آموزشگاه آلاء

ریاضی رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۲

۸۰ دقیقه

بنام خدا

حسابان ۲ و کنکور پایه

۱. سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۲. اگر $۴ = (۵x - \frac{۳}{۲x})$ باشد، حاصل $(۲۵x^{۲} + \frac{۹}{۴x^{۲}})$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

۳. معادلهٔ $\frac{x+t-۱}{x} = \frac{tx+۲}{-۲}$ فقط یک ریشه به ازای x دارد. مجموعهٔ مقادیر t کدام است؟ $(t \neq ۰)$

۱) $\{۲, -۱\}$ ۲) $\{-۲, ۱\}$ ۳) $\{-۱, ۱\}$ ۴) $\{-۱, ۱, ۲\}$

۴. در معادلهٔ $\frac{x+۱}{۲x-۴} = \frac{۲x-۴}{x+۱}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵. حاصل عبارت $۲x + \frac{x-۲}{۲x+۲} - \frac{۳x(۲x^{۲}-۱)}{۲x+۲}$، با شرط $x \neq -۱$، برابر کدام سه جمله‌ای است؟

۱) $۳x^{۲} - x + ۱$ ۲) $۳x^{۲} + x - ۱$ ۳) $۳x^{۲} - ۲x + ۱$ ۴) $۳x^{۲} + ۲x - ۱$

۶. حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۳} + ۲ = \frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}-۶x+۹}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۸ ۴) ۸

۷. حاصل عبارت $\frac{۲}{x^{۲}} - (\frac{۲}{x^{۲}-۱} + ۱)(۱ - \frac{۲}{x^{۴}+x^{۲}})$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x^{۲}}$ ۲) ۱ ۳) $۱ + \frac{۱}{x^{۲}}$ ۴) صفر

۸. در تجزیه‌ی عبارت $۴x^{۳} - ۶x^{۲} + ۲x$، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

۱) $۲x + ۱$ ۲) $۲x - ۱$ ۳) $x + ۱$ ۴) $x + ۲$

۹. حاصل عبارت $\left|\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۲} - \right|$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲} - \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۵}$ ۲) $-\sqrt[۳]{۲} - \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۵}$ ۳) $-\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۵}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲} - \sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۵}$

۱۰. اگر معادلهٔ $\frac{mx+n}{۴x^{۲}-۱} = \frac{x+۱}{۲x-۱} + \frac{۴-x}{۲x+۱}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۱۱. ساده شده‌ی عبارت $(۲ - \frac{۴x-۳}{x}) \div \frac{۴x^{۲}-۱۲x+۹}{۴x-۶}$، کدام است؟

۱) $-\frac{x}{۲}$ ۲) $\frac{x}{۲}$ ۳) $\frac{-۱}{۲x}$ ۴) $\frac{۲x-۳}{x}$

۱۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x-۱| < \sqrt{x+۱}$ به‌صورت $[a,b) \cup (c,+\infty)$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $-\infty$ ۴) ۴

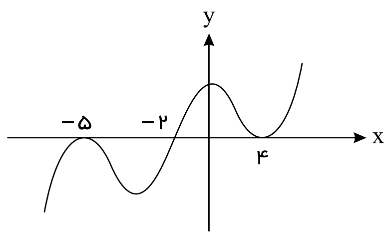
۱۳. اگر $\sqrt{x-۴} + \sqrt{x+۲} = ۳$ باشد، حاصل $\sqrt{x-۴} - \sqrt{x+۲}$ ۲ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴٫۵

۱۴. تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y = \frac{۱۵}{۸}x^{۲} - ۳۰x + ۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

۱) پس از ۴ دقیقه ۲) پس از ۸ دقیقه ۳) پس از ۱۲ دقیقه ۴) پس از ۱۶ دقیقه

۱۵. نمودار تابع f به‌صورت زیر است. اگر نمودار تابع $g(x) = \frac{f(x+۱)}{x}$ در بازهٔ (a,b) پایین محور xها قرار گیرد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۵

۱۶. اگر $a > ۰ > b$ باشد، حاصل $|a-b| + |a+۱| - |۱-b|$ چقدر است؟

۱) $۲a$ ۲) $۲b$ ۳) $۲a+۲b$ ۴) $۲a+۲b+۲$

۱۷. اگر $x = ۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{ax-۱}{x^{۳}-x} = \frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱} + \frac{۱}{x^{۲}+x}$ باشد، حاصل‌جمع تمام ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۸. حاصل عبارت $B = (x^{۲}-۴)(x^{۲}+۲x+۴)(x^{۲}-۲x+۴)$ به ازای $x = \sqrt[۳]{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۶۴ ۳) ۴۹ ۴) ۳۶

۱۹. سادهٔ شدهٔ $A = \sqrt{۵-۲\sqrt{۶}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$ ۲) $۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۰. به ازای کدام مقدار a، تساوی $\frac{۱}{x^{۲}} + \frac{a}{x} = \frac{۲}{x+۱} + \frac{۳x+۱}{x^{۲}(x+۱)}$ برقرار است؟ $(x \neq ۰ \ , \ -۱)$

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

هندسه ۳

۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $۲C + ۵A - ۲B$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۲

۲۲. اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشد طوری که $B^{۳} = I$ و $AB = B^{۲}A$، حاصل ماتریس $(AB^{۲})^{۲}$ کدام است؟

۱) A ۲) $A^{۲}$ ۳) B ۴) I

۲۳. مجموع درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times۳}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ,j \geq i \\ j-۲i & ,j < i \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۲۴. اگر $۳A + ۲B = I$ و $A - B = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱۰ & ۷ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۲}+AB+BA+B^{۲}$ کدام است؟

۱) $-۴I$ ۲) $۴I$ ۳) $۲I$ ۴) $-۲I$

۲۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} a^{۲}-۳ai+۲i^{۲} & : \quad i<j \\ a^{۲}-۳aj+۲j^{۲} & : \quad i\geq j \end{cases}$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار a ماتریس A یک ماتریس قطری است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۷. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌ازای کدام تعریف برای a_{ij}، یک ماتریس قطری است؟ ([ ] نماد جز صحیح است.)

۱) $a_{ij}=\left[\frac{i+j}{۳}\right]-۱$ ۲) $a_{ij}=\left[\frac{i-j}{۳}\right]-۱$ ۳) $a_{ij}=\left[\frac{i-j}{۳}\right]+۱$ ۴) $a_{ij}=\left[\frac{i+j}{۳}\right]+۱$

۲۸. اگر در ماتریس $A=[۲i+j]_{n\times n}$ مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۶۰ باشد، مجموع درایه‌های سطر چهارم کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۵ ۳) ۶۱ ۴) ۶۹

۲۹. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۱ & y^{۲} \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -x & y+۱ \\ x & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B+C=۲A$ با شرط $\begin{cases} c_{۲۱}=۲c_{۳۲} \\ c_{۱۱}=-c_{۲۲} \end{cases}$ مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

۳۰. اگر $A=[(-۱)^{i}j+i]_{۲\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} a & a-b \\ a+b & b \end{bmatrix}$ و $A+B$ ماتریس قطری باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۶ ۴) -۶

۳۱. اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & -۸ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، $B^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B-A=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱۰ & -۵ \\ ۸ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱۰ & -۵ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ -۸ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ -۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۳۲. اگر برای دو ماتریس مربعی A و B تساوی‌های $۳AB=-۴BA$ و $AB^{۳}=-mB^{۳}A$ برقرار باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۶۴}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $-\frac{۶۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۹}$

۳۳. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. اگر $(A+B)^{۲}=A+C$ باشد، آنگاه ماتریس C کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۶ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۳۴. چند ماتریس اسکالر مانند A وجود دارد به‌طوری که حاصل‌ضرب درایه‌های غیر صفر آن ۶۴ و مجموع تمام درایه‌های آن ۱۲ باشد؟

۱) چنین ماتریسی وجود ندارد. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۵. اگر $A=\begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به‌ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

ریاضیات

گسسته

۳۶. رابطهٔ $۲^n \leq n^۲$ چند مثال نقض دارد؟ $(n \in \mathbb{N})$

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بیشتر از ۴ تا

۳۷. کدام‌یک از گزینه‌های زیر به روش بازگشتی اثبات نمی‌شود؟

(۱) اگر a عددی گنگ باشد، آنگاه $\frac{۱}{a}$ عددی گنگ است.

(۲) اگر $a < ۰$ باشد، $a + \frac{۱}{a} \leq -۲$ است.

(۳) اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند که مجموع آنها نامنفی باشد، در این صورت $(\frac{a+b}{۲})^۲ \leq \frac{a^۲+b^۲}{۲}$

(۴) اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، $a^۲+b^۲+۱ \geq ab+a+b$

۳۸. کدام عدد کلیت حکم «معکوس هر عدد حقیقی، خود یک عدد حقیقی است» را نقض می‌کند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) ۱-

۳۹. کدام عدد حکم کلی «هر عدد طبیعی برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح است» را رد می‌کند؟

(۱) ۷۸ (۲) ۱۰۵ (۳) ۳۲ (۴) ۵۶

۴۰. کدام عدد کلیت حکم «به‌ازای هر عدد طبیعی n، $۲^n + ۱۱$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۵

۴۱. کدام گزینه حکم کلی «برای هر عدد حقیقی و نامنفی مانند x ، y، $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$» را نقض نمی‌کند؟

(۱) $x=۱, y=۳$ (۲) $x=۱۳, y=۰$ (۳) $x=۹, y=۱۶$ (۴) $x=۴, y=۴$

۴۲. کدام گزاره مثال نقض دارد؟

(۱) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.
(۲) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.
(۳) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
(۴) مجموع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۴۳. برای .... درستی گزارهٔ «$n^۲+۳n+۱۳$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول است.»، می‌توان از روش .... استفاده کرد.

(۱) اثبات - در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (۲) اثبات - برهان خلف (۳) رد - مثال نقض (۴) رد - برهان خلف

۴۴. اگر $x_۱, x_۲, x_۳, \cdots, x_n$ اعدادی صحیح و $y_۱, y_۲, y_۳ \cdots, y_n$ نیز همان اعداد ولی به‌ترتیبی دیگر باشند در این‌صورت، عبارت $(x_۱ - y_۱)(x_۲ - y_۲)\cdots(x_n - y_n)$ همواره .... و روش اثبات آن به کمک .... است. (n، عددی فرد است.)

(۱) فرد - برهان خلف
(۲) فرد - درنظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)
(۳) زوج - برهان خلف
(۴) زوج - در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

۴۵. کدام‌یک از گزاره‌های زیر را می‌توان با استفاده از مثال نقض رد کرد؟

(۱) هر چهارضلعی‌ای که قطرهایش همدیگر را نصف کنند متوازی‌الاضلاع است.
(۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.
(۳) هر عدد اول فردی به یکی از دو صورت $۲^n - ۱$ یا $۲^n + ۱$ است. $(n \in N)$
(۴) مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.

۴۶. درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

(۱) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی عدد وسطی است.
(۲) اگر $۳p + ۲$ اول باشد، p نیز اول است.
(۳) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای برابر ۱ دارد.
(۴) اگر x گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

۴۷. کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست نیست؟

(۱) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی و زوج متوالی باشد، آن‌گاه $n+۱$ مربع کامل است.

(۲) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی و فرد متوالی باشد، آن‌گاه $n+۱$ مربع کامل است.

(۳) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴n+۱$ مربع کامل است.

(۴) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۸n+۱$ مربع کامل است.

۴۸. چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) به ازای هر عدد طبیعی n، $۲^n-۱$ عددی اول است.

ب) اگر n عددی اول باشد، $۲^n+۱$ عددی اول است.

پ) اگر $۲^n+۱$ عددی اول باشد، آنگاه n اول است.

ت) اگر $۲^n+۱$ عددی اول باشد، آنگاه $n=۲^k$ است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۹. چه تعداد از عبارت‌های زیر مثال نقض دارد؟

الف) میانگین اعداد طبیعی ۱ تا n، برابر $\frac{n+۱}{۲}$ است.

ب) اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، آن‌گاه $\alpha-\beta$ نیز گویا است.

پ) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

ت) عدد $۲^{n^۲}+۱$ به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عددی اول است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۰. در یک مهمانی ۳۰ نفر شرکت کرده‌اند. دست‌کم دو تا از مهمان‌ها پسر هستند و می‌دانیم از هر سه نفری که انتخاب کنیم، لااقل یکی دختر است. با استفاده از برهان خُلف .... نتیجه گرفت که «فقط همین دو پسر در مهمانی حضور دارند» و نتیجهٔ به‌دست‌آمده درست ....

(۱) می‌توان – است (۲) می‌توان – نیست (۳) نمی‌توان – است (۴) نمی‌توان – نیست

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۳ می‌دانیم که $x=vt$ و از آنجا $t=\frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v درنظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100+v$ و در خلاف جهت حرکت آب $100-v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1=\frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2=\frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2-t_1=5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v)-1200(100-v)}{(100-v)(100+v)}=\frac{120000+1200v-120000+1200v}{10000-v^2}=5$$

$$\Rightarrow 2400v=5(10000-v^2) \Rightarrow 480v=10000-v^2$$

$$\Rightarrow v^2+480v-10000=(v-20)(v+500)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v=20 & \text{ق‌ق} \\ v=-500 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v=20$ برسید.

۲. گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

$$5x-\frac{3}{2x}=4 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} (5x-\frac{3}{2x})^2=(4)^2 \to (5x)^2-2(5x)(\frac{3}{2x})+(\frac{3}{2x})^2=16$$

$$\to 25x^2-15+\frac{9}{4x^2}=16 \to 25x^2+\frac{9}{4x^2}=16+15=31$$

۳. گزینه ۴

$$\frac{tx+2}{-2}=\frac{x+t-1}{x}\ ,\ x\neq 0 \Rightarrow x(tx+2)=-2(x+t-1)$$

$$\Rightarrow tx^2+2x=-2x-2t+2 \Rightarrow tx^2+4x+2t-2=0$$

برای این که معادلهٔ فوق فقط یک ریشه داشته باشد، دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱) معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta=0 \Rightarrow 16-4t(2t-2)=0 \overset{\div 4}{\Rightarrow} 4-t(2t-2)=0 \Rightarrow 4-2t^2+2t=0 \Rightarrow t^2-t-2=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1)=0 \Rightarrow t=2, t=-1$$

۲) معادله دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=0$ باشد که قابل قبول نیست.

$$tx^2+4x+2t-2=0 \xrightarrow{x=0} 0+0+2t-2=0 \Rightarrow t=1$$

پس مقادیر t عبارت‌اند از: $t=-1,1,2$

۴. گزینه ۴

در معادله‌ی درجه دو: $ax^2+bx+c=0$ مجموع ریشه‌ها برابر است با: $\frac{-b}{a}$.

$$\frac{2x-4}{x+1}=\frac{x+1}{2x-4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (2x-4)^2=(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2+16-16x=x^2+1+2x$$

$$3x^2+15-18x=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+5-6x=0$$

مجموع ریشه‌ها : $\frac{-b}{a}=-\frac{-6}{1}=6$

۵. گزینه ۱ روش اول:

$$\frac{3x(2x^2-1)}{2x+2}-\frac{x-2}{2x+2}+2x=\frac{3x(2x^2-1)-(x-2)+2x(2x+2)}{2x+2}$$

$$=\frac{6x^3-3x-x+2+4x^2+4x}{2x+2}=\frac{6x^3+4x^2+2}{2x+2}=\frac{2(3x^3+2x^2+1)}{2(x+1)}=\frac{3x^3+2x^2+1}{x+1}$$

حال با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$\frac{۳x^۳}{x}=۳x^۲ \quad , \quad ۳x^۲(x+۱)=۳x^۳+۳x^۲$$
$$\frac{-x^۲}{x}=-x \quad , \quad -x(x+۱)=-x^۲-x$$
$$\frac{x}{x}=۱ \quad , \quad ۱(x+۱)=x+۱$$

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۳+۲x^۲+۱ & x+۱ \\ \cline{2-2} -(۳x^۳+۳x^۲) & ۳x^۲-x+۱ \\ \hline \quad -x^۲+۱ & \\ \quad -(-x^۲-x) & \\ \hline \qquad x+۱ & \\ \qquad -(x+۱) & \\ \hline \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$\Rightarrow$ **حاصل عبارت** $=۳x^۲-x+۱$

روش دوم: عدد دلخواهی مانند $x=۲$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x=۲\rightarrow \frac{۶(۸-۱)}{۴+۲}-\frac{۰}{۶}+۴=\frac{۴۲}{۶}-۰+۴=۷+۴=۱۱$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر $x=۲$ را در آن قرار دهیم حاصل برابر ۱۱ می‌شود.

۶. گزینه ۴

$$\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲-۶x+۹}-\frac{x+۱}{x-۳}-۲=۰\Rightarrow \left(\frac{x+۱}{x-۳}\right)^۲-\left(\frac{x+۱}{x-۳}\right)-۲=۰$$
$$\frac{x+۱}{x-۳}=t\Rightarrow t^۲-t-۲=(t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۲,-۱$$
$$\begin{cases}\frac{x+۱}{x-۳}=۲\Rightarrow ۲x-۶=x+۱\Rightarrow x=۷\\ \frac{x+۱}{x-۳}=-۱\Rightarrow x+۱=-x+۳\Rightarrow x=۱\end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۷+۱=۸$$

۷. گزینه ۲

$$\left(۱-\frac{۲}{x^۴+x^۲}\right)\left(۱+\frac{۲}{x^۲-۱}\right)-\frac{۲}{x^۲}=\left(\frac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲(x^۲+۱)}\right)\left(\frac{x^۲-۱+۲}{x^۲-۱}\right)-\frac{۲}{x^۲}$$
$$=\left(\frac{(x^۲+۲)(x^۲-۱)}{x^۲(x^۲+۱)}\times\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\right)-\frac{۲}{x^۲}=\frac{x^۲+۲-۲}{x^۲}=\frac{x^۲}{x^۲}=۱$$

۸. گزینه ۲

$$۴x^۳-۶x^۲+۲x \xrightarrow[۲x]{\text{فاکتور از}} ۲x(۲x^۲-۳x+۱)$$

عبارت داخل پرانتز را از طریق روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A=۲x^۲-۳x+۱\xrightarrow{\times ۲}۲A=۴x^۲-۳(۲x)+۲\Rightarrow ۲A=(۲x-۱)(۲x-۲)$$
$$\Rightarrow ۲A=(۲x-۱)۲(x-۱)\rightarrow A=(۲x-۱)(x-۱)$$

پس عبارت تجزیه‌شده‌ی نهایی به‌صورت $۲x(۲x-۱)(x-۱)$ است، که مشاهده می‌شود عامل $۲x-۱$ در تجزیه‌ی عبارت وجود دارد.

۹. گزینه ۳ با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a-b=\frac{a^۳-b^۳}{a^۲+ab+b^۲}\rightarrow \sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}\ ,\ \sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰}+\sqrt[۳]{۱۶}}$$

از آنجا که $\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰}+\sqrt[۳]{۱۶}>\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}$ در نتیجه : $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰}+\sqrt[۳]{۱۶}}<\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}$

لذا $\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}>\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}$، در نتیجه $\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۴}>۰$. لذا عبارت داخل قدرمطلق مثبت بوده و حاصل آن برابر خودش است.

۱۰. گزینه ۳

$$\frac{۴-x}{۲x+۱}+\frac{x+۱}{۲x-۱}=\frac{mx+n}{۴x^۲-۱}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } (۲x-۱)(۲x+۱)]{\text{طرفین را در}}(۴-x)(۲x-۱)+(x+۱)(۲x+۱)=mx+n$$
$$\Rightarrow ۸x-۴-۲x^۲+x+۲x^۲+x+۲x+۱=mx+n\Rightarrow ۱۲x-۳=mx+n$$

شرط اینکه معادله دارای بی‌شمار جواب باشد این است که بدون توجه به مقدار x، تساوی همواره برقرار باشد و برای این منظور باید ضرایب جملات هم درجه در طرفین برابر باشند. (یعنی اصطلاحاً دو عبارت متحد باشند.)

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}m=۱۲\\ n=-۳\end{cases}\Rightarrow m+n=۹$$

۱۱ . گزینه ۱

$$\frac{۴x^۲-۱۲x+۹}{۴x-۶}=\frac{(۲x-۳)^۲}{۲(۲x-۳)}=\frac{۲x-۳}{۲}$$

$$۲-\frac{۴x-۳}{x}=\frac{۲x-۴x+۳}{x}=\frac{-۲x+۳}{x}=\frac{-(۲x-۳)}{x}$$

پس : $\frac{۴x^۲-۱۲x+۹}{۴x-۶}\div(۲-\frac{۴x-۳}{x})=\frac{۲x-۳}{۲}\div\frac{-(۲x-۳)}{x}=\frac{۲x-۳}{۲}\times\frac{-x}{۲x-۳}=\frac{-x}{۲}$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x=۲$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$x=۲\Rightarrow\frac{۱۶-۲۴+۹}{۸-۶}\div(۲-\frac{۸-۳}{۲})=\frac{۱}{۲}\div(\frac{-۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\times(-۲)=-۱$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=۲$ برابر -۱ می‌شود گزینه‌ی اول است.

۱۲ . گزینه ۱ ابتدا به دلیل وجود $\sqrt{x+۱}$ دامنه x به صورت $x+۱\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱$ است.

برای حل معادله طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+۱<x^۲-۲x+۱\Rightarrow x^۲-۳x>۰\Rightarrow$$

		۰		۳	
	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$$

$\Rightarrow$ **به دلیل دامنه‌ی رادیکال** $[-۱,۰)\cup(۳,+\infty)\Rightarrow a+b+c=-۱+۰+۳=۲$

۱۳ . گزینه ۴ فرض کنید $\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}=A$ باشد:

$$\begin{cases}\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}=۳\\ \sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}=A\end{cases}\xrightarrow{\text{ضرب}}(\sqrt{x+۲})^۲-(\sqrt{x-۴})^۲=۳A\Rightarrow ۶=۳A\Rightarrow A=۲$$

حال یک بار دو معادلهٔ بالا را جمع و بار دیگر کم می‌کنیم:

$$\begin{cases}\text{جمع}: ۲\sqrt{x+۲}=۵\Rightarrow\sqrt{x+۲}=\frac{۵}{۲}\\ \text{کم}: ۲\sqrt{x-۴}=۱\Rightarrow\sqrt{x-۴}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}=\frac{۹}{۲}$$

۱۴ . گزینه ۳ برای آن که تعداد ضربان‌ها بیشتر از ۱۱۰ باشد، باید نوشت.

$$y>۱۱۰\Rightarrow\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰>۱۱۰\Rightarrow\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۹۰>۰\xrightarrow{\times\frac{۸}{۱۵}}x^۲-۱۶x+۴۸>۰$$

حال برای اینکه نامعادله اخیر را حل کنیم ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۱۶x+۴۸=۰$، یعنی ۴ و ۱۲ را به‌دست آورده و از جدول زیر کمک می‌گیریم:

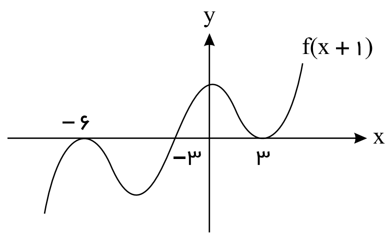
x		۴		۱۲	
$x^۲-۱۶x+۴۸$	+	۰	−	۰	+

پس برای $x>۱۲$، عبارت مثبت بوده، یعنی بعد از ۱۲ دقیقه کار سنگین ضربان قلب بیش از ۱۱۰ خواهد بود.

۱۵ . گزینه ۱ تابع $g(x)$ در محدوده‌ای زیر محور xها قرار دارد که $g(x)<۰$ باشد، پس باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم. برای این کار ابتدا $f(x)$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x+۱)$ به‌دست آید.

$$\frac{f(x+۱)}{x}<۰$$

x	$-\infty$		-۶		-۳		۰		۳		$+\infty$
$f(x+۱)$		−	۰	−	۰	+		+	۰	+	
x		−		−		−	۰	+		+	
$\frac{f(x+۱)}{x}$		+	۰	+	۰	−	ت ن	+	۰	+	



طبق جدول در بازهٔ $(-۳,۰)$ تابع $g(x)$ زیر محور xها یعنی منفی است و چون در بازهٔ (a,b) بیشترین مقدار $b-a$ را می‌خواهیم، $a=-۳$, $b=۰$ است..

$$b-a=۰-(-۳)=۳$$

۱۶ . گزینه ۱ با توجه به شرایطی که برای a و b داده شده است، علامت درون هر یک از قدرمطلق‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\underbrace{|a-b|}_{+}+\underbrace{|a+۱|}_{+}-\underbrace{|۱-b|}_{+}=a-b+a+۱-(۱-b)=۲a$$

۱۷ . گزینه ۴

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{ax-1}{x^3-x}\quad\xrightarrow{x=2}\quad\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{2a-1}{6}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{a-1}{3}\Rightarrow a=5$$

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{5x-1}{x^3-x}$$

معادله را در مخرج مشترک ضرب می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{x(x+1)}+\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}\right)\times x(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow (x-1)+x^3=(5x-1)\Rightarrow x^3-4x=0\quad\Rightarrow\quad x(x^2-4)=0\Rightarrow x=\pm 2\ \text{ق ق}\ ,\ x=0\ \text{غ ق ق}$$

$\Rightarrow$ **حاصل‌جمع تمام جواب‌ها** $=0$

۱۸ . گزینه ۴ ابتدا به کمک اتحاد مزدوج x^2-4 را به صورت $(x-2)(x+2)$ می‌نویسیم. سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$B=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

$$B=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

$$x^3-8 \qquad x^3+8$$

$$B=(x^3-8)(x^3+8)\overset{\text{مزدوج}}{=}x^6-64$$

$$x=\sqrt[3]{10}\ :\ B=(\sqrt[3]{10})^6-64=100-64=36$$

۱۹ . گزینه ۴ به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

ابتدا عبارت $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ را به فرم زیر ساده می‌کنیم.

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{2+3-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2})(\sqrt{3})}=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

حال مخرج کسر دوم را گویا می‌کنیم و به این ترتیب:

$$A=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\Rightarrow A=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$A=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

۲۰ . گزینه ۱ روش اول:

$$\frac{3x+1+2x^2}{\cancel{x^2}(x+1)}=\frac{ax+1}{\cancel{x^2}}\Rightarrow\frac{2x^2+3x+1}{x+1}=ax+1$$

$$\frac{(\cancel{x+1})(2x+1)}{\cancel{x+1}}=ax+1\Rightarrow 2x+\cancel{1}=ax+\cancel{1}\Rightarrow a=2$$

روش دوم: چون برای هر مقدار دلخواه x $(x\neq 0\ ,\ -1)$، $\frac{3x+1}{x^2(x+1)}+\frac{2}{x+1}=\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}$ برقرار است پس به جای x، یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{3(1)+1}{1(2)}+\frac{2}{1+1}=\frac{a}{1}+1\Rightarrow 2+1=a+1\Rightarrow a=2$$

۲۱ . گزینه ۱ ضرب عدد در ماتریس و جمع و تفریق ماتریس‌ها روی درایه‌های نظیر به نظیر صورت می‌گیرد. بنابراین مستقیماً ماتریس موردنظر محاسبه می‌شود.

$$2C+5A-2B=\begin{bmatrix}2&6\\6&4\\2&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10&15\\20&25\\5&15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4\\6&8\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&17\\20&21\\7&23\end{bmatrix}$$

$$?=10+17+20+21+7+23=98$$

۲۲ . گزینه ۲ با توجه به فرض سوال داریم:

$$(AB^2)^2=AB^2AB^2=AB^2(AB)B=AB^2(B^2A)B$$

می‌دانیم $B^3=I$ می‌باشد پس $B^4=B$ می‌باشد.

$$=AB^4AB=AB(AB)=AB(B^2A)=AB^3A=AIA=A^2$$

۲۳ . گزینه ۱

ماتریس A را می‌سازیم:

$$a_{11} = 1 + 1 = 2 \qquad a_{12} = 1 + 2 = 3 \qquad a_{13} = 1 + 3 = 4$$
$$a_{21} = 1 - 4 = -3 \qquad a_{22} = 2 + 2 = 4 \qquad a_{23} = 2 + 3 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 15$$

۲۴ . گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 14 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را}} 5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{5}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \to \text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی} = 1 \times 3 = 3$$

۲۵ . گزینه ۲ می‌دانیم:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

پس:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \to (A+B)^2 = 4I$$

۲۶ . گزینه ۳ ماتریس A قطری است، هرگاه درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفر باشند. پس:

$$A = \begin{bmatrix} - & a^2 - 3a + 2 & a^2 - 3a + 2 \\ a^2 - 3a + 2 & - & a^2 - 6a + 8 \\ a^2 - 3a + 2 & a^2 - 6a + 8 & - \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = 1 \\ a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ یا } a = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a = 2$$

۲۷ . گزینه ۱ در گزینهٔ ۱ داریم:

$$a_{12} = a_{21} = \left[\frac{3}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_{13} = a_{31} = \left[\frac{4}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_{23} = a_{32} = \left[\frac{5}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

پس درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند.

۲۸ . گزینه ۴ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A = [2i + j]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+2 & 2+3 & \cdots & 2+n \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & \cdots & 4+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 2n+n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\text{مجموع درایه‌های ستون سوم} = 60 \to (2 + 4 + \cdots + 2n) + \underbrace{(3 + 3 + \cdots + 3)}_{n \text{ بار}} = 60$$

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n = 60 \to n^2 + 4n - 60 = 0 \to \begin{cases} n = 6 \\ n = -10 \text{ غقق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر چهارم} = (8+8+8+8+8+8) + (1+2+3+4+5+6) = 48 + 21 = 69$$

۲۹ . گزینه ۳ درایه‌های ماتریس C را برحسب درایه‌های ماتریس A و B به دست می‌آوریم:

$$C = 2A - B$$

$$\begin{cases} c_{21} = 2a_{21} - b_{21} = 2(3) - x = 6 - x \\ c_{32} = 2a_{32} - b_{32} = 2(y) - (-1) = 2y + 1 \end{cases} \xrightarrow{c_{21} = 2c_{32}} 6 - x = 4y + 2 \to 4y + x = 4$$

$$\begin{cases} c_{11} = 2a_{11} - b_{11} = 2(x-1) - (-x) = 3x - 2 \\ c_{22} = 2a_{22} - b_{22} = 2(-1) - 2 = -4 \end{cases} \xrightarrow{c_{11} = -c_{22}} 3x - 2 = 4 \to x = 2 \xrightarrow{4y + x = 4} 4y + 2 = 4 \to 4y = 2 \to y = \frac{1}{2}$$

درنتیجه:

$$x + y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۳۰ . گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & a-b\\ a+b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a-b-۱\\ a+b+۳ & b+۴\end{bmatrix}$$

از آنجا که ماتریس $A+B$ قطری است، داریم:

$$\begin{cases}a-b-۱=۰\\ a+b+۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=-۲\end{cases}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی}=-۲$$

۳۱ . گزینه ۳ عبارت موردنظر در توان دوم ماتریس $B-A$ وجود دارد:

$$(B-A)^۲=(B-A)\cdot(B-A)-B^۲-BA-AB+A^۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۸\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}-AB-BA+\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-۵ & -۱۵\\ ۱۰ & ۱۰\end{bmatrix}$$
$$=-AB-BA+\begin{bmatrix}۵ & -۱۰\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۱۰ & ۵\\ -۸ & -۱۰\end{bmatrix}$$

۳۲ . گزینه ۱

طبق فرض داریم:

$$۳AB=-۴BA\Rightarrow AB=-\frac{۴}{۳}BA$$

$$AB^۳=AB\cdot B^۲=-\frac{۴}{۳}BA\cdot B^۲=-\frac{۴}{۳}B\cdot AB\cdot B=-\frac{۴}{۳}B\cdot(-\frac{۴}{۳}BA)\cdot B=\frac{۱۹}{۹}B^۲\cdot AB=\frac{۱۹}{۹}B^۲\cdot(-\frac{۴}{۳}BA)=-\frac{۶۴}{۲۷}B^۳A\Rightarrow AB^۳=-\frac{۶۴}{۲۷}B^۳A\quad(۱)$$

از طرفی طبق مسئله: $AB^۳=-mB^۳A\quad(۲)$

بنابراین از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{۶۴}{۲۷}$$

۳۳ . گزینه ۱ ابتدا ماتریس $A+B$ را می‌سازیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۶ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}+C=\to C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۶ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\to C=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ -۷ & ۳\end{bmatrix}\ (A+B)^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۶ & ۴\end{bmatrix}$$

۳۴ . گزینه ۳ ماتریس اسکالر A را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & x & ۰ & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & x\end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\text{عدد گویا است}\ x:\begin{cases}x^n=۶۴\xrightarrow{x\ \text{گویا}}\ \text{طبیعی است}\ x\\ nx=۱۲\end{cases}\Rightarrow(x=۴,n=۳)\ \text{یا}\ (x=۲,n=۶)$$

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

۳۵ . گزینه ۲

$$AB=\begin{bmatrix}x & -۱ & -x\\ ۰ & ۰ & ۴\\ y & z & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲z & \frac{۱}{۲} & ۲\\ ۲z & ۰ & -۴y\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲xz-۲z & ۰ & ۲x+۴y\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲yz+۲z^۲ & \frac{y+z}{۲} & ۲y-۴yz\end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر باشند.

$$\frac{y+z}{۲}=۰\to z=-y\quad(۱)$$

$$۲y-۴yz=۲\xrightarrow{(۱)}۲y-۴y(-y)=۲\to ۲y^۲+y-۱=۰\to(۲y+۱)(y+۱)=۰\ \to\begin{cases}y=-\frac{۱}{۲}\\ y=-۱\end{cases}\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}}y=-۱$$

$$۲x+۴y=۰\to x=-۲y=-۲\times(-۱)=۲$$

$$xy=۲\times(-۱)=-۲$$

۳۶ . گزینه ۱

$n=۱\Rightarrow ۱\leq ۲$ **برقرار است**

$n=۲\Rightarrow ۴\leq ۴$ **برقرار است**

$n=۳\Rightarrow ۹\leq ۸$ **برقرار نیست**

$n=۴\Rightarrow ۱۶\leq ۱۶$ **برقرار است**

$n=۵\Rightarrow ۲۵\leq ۳۲$ **برقرار است**

چون سرعت رشد ۲^n بیش تر از $n^۲$ است بنابراین به ازای $n\geq ۵$ رابطه برقرار است و در نتیجه طبق روابط بالا فقط به‌ازای $n=۳$ برقرار نیست.

۳۷ . گزینه ۱ زیرا گزینهٔ (۱) به روش برهان خلف اثبات می‌شود.

۳۸ . گزینه ۱ عدد صفر معکوس‌پذیر نیست چون $\frac{۱}{۰}$ بی‌معنی و ∞ عدد نیست.

۳۹ . گزینه ۱ فرض کنیم b, a دو عدد صحیح باشند برای تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح حالت‌های زیر را داریم:

$$(۱)\quad a=۲k \quad , \quad b=۲k' \quad (k,k'\in\mathbb{Z}) \quad : \quad a^۲-b^۲=۴q$$
$$(۲)\quad a=۲k \quad , \quad b=۲k'+۱ \quad (k,k'\in\mathbb{Z}) \quad : \quad a^۲-b^۲=۴q+۱$$
$$(۱)\quad a=۲k+۱ \quad , \quad b=۲k'+۱ \quad (k,k'\in\mathbb{Z}) \quad : \quad a^۲-b^۲=۴q$$

پس تفاضل مربعات دو عدد صحیح یا مضرب ۴ است و یا در تقسیم بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.

در بین گزینه‌ها ۷۸ در تقسیم بر ۴ باقیماندهٔ ۲ می‌آورد پس نمی‌تواند برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح باشد.

۴۰ . گزینه ۳ به‌ازای $n=۶$ حاصل $۲^n+۱۱$ برابر ۷۵ می‌شود که عددی مرکب است.

۴۱ . گزینه ۲ به‌ازای $x=۱۳, y=۰$ ؛ $\sqrt{۱۳}+\sqrt{۰}=\sqrt{۱۳+۰}$ پس این مثال، حکم را رد نمی‌کند.

۴۲ . گزینه ۲ برای نقض گزینهٔ ۲ دو عدد اول ۲ و ۳ را در نظر بگیرید. درستی سایر گزینه‌ها به سادگی اثبات می‌شود.

۴۳ . گزینه ۳

اگر به‌جای n عدد ۱۳ قرار بدهیم داریم:

$$n^۲+۳n+۱۳=۱۳^۲+۳\times۱۳+۱۳=۱۳\times۱۷$$

بنابراین عدد موردنظر مرکب است و درستی حکم رد می‌شود.

پس برای رد حکم از مثال نقض استفاده کردیم.

۴۴ . گزینه ۳ به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد حاصل‌ضرب عبارت‌های $(x_۱-y_۱), (x_۲-y_۲), \cdots, (x_n-y_n)$ همواره زوج است.

۴۵ . گزینه ۳ عدد ۲۳ اول است ولی نه به‌صورت $۲^n-۱$ است نه به‌صورت $۲^n+۱$.

اثبات گزینهٔ ۲: اگر x عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $۳k+۱$ یا $۳k-۱$ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&(۳k\pm۱)^۲=۹k^۲\pm۶k+۱\\&=۳(۳k^۲\pm۲k)+۱\\&=۳q+۱\end{aligned}$$

۴۶ . گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: اولین عدد را x می‌نامیم:

$$\frac{x+(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)+(x+۴)}{۵}=\frac{۵x+۱۰}{۵}=x+۲\to \text{عدد وسطی}\checkmark$$

گزینه «۲»: مثال نقض می‌زنیم، اگر $p=۱$ باشد، آن‌گاه $۳\times۱+۲=۵$ اول است، اما p اول نیست.

گزینه «۳»:

$$\text{همه اعداد صحیح}\begin{cases}۳k\to \text{اول نیست.}\\ \left.\begin{matrix}۳k+۱\\۳k+۲\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{بزرگتر از ۳}]{\text{همه اعداد اول}}\end{cases}\begin{cases}p=۳k+۱\to p^۲=۹k^۲+۶k+۱=۳(۳k^۲+۲k)+۱=۳k'+۱\\p=۳k+۲\to p^۲=۹k^۲+۱۲k+۴=۳(۳k^۲+۴k+۱)+۱=۳k'+۱\end{cases}$$

یعنی باقیمانده تقسیم مربع همه اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۳، برابر یک است.

گزینه «۴»: حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر در عدد گنگ برابر با عددی گنگ است. پس اگر x گنگ باشد و $\frac{۱}{x}$ بخواهد گویا باشد حاصل‌ضرب x در $\frac{۱}{x}$ عددی گنگ می‌شود. در حالی که می‌دانیم حاصل‌ضرب عددی گویا است (یک عددی گویا است) پس $\frac{۱}{x}$ باید گنگ باشد.

۴۷ . گزینه ۴ اثبات گزینهٔ «۱»:

$$n=۲k(۲k+۲)\Rightarrow n+۱=۴k^۲+۴k+۱\Rightarrow n+۱=(۲k+۱)^۲$$

اثبات گزینهٔ «۲»:

$$n=(۲k+۱)(۲k+۳)\Rightarrow n+۱=۴k^۲+۸k+۴=(۲k+۲)^۲$$

اثبات گزینهٔ «۳»:

$$n=k(k+۱)\Rightarrow ۴n+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

به‌عنوان مثال نقض گزینهٔ «۴»، $n=۱\times۲=۲$ را در نظر بگیرید. در این صورت $۸n+۱=۱۷$ است که عددی مربع کامل نیست.

۴۸ . گزینه ۲ بررسی گزاره‌ها:

گزارهٔ الف به ازای $n=۱$ رد می‌شود، زیرا $۲^۱-۱=۱$ و یک عددی اول نیست.

گزارهٔ ب به ازای $n=۳$ رد می‌شود، زیرا $۲^۳+۱=۹$ و ۱۰ عددی اول نیست.

گزارهٔ پ نیز نادرست است. $n=۴$ اول نیست، ولی $۲^۴+۱=۱۷$ عددی اول است.

گزارهٔ ت گزاره‌ای درست است. به عبارت دیگر هرگاه عدد $۲^n+۱$ عددی اول باشد قطعاً n توانی از ۲ بوده است.

۴۹ . گزینه ۲ اثبات الف)

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}\Rightarrow \text{میانگین}=\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}=\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{n}=\frac{n+۱}{۲}$$

مثال نقض ب) اگر $\alpha = \sqrt{۲}$ و $\beta = -\sqrt{۲}$، آن‌گاه $\alpha + \beta = ۰$ عددی گویاست ولی $\alpha - \beta = ۲\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات پ) دو عدد متوالی را به‌صورت a و $a + ۱$ در نظر می‌گیریم:

$$(a+۱)^۳ - a^۳ = \cancel{a^۳} + ۳a^۲ + ۳a + ۱ - \cancel{a^۳} = ۳\underbrace{a(a+۱)}_{۲q} + ۱ = \underbrace{۶q+۱}_{\text{فرد}}$$

مثال نقض ت) اگر $n = ۳$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$۲^{۳^۲} + ۱ = ۲^۹ + ۱ = ۵۱۳ = ۳ \times ۱۷۱ \Rightarrow \text{اول نیست}$$

پس عبارت‌های (ب) و (ت) مثال نقض دارد.

۵۰ . گزینه ۱ طبق برهان خلف فرض می‌کنیم لااقل سه پسر در مهمانی حضور داشته باشند. اگر آن سه نفر دلخواه را همین سه پسر در نظر بگیریم، به تناقض می‌رسیم. چون از میان این سه نفر یکی باید دختر باشد! پس طبق برهان خلف می‌توان نتیجه گرفت که «فقط همین دو پسر در مهمانی حضور دارند» و نتیجهٔ به‌دست‌آمده درست است، چراکه برهان خلف یک روش اثبات معتبر ریاضی است.

پاسخنامه کلیدی

۱. ۳	۹. ۳	۱۷. ۴	۲۵. ۲	۳۳. ۱	۴۱. ۲	۴۹. ۲
۲. ۳	۱۰. ۳	۱۸. ۴	۲۶. ۳	۳۴. ۳	۴۲. ۲	۵۰. ۱
۳. ۴	۱۱. ۱	۱۹. ۴	۲۷. ۱	۳۵. ۲	۴۳. ۳	
۴. ۴	۱۲. ۱	۲۰. ۱	۲۸. ۴	۳۶. ۱	۴۴. ۳	
۵. ۱	۱۳. ۴	۲۱. ۱	۲۹. ۳	۳۷. ۱	۴۵. ۳	
۶. ۴	۱۴. ۳	۲۲. ۲	۳۰. ۲	۳۸. ۱	۴۶. ۲	
۷. ۲	۱۵. ۱	۲۳. ۱	۳۱. ۳	۳۹. ۱	۴۷. ۴	
۸. ۲	۱۶. ۱	۲۴. ۲	۳۲. ۱	۴۰. ۳	۴۸. ۲	

آموزشگاه آلاء