{-1} = I$ و هیچ درایهٔ ماتریس A برابر صفر نباشد. مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -1 (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۳۵. اگر $A_{2\times 2}$ و $I - 4A$ ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند و $|A| = 3$ و $|A^{-1} - 4I| = |I - 16A^2|$ باشد، حاصل $|A^{-1} + 4I|$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱

ریاضیات
گسسته

۳۶. اگر $x^2 \mid y^2 + z^2 + w^2$, $x^2 > y^2 + z^2 + w^2$، کدام رابطه الزاماً برقرار نیست؟

(۱) $w = 0$ (۲) $x^2 = 1$ (۳) $y^2 + z^2 = 0$ (۴) $|y| = |w| = |z|$

۳۷. اگر $a + b \mid b$، کدام رابطه همواره برقرار است؟

(۱) $a + b \mid a - b$ (۲) $a \mid b$ (۳) $a \mid a - b$ (۴) $b \mid a - b$

۳۸. اگر $m^2 - 5m + 5 \mid n$ به‌ازای هر n برقرار باشد، آنگاه m چند مقدار متمایز دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۹. اگر y عددی صحیح باشد، آنگاه بیش‌ترین مقدار طبیعی n در تساوی $y = \frac{n^2 + 4}{n + 1}$ کدام خواهد بود؟

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۸

۴۰. چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد که در دو معادلهٔ $d \mid 315$ و $21 \mid d$ صدق کنند؟

(۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۷

۴۱. کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی که بر ۴ بخش‌پذیر باشد مجموع ارقامش نیز بر ۴ بخش‌پذیر است» را رد می‌کند؟

(۱) ۴۴ (۲) ۱۱۲ (۳) ۴۲۷ (۴) ۹۳۶

۴۲. برای اثبات درستی گزارهٔ «مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به فرم $5k + 2$ نیست» به شیوهٔ در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، برای n چند حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۴۳. عدد $14! + 24$ بر کدام عدد بخش‌پذیر نیست؟

(۱) ۳ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۸

۴۴. روی منحنی $3xy - 2y - 10x + 2 = 0$ چند نقطه با مختصات صحیح و فرد وجود دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۰

۴۵. چه تعداد از ترکیب‌های دوشرطی زیر صحیح است؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

الف) $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

ب) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

پ) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ت) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۶. اگر x و y اعدادی حقیقی باشند، برای اثبات نامساوی $x^۲+۵y^۲\geq ۳(x+y+xy-۳)$ به روش بازگشتی به کدام رابطه همواره درست می‌رسیم؟

(۱) $(x-۳)^۲+(y-۳x)^۲+(y-۳)^۲\geq ۰$
(۲) $(x-۳)^۲+(۳y-x)^۲+(y-۳)^۲\geq ۰$
(۳) $(x+۳)^۲+(۳y-x)^۲+(y+۳)^۲\geq ۰$
(۴) $(x+۳)^۲+(y-۳x)^۲+(y+۳)^۲\geq ۰$

۴۷. اگر $bc|a^۲$ و $b^۲|ac$ که در آن a و b و c اعداد صحیح و مخالف صفر هستند، کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) $c^۳|a^۵$
(۲) $a^۳|c^۵$
(۳) $a^۳|b^۵$
(۴) $b^۳|a^۵$

۴۸. به ازای چند عدد مانند n رابطه $[n,۱۵]=۴۵$ برقرار است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۴۹. برای اثبات درستی گزارهٔ «اگر $a_۱,a_۲,a_۳$ اعدادی صحیح و $b_۱,b_۲,b_۳$ همان اعداد ولی با ترتیب دیگر باشند، حاصل $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است» به روش برهان خلف، فرض خلف کدام گزینه است؟

(۱) حاصل $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی فرد نیست.
(۲) $a_۱,a_۲,a_۳$ اعداد صحیح نیستند.
(۳) حاصل $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج نیست.
(۴) $a_۱=b_۱,a_۲=b_۲,a_۳=b_۳$ است.

۵۰. اگر A و B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند، کدام دو گزارهٔ زیر هم‌ارز هستند؟

(۱) $A\cap C=B\cap C, A=B$
(۲) $B\subseteq A, B-A=\varnothing$
(۳) $A-C=B-C, A=B$
(۴) $A\subseteq B, A\cap B=B$

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۱ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{x+۱}>۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
		$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۴$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \frac{-x-۶}{x+۱}<۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

$$\Rightarrow x<-۶ \text{ یا } x>-۱$$

$$\Rightarrow x<-۶ \quad \text{یا} \quad x>-۱ \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x>۴$ یا $x<-۶$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

۲. گزینه ۳

$$\frac{۱}{۲}x+۲\leq ۳(x-۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}x+۲\leq ۳x-۳$$

$$\Rightarrow ۳x-۳-\frac{۱}{۲}x-۲\geq ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x-۵\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$$

پس تابع f در بازهٔ $[۲,+\infty)$ و هر زیرمجموعه آن بالاتر از خط $y=۳x-۳$ قرار نمی‌گیرد، در نتیجه $x_{\circ}\geq ۲$ و داریم:

$$f(x_{\circ})=\frac{۱}{۲}x_{\circ}+۲\geq \frac{۱}{۲}(۲)+۲=۳ \Rightarrow f(x_{\circ})\geq ۳$$

۳. گزینه ۴ چون می‌خواهیم ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر باشد، پس خواهیم داشت:

$$h>۱۳ \Rightarrow -۵t^{۲}+۱۸t+۱۳>۱۳ \Rightarrow -۵t^{۲}+۱۸t>۰ \Rightarrow t(-۵t+۱۸)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<t<\frac{۱۸}{۵} \Rightarrow ۰<t<۳/۶$$

۴. گزینه ۲ برای این‌که عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب $x^{۲}$ منفی و Δ هم منفی باشد. پس:

$$۶m<۰ \Rightarrow m<۰$$

$$\Delta=۴+۲۴m<۰ \Rightarrow ۲۴m<-۴ \Rightarrow m<-\frac{۱}{۶}$$

بنابراین به‌ازای $m<-\frac{۱}{۶}$ عبارت موردنظر همواره منفی است.

۵. گزینه ۳

$$(x+۳y^{۲})^{۲}-(x-۳y^{۲})^{۲}$$

ابتدا با اتحاد مربع دو جمله‌ای دو پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$(x^{۲}+۶xy^{۲}+۹y^{۴})-(x^{۲}-۶xy^{۲}+۹y^{۴})=۶xy^{۲}+۶xy^{۲}=۱۲xy^{۲}$$

با توجه به متن سؤال $xy^{۲}=\frac{۴}{۳}$ است، بنابراین داریم:

$$۱۲xy^{۲}=۱۲(\frac{۴}{۳})=۱۶$$

۶. گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$

$$A=\sqrt[۵]{۲^{۲}\times\sqrt[۳]{۲^{۴}}}\times(۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^{۲}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$A=۲^{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}=۲^{۲}$$

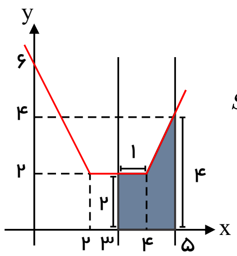
$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=(۲\times ۲^{۲})^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{۳\times(-\frac{۱}{۳})}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۷ . گزینه ۲

نمودار تابع $f(x)$ و دو خط $x=3$ و $x=5$ به صورت زیر می‌باشد:

در نتیجه مساحت خواسته شده برابر مجموع مساحت ذوزنقه و مستطیل است. لذا داریم:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(2+4)\times 1}{2} = 3\ ,\ S_{\text{مستطیل}} = 1\times 2 = 2 \xrightarrow{\text{جمع}} 3+2=5$$ واحد سطح



۸ . گزینه ۴

چون مجموع دو قدرمطلق است که ضرایب xها برابرند پس یک تابع گلدانی است.

$$y=|2x+1|+|2x+k| \Rightarrow y = 2\left(\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x+\frac{k}{2}\right|\right)$$

$x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن است و a و b ریشه های عبارت داخل قدر مطلق می‌باشند، لذا $a=-\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{k}{2}$ بوده در نتیجه داریم:

$$-2 = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{k}{2} = -4 \Rightarrow k=7$$

۹ . گزینه ۳ برای آن که تعداد ضربان‌ها بیشتر از ۱۱۰ باشد، باید نوشت.

$$y>110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2-30x+200>110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2-30x+90>0 \xrightarrow{\times\frac{8}{15}} x^2-16x+48>0$$

حال برای اینکه نامعادله اخیر را حل کنیم ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $x^2-16x+48=0$، یعنی ۴ و ۱۲ را به‌دست آورده و از جدول زیر کمک می‌گیریم:

x		۴		۱۲	
$x^2-16x+48$	+	۰	−	۰	+

پس برای $x>12$، عبارت مثبت بوده، یعنی بعد از ۱۲ دقیقه کار سنگین ضربان قلب بیش از ۱۱۰ خواهد بود.

۱۰ . گزینه ۴ چون x عددی منفی است پس $\sqrt{x}$ که معنی ندارد پس گزینهٔ ۳ حذف x^2 نیز عددی مثبت است. از آن‌جا که y عددی منفی است. پس گزینهٔ (۱) نیز حذف است.

از طرفی می‌دانستیم اگر عددی بین -1 و صفر باشد با به توان نود رسیدن بزرگتر شده و به صفر نزدیکتر می‌شود پس y حتما $\sqrt[3]{x}$ است.

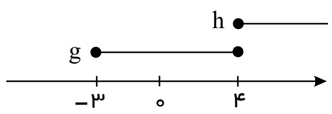
۱۱ . گزینه ۲ دامنهٔ تابع $f=g+h$ برابر است با $D_f=D_g\cap D_h$.

$$g(-x)=\sqrt{-x^2+x+12} \Rightarrow D_g: -x^2+x+12\ge 0 \Rightarrow -3\le x\le 4$$

$$h(x)=\sqrt{a^2x-a} \Rightarrow D_h: a^2x-a\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{1}{a}$$

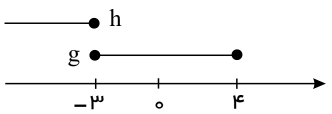
دامنهٔ h به‌صورت یک عبارت درجهٔ اول است بنابراین برای این که اشتراک دامنه‌های g و h تک عضوی باشد باید دامنهٔ h به صورت زیر باشد:

$1)D_h=[4,+\infty)$



$$\Rightarrow x=4 \Rightarrow 4a^2-a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \times \\ a=\frac{1}{4} & \checkmark \end{cases}$$

$2)D_h=(-\infty,-3]$



$$\Rightarrow x=-3 \Rightarrow -3a^2-a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \times \\ a=-\frac{1}{3} & \times \end{cases}$$

که حالت دوم غیرممکن است زیرا دامنهٔ x به صورت $x\ge\frac{1}{a}$ است. در نتیجه $a=\frac{1}{4}$.

۱۲ . گزینه ۲ ابتدا اعضای مجموعهٔ A را به صورت بازه می‌نویسیم:

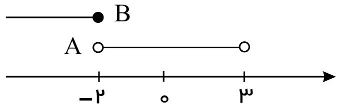
$$-2<1-x<3 \Rightarrow -3<x-1<2 \Rightarrow -2<x<3$$

حال اعضای مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$$|ax+2|<1 \Rightarrow -1<ax+2<1 \Rightarrow -3<ax<-1 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow -\frac{3}{a}<x<-\frac{1}{a} & (1)\\ a<0 \Rightarrow -\frac{1}{a}<x<-\frac{3}{a} & (2)\end{cases}$$

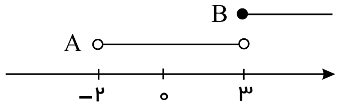
در حالت (۱) برای این که مجموعهٔ A و B نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند باید :

$$-\frac{۱}{a} \leq -۲ \Rightarrow a \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < a \leq \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$



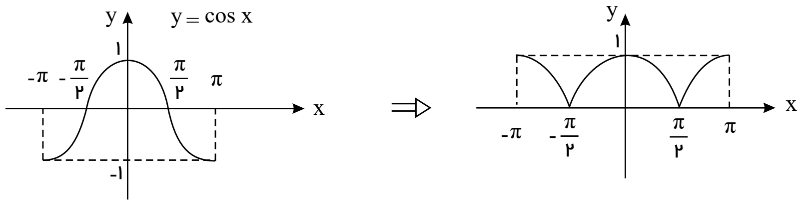
در حالت (۲) برای این که دو مجموعه اشتراک نداشته باشند، باید:

$$-\frac{۱}{a} \geq ۳ \Rightarrow -a \leq \frac{۱}{۳} \Rightarrow a \geq -\frac{۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \leq a < ۰ \quad (۲)$$



$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} [-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}] - \{۰\}$$

۱۳ . گزینه ۴



۱۴ . گزینه ۴ ابتدا عبارت قدر مطلقی را تعیین علامت نموده و بصورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x$$

اعداد $x = ۳$ و $x = -۴$ ریشه‌های قدر مطلق هستند بنابراین داریم:

$x > ۳ \rightarrow y = ۲x - ۶ - x - ۴ + x = ۲x - ۱۰ \rightarrow$ صعودی اکید
$-۴ \leq x \leq ۳ \rightarrow y = -۲x + ۶ - x - ۴ + x = -۲x + ۲ \rightarrow$ نزولی اکید
$x < -۴ \rightarrow y = -۲x + ۶ + x + ۴ + x = ۱۰ \rightarrow$ ثابت

تابع در بازه $(-۴, ۳)$ تابع نزولی اکید است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم.

$$y = -۲x + ۲ \rightarrow y - ۲ = -۲x \rightarrow \frac{y - ۲}{-۲} = x \Rightarrow \frac{x - ۲}{-۲} = y \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ - \frac{x}{۲}$$

برای محاسبه‌ی دامنه تابع $f^{-۱}$ برد تابع $f(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y = -۲x + ۲ \\ -۴ \leq x \leq ۳ \end{cases} \rightarrow -۶ \leq -۲x \leq ۸ \xrightarrow{+۲} -۴ \leq -۲x + ۲ \leq ۱۰ \Rightarrow R_f = D_{f^{-۱}} = [-۴, ۱۰]$$

۱۵ . گزینه ۲

برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع $y = \sqrt[۲n]{f}$ با $f \geq ۰$ قرار دهیم:

$$x - \frac{۱}{۳} = U$$

$$y = \sqrt{[U] + [-U]}$$

$$[U] + [-U] = \begin{cases} ۰ & U \in \mathbb{Z} \\ -۱ & U \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow U \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - \frac{۱}{۳} = k \Rightarrow x = k + \frac{۱}{۳}$$

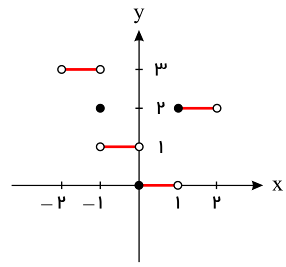
۱۶ . گزینه ۴

شرط اینکه تابع $y = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد، $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ است.

$$x^۲ + ۳ > ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۳ > ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۱۲ < ۰$$

از آنجا که درعبارت $x^۲ - ۲x + ۳$, $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، لذا نامساوی همواره به ازای تمام مقادیر x برقرار است.

۱۷ . گزینه ۴ کافی است برای رسم $f(x)$عبارت را بازه‌بندی کنیم و خواهیم داشت:



$-۲ < x < -۱ \to f(x) = ۲ + ۱ = ۳$

$-۱ < x < ۰ \to f(x) = ۱ + ۰ = ۱$

$۰ < x < ۱ \to f(x) = ۰ + ۰ = ۰$

$۱ < x < ۲ \to f(x) = ۱ + ۱ = ۲$

$f(-۱) = f(۱) = ۲ \quad , \quad f(۰) = ۰$

۱۸ . گزینه ۱

با جای‌گذاری $x = \frac{۱}{۳}$ در عبارت بالا داریم:

$$|[۱] - |[\frac{-۴}{۳}]|| = |۱ - | - ۲| = |۱ - ۲| = ۱$$

۱۹ . گزینه ۲

$|\frac{۲x-۱}{۳}| < ۳ \Rightarrow -۳ < \frac{۲x-۱}{۳} < ۳ \Rightarrow -۹ < ۲x - ۱ < ۹ \Rightarrow -۸ < ۲x < ۱۰ \Rightarrow -۴ < x < ۵ \ (۱)$ <="" span="">

$$|\frac{۲x-۱}{۳}| > ۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x-۱}{۳} > ۲ \Rightarrow ۲x > ۷ \Rightarrow x > \frac{۷}{۲} \ (۲) \\ \frac{۲x-۱}{۳} < -۲ \Rightarrow ۲x < -۵ \Rightarrow x < -\frac{۵}{۲} \ (۳) \end{cases}$$

$$(۱) \cap ((۲) \cup (۳)) \Rightarrow x \in (\frac{۷}{۲}, ۵) \cup (-۴, -\frac{۵}{۲})$$

.بنابراین اعداد صحیح ۴ و ۳− تنها اعداد صحیحی هستند که در مجموعه جواب‌های نامعادله هستند

۲۰ . گزینه ۴ با تجزیه صورت و مخرج کسر داده شده، نامعادلهٔ $p < ۰$ را حل می‌کنیم.

$$p = \frac{x(x^۲ - ۱۰x + ۲۵)}{-(x^۲ + ۲x - ۳)} < ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۵)^۲}{-(x-۱)(x+۳)} < ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{x(x-۵)^۲}{(x-۱)(x+۳)} > ۰$$

توجه کنید که عبارت $(x-۵)^۲$ همواره نامنفی است.

$$\text{ریشه‌ها} \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۵ \\ x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۳		۰		۱		۵	$+\infty$
x	−		−	۰	+		+		+
$(x-۵)^۲$	+		+		+		+	۰	+
$(x-۱)(x+۳)$	+	۰	−		−	۰	+		+
P	−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	۰	+

در بازهٔ (a, b) چون $a < ۰$، پس این بازه همان بازهٔ $(-۳, ۰)$ است.

$$a = -۳, b = ۰ \Rightarrow b - a = ۰ - (-۳) = ۳$$

۲۱ . گزینه ۱ ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \overline{O}$$

$$(I + A)^۲ = I + ۲A + A^۲ \stackrel{A^۲ = \overline{O}}{=\!=\!=} I + ۲A$$

$$A(I + A)^۲ = A(I + ۲A) = A + ۲A^۲ \stackrel{A^۲ = \overline{O}}{=\!=\!=} A$$

تذکر: چون $AI = IA$ می‌باشد، برای $(I + A)^۲$ از اتحاد استفاده کرده‌ایم.

۲۲ . گزینه ۴ ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ - \sqrt{۲} \\ ۱ + \sqrt{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ - \sqrt{۲} \\ ۱ + \sqrt{۲} & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{۹۹} = (A^۲)^{۴۹} \times A = (-I)^{۴۹} \times A = -I \times A = -A$$

۲۳ . گزینه ۱ دترمینان موردنظر را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$+x(۲ + ۱) + ۱(-۳x + ۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow ۳x - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow -۱ = ۰$$

معادله جواب ندارد.

۲۴ . گزینه ۳ ابتدا ماتریس $۲A - B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$۲A - B = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$(۲A - B) \times B = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = -۴ + ۲ + ۲ + ۴ = ۴$$

۲۵ . گزینه ۱ ماتریس A را ساخته و دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$A = \left[i^۲ - j\right]_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۲-۳ \\ ۳^۲-۱ & ۳^۲-۲ & ۳^۲-۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}} |A| = -(-۱)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۸ & ۶ \end{vmatrix}}_{۱۰} + (-۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & ۷ \end{vmatrix}}_{۵}$$

$$|A| = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

۲۶ . گزینه ۲ مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = ۴ \end{cases} \to \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ۲ \end{bmatrix} \to \begin{cases} ۳m - ۴ = x \\ ۲m = ۲ \to m = ۱ \end{cases}$$

$$\to ۳(۱) - ۴ = x \to x = -۱$$

۲۷ . گزینه ۲ شرط آنکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد عبارتست از:

$$|A| = ۰ \to \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & a \end{vmatrix} = ۰ \to a = ۴$$

$$\to B = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \to B^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۳ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$\to \text{مجموع درایه‌ها} = -۲ + ۵ - ۷ + ۳ = -۱$$

۲۸ . گزینه ۲ واضح است که بایستی A مرتبه ۳×۱ باشد تا ضرب، قابل تعریف باشد؛ فرض کنیم $A = [x \quad y \quad z]$:

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۱} \times [x \quad y \quad z]_{۱\times۳} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \\ ۲x & ۲y & ۲z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \\ z = ۳ \\ a = x = ۱, b = y = ۲, c = z = ۳ \\ d = ۲x = ۲, e = ۲y = ۴, f = ۲z = ۶ \end{cases}$$

درنتیجه:

$$\text{مجموع درایه‌های } A : x + y + z = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

۲۹ . گزینه ۳ برای آنکه محاسبات ساده‌تری داشته باشیم اعداد $x = -۱$ و $y = ۲$، $z = ۳$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت گزینهٔ «۱» برابر ۴ و گزینهٔ «۲» برابر صفر، گزینهٔ «۳» برابر ۱۲ و گزینهٔ «۴» برابر ۲۴− می‌شود.

حال حاصل دترمینان را با این عددگذاری به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ x+y & y+z & z \\ x^۲+y^۲ & y^۲+z^۲ & z^۲ \end{vmatrix} \xrightarrow[z=۳]{x=-۱, y=۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۵ & ۱۳ & ۹ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط نسبت به}} ۲(-۱)^۲\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱۳ & ۹ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^۳\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۵ & ۹ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۵ & ۱۳ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۴۵ - ۳۹) - ۲(۹ - ۱۵) + ۱(۱۳ - ۲۵) = ۱۲ + ۱۲ - ۱۲ = ۱۲$$

این مقدار با مقدار گزینهٔ «۳» برابر است.

۳۰ . گزینه ۲ دستگاه را به‌صورت تساوی ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ax + by = -۱ \\ cx + dy = -۲ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{در } A^{-۱} \text{ از سمت چپ ضرب می‌کنیم.}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

با توجه به فرض سؤال $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$، پس داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x = -۱, y = ۱$$

از طرف دیگر وارون A^{-1} را به‌دست می‌آوریم تا به ماتریس A برسیم:

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ -۳ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ c=۳\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$ax+cy=۲(-۱)+۳(۱)=۱$$

۳۱. گزینه ۱ **درایه‌های دو ماتریس A و B را نظیر به نظیر با هم برابر قرار می‌دهیم:**

$$\left.\begin{array}{l}B=\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳}\\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۴ & ۵\\ ۵ & ۷ & ۹\end{bmatrix}\\ A=\begin{bmatrix}k & ۱ & ۱\\ ۳ & m+۲ & ۵\\ ۵ & ۷ & n+۵\end{bmatrix}\end{array}\right\}\xrightarrow{A=B}\begin{cases}k=۱\\ m+۲=۴\rightarrow m=۲\\ n+۵=۹\rightarrow n=۴\end{cases}\rightarrow m+n-k=۲+۴-۱=۵$$

۳۲. گزینه ۴ **ابتدا با توجه به فرض داریم:**

$$\tan ۲\alpha=۵\rightarrow\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=۵\rightarrow\sin ۲\alpha=۵\cos ۲\alpha$$

دترمینان ماتریس موردنظر را نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha+\cos\alpha & ۰ & ۲\cos\alpha\\ ۰ & -۳ & ۰\\ -\sin\alpha & ۰ & \sin\alpha-\cos\alpha\end{vmatrix}=-۳\begin{vmatrix}\sin\alpha+\cos\alpha & ۲\cos\alpha\\ -\sin\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha\end{vmatrix}=-۳((\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha)-(-۲\sin\alpha\cos\alpha))$$
$$=-۳(-\cos ۲\alpha+\underbrace{\sin ۲\alpha}_{۵\cos ۲\alpha})=-۱۲\cos ۲\alpha$$

۳۳. گزینه ۳ **ماتریس اسکالر A را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:**

$$A=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & x & ۰ & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & x\end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\text{عدد گویا است } x:\begin{cases}x^n=۶۴\xrightarrow{\text{گویا } x}\text{طبیعی است}x\\ nx=۱۲\end{cases}\Rightarrow(x=۴,n=۳)\text{ یا }(x=۲,n=۶)$$

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

۳۴. گزینه ۲ **اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ آنگاه:**

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}\Rightarrow A+A^{-۱}=I\Rightarrow\begin{bmatrix}a+\frac{d}{ad-bc} & b-\frac{b}{ad-bc}\\ c-\frac{c}{ad-bc} & d+\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow b(۱-\frac{۱}{ad-bc})=۰\xrightarrow{b\neq ۰}ad-bc=۱\Rightarrow a+\frac{d}{ad-bc}=۱$$
$$\Rightarrow a+d=۱$$

۳۵. گزینه ۲ **می‌دانیم $AA^{-۱}=I$ است و با استفاده از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال خواهیم داشت:**

$$|A^{-۱}-۴I|=|I-۱۶A^۲|\Rightarrow|A^{-۱}-۴A^{-۱}A|=|(I-۴A)(I+۴A)|\Rightarrow|A^{-۱}(I-۴A)|=|I-۴A||I+۴A|$$
$$\xrightarrow{I-۴A\text{ وارون‌پذیر است، درنتیجه دترمینان آن مخالف صفر است طرفین را بر }|I-۴A|\text{ تقسیم می‌کنیم}}|A^{-۱}|=|I+۴A|=|AA^{-۱}+۴A|$$
$$=|A(A^{-۱}+۴I)|=|A||A^{-۱}+۴I|\xrightarrow[|A^{-۱}|=\frac{۱}{۳}]{|A|=۳}\frac{۱}{۳}=۳|A^{-۱}+۴I|\Rightarrow|A^{-۱}+۴I|=\frac{۱}{۹}$$

۳۶. گزینه ۲ **می‌دانیم اگر $a\,|\,b$، آنگاه $|a|\leq|b|$ مگر آنکه $b=۰$ بنابراین داریم:**

$$y^۲+z^۲+w^۲=۰\Rightarrow y=w=z=۰$$

۳۷. گزینه ۱

$$\begin{cases}a+b\,|\,b\\ a+b\,|\,a+b\end{cases}\Rightarrow a+b\,|\,a$$

$$\begin{cases}a+b\,|\,a\\ a+b\,|\,b\end{cases}\Rightarrow a+b\,|\,a-b$$

اعداد $a=۲$ و $b=-۳$ مثال نقضی برای ۳ گزینهٔ دیگر هستند.

۳۸. گزینه ۴ **چون رابطه به‌ازای هر n برقرار است پس باید $m^۲-۵m+۵=\pm۱$ داریم:**

$$\begin{cases}۱)\ m^۲-۵m+۵=۱\Rightarrow m^۲-۵m+۴=۰\Rightarrow m=۱\ \text{ یا }\ m=۴\\ ۲)\ m^۲-۵m+۵=-۱\Rightarrow m^۲-۵m+۶=۰\Rightarrow m=۲\ \text{ یا }\ m=۳\end{cases}$$

۳۹. گزینه ۲ **برای اینکه y صحیح باشد، باید $n+۱\,|\,n^۲+۴$:**

$$\left.\begin{array}{l} n+1|n^2+4 \\ n+1|n+1 \Rightarrow n+1|(n+1)(n-1)=n^2-1\end{array}\right\} \to n+1|(n^2+4)-(n^2-1) \to n+1|5$$

$$\to n+1\in\{-5,-1,1,5\} \xrightarrow{-1} n\in\{-6,-2,0,4\}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار n عدد ۴ است.

۴۰ . گزینه ۳ $21 \mid d$ نتیجه می‌دهد $d=21k$ پس باید مضاربی از ۲۱ بیابیم که ۳۱۵ را عاد می‌کنند:

$$21k|315 \Rightarrow k \mid 15 \Rightarrow k\in\{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow d\in\{21, 63, 105, 315\}$$

۴۱ . گزینه ۴ باید به دنبال گزینه‌ای باشیم که مجموع ارقامش بر ۴ بخش‌پذیر نیست، ولی خود عدد مضرب ۴ است. در بین گزینه‌ها تنها ۹۳۶ دارای این ویژگی است.

۴۲ . گزینه ۴ کافی است n را $5k$، $5k+1$، $5k+2$، $5k+3$ و $5k+4$ در نظر گرفته و مسأله را حل کنید.

۴۳ . گزینه ۳

عدد !۱۴ بر اعداد ۳، ۸، ۹ و ۱۲ بخش‌پذیر است، بنابراین کافی است بخش‌پذیری عدد ۲۴ را بر این اعداد بررسی کنیم که در میان گزینه‌ها، عدد ۲۴ تنها بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۴۴ . گزینه ۴

$$3xy-2y-10x+2=0 \Rightarrow 3xy-2y=10x-2 \Rightarrow y(3x-2)=10x-2$$

$$\Rightarrow y=\frac{10x-2}{3x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x-2|10x-2 \xrightarrow{\times 3} 3x-2|30x-6 \\ 3x-2|3x-2 \xrightarrow{\times 10} 3x-2|30x-20\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3x-2|14$$

$$\Rightarrow 3x-2=\pm1,\pm2,\pm7,\pm14 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=1 \Rightarrow x=1, y=8 & 3x-2=7 \Rightarrow x=3, y=14 \\ 3x-2=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} & 3x-2=-7 \Rightarrow x=\frac{-5}{3} \\ 3x-2=2 \Rightarrow x=\frac{4}{3} & 3x-2=14 \Rightarrow x=\frac{16}{3} \\ 3x-2=-2 \Rightarrow x=0, y=1 & 3x-2=-14 \Rightarrow x=-4, y=3 \end{cases}$$

هیچ‌کدام از مقادیر صحیح و فرد نبودند.

۴۵ . گزینه ۲ الف) اگر $a=b$ می‌توان نتیجه گرفت $a^3=b^3$ و برعکس اگر $a^3=b^3$ می‌توان گفت $a=b$.

ب) اگر $a=b$ می‌توان ادعا کرد $a^2=b^2$ ولی برعکس خیر! مثلاً $2^2=(-2)^2$ ولی $2\neq -2$.

پ) اگر $a<b$ نمی‌توان ادعا کرد $a^2<b^2$ مثلاً $-3<2$ ولی $(-3)^2 \not< 2^2$.

ت) اگر $a<b$ نمی‌توان ادعا کرد $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ مثلاً $-3<2$ ولی $\frac{1}{-3} \not> \frac{1}{2}$.

پس فقط رابطهٔ الف صحیح است.

۴۶ . گزینه ۲

$$x^2+5y^2 \ge 3(x+y+xy-3) \Leftrightarrow x^2+5y^2 \ge 3x+3y+3xy-9$$

$$\Leftrightarrow x^2+5y^2-3x-3y-3xy+9 \ge 0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+10y^2-6x-6y-6xy+18 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(9y^2-6xy+x^2)+(y^2-6y+9) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(3y-x)^2+(y-3)^2 \ge \quad \text{همواره درست}$$

۴۷ . گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} b^2|ac \xrightarrow{\times b} b^3|abc \\ bc|a^2 \xrightarrow{\times a} abc|a^3\end{array}\right\} \to b^3|a^3 \xrightarrow{\text{سمت راست در } a^2 \text{ ضرب شود}} b^3|a^5$$

مثال نقض گزینه «۱»: $a=4, b=1, c=16$

مثال نقض گزینه «۲» و «۳»: $a=4, b=2, c=2$

۴۸ . گزینه ۲

$$[n, 3\times 5]=3^2\times 5$$

می‌دانیم برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر در هم ضرب می‌شوند حالا با توجه به این که ک.م.م دو عدد برابر ۴۵ شد، پس n باید حتماً 3^2 داشته باشد، اما می تواند عامل ۵ داشته باشد یا نداشته باشد. بنابراین:

$n=9$ یا $n=45$

دقت کنید n نمی‌تواند عوامل دیگری مثل ۲ و ۷ و ... داشته باشد چون در آن صورت این عددها در ک.م.م هم می‌آید.

۴۹ . گزینه ۳ فرض خلف نقیض گزاره‌ای است که قرار است درستی آن اثبات شود.

بنابراین فرض خلف گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

حاصل $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ عددی زوج نیست.

۵۰ . گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اگر $A \cap C = B \cap C$ باشد، آنگاه لزوماً دو مجموعهٔ A و B برابر نیستند. به‌عنوان مثال نقض فرض کنید $A = \{۱,۲\}$ ، $B = \{۱,۳\}$ و $C = \{۱\}$ باشد. در این صورت $A \cap C = B \cap C = \{۱\}$ ولی $A \neq B$.

گزینهٔ «۲»: اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $B - A = \varnothing$ و بالعکس اگر $B - A = \varnothing$ باشد، آن‌گاه $B \subseteq A$ است، پس این دو گزاره هم‌ارز هستند.

گزینهٔ «۳»: اگر $A - C = B - C$ باشد، آنگاه لزوماً دو مجموعهٔ A و B برابر نیستند، به‌عنوان مثال نقض فرض کنید $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{۲,۳\}$ و $C = \{۱,۳\}$ باشد، در این صورت $A - C = B - C = \{۲\}$ ولی $A \neq B$.

گزینهٔ «۴»: اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $A \cap B = A$ است.

پاسخنامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۱	۹	۳	۱۷	۴	۲۵	۱	۳۳	۳	۴۱	۴	۴۹	۳
۲	۳	۱۰	۴	۱۸	۱	۲۶	۲	۳۴	۲	۴۲	۴	۵۰	۲
۳	۴	۱۱	۲	۱۹	۲	۲۷	۲	۳۵	۲	۴۳	۳		
۴	۲	۱۲	۲	۲۰	۴	۲۸	۲	۳۶	۲	۴۴	۴		
۵	۳	۱۳	۴	۲۱	۱	۲۹	۳	۳۷	۱	۴۵	۲		
۶	۲	۱۴	۴	۲۲	۴	۳۰	۲	۳۸	۴	۴۶	۲		
۷	۲	۱۵	۲	۲۳	۱	۳۱	۱	۳۹	۲	۴۷	۴		
۸	۴	۱۶	۴	۲۴	۳	۳۲	۴	۴۰	۳	۴۸	۲		

آموزشگاه آلاء