# آموزشگاه آلاء

## ریاضی تجربی

کنکور

تجربی

۶۰ دقیقه

بنام خدا

ریاضی ۳ و کنکور پایه

۱. نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ در بازه‌ی $[x_0,+\infty)$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y=3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد، کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+3x-1=0$ حاصل $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $-9$ (۳) $-27$ (۴) ۲۷

۳. به ازای کدام مقدار $a$، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$، دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

(۱) $-2<a<2$ (۲) $2<a<5$ (۳) $2<a<14$ (۴) $5<a<14$

۴. به ازای کدام مقادیر $m$ معادله‌ی $(x+2)(x^2-2x+4+m)=0$ سه ریشه‌ی حقیقی دارد؟

(۱) $m<3$ (۲) $m>3$ (۳) $m\leq -3$ (۴) $m<-3$

۵. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-7x+c=0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+bx+2=0$، به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشند، $b-c$ کدام است؟

(۱) $-5$ (۲) ۱۵ (۳) $-15$ (۴) ۵

۶. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-(3m-3)x+m=0$، مجموع ریشه ها ۴ برابر حاصل ضرب ریشه ها است، مقدار $m$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) $-4$ (۳) $-3$ (۴) $-6$

۷. حاصل‌جمع ریشه‌های $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $-2$ (۳) ۴ (۴) $-4$

۸. جواب‌های کدام معادله، قرینه و معکوس جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ است؟

(۱) $x^2-3x+2=0$ (۲) $x^2+3x+2=0$ (۳) $x^2+3x-2=0$ (۴) $x^2-3x-2=0$

۹. خط به معادله‌ی $y=mx+4$ با منحنی به معادله‌ی $y=-x^2+2x$، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. مجموعه‌ی مقادیر $m$ به کدام صورت است؟

(۱) $m<0$ (۲) $m>4$ (۳) $-1<m<4$ (۴) $-2<m<6$

۱۰. معادلهٔ $3ax-\sqrt{3x-7}=7a$ دو جواب متمایز دارد. حدود $a$ کدام است؟

(۱) $a\geq\frac{7}{3}$ (۲) $0<a<1$ (۳) $a<0$ (۴) $a>0$

۱۱. منحنی به معادله‌ی $y=(2x+1)(x+8)$ با خطوط $y=mx$ دارای ۲ نقطه‌ی مشترک است. مجموعه مقادیر $m$ کدام است؟

(۱) $m<9$ یا $m>25$ (۲) $9<m<25$ (۳) $5<m<13$ (۴) $m>13$ یا $m<5$

۱۲. اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(a+3)x+3a=0$ مساوی ۴ باشد. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

۱۳. در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتراست. مقدار $m$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۴. اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+mx-8=0$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۱۵. معادلهٔ $x^4+mx^2+n=0$ دارای سه ریشهٔ متمایز حقیقی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $m>0,n=0$ (۲) $m<0,n=0$ (۳) $m<0,n>0$ (۴) $m=0,n<0$

۱۶. در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ رابطهٔ $۹a+۳b+c=۰$ برقرار است. به ازای مقادیر دلخواه $a$، $b$ و $c$ کدام گزینه ریشهٔ معادله است؟

۱) $-\frac{c}{۳a}$ ۲) $-\frac{۳a}{c}$ ۳) $\frac{۳a}{c}$ ۴) $\frac{c}{۳a}$

۱۷. اگر $x^۲-\left(۱+\sqrt{۳}\right)x+\sqrt{۳}=۰$ باشد حاصل $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}+\left|\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}\right|$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۴]{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[۴]{۳}$

۱۸. معادلهٔ $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹. معادلهٔ $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰. اگر محمود و رضا به‌ترتیب و به تنهایی در ۶ و ۱۲ روز اتاقی را رنگ بزنند و در صورتی که با کمک محسن، هر سه اتاق را در ۲ روز رنگ کنند، محسن به تنهایی اتاق را در چند روز رنگ می‌زند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱. اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x}$، آن گاه $f(۸)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲. دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{|x|-۱}+\sqrt{|x|+۱}$ کدام است؟

۱) $R-[-۱,۱]$ ۲) $R$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-(-۱,۱)$

۲۳. دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی شمار

۲۴. به ازای کدام مقدار $k$ تابع $f(x)=x-۴$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۱۶}{x+۴} & x\neq -۴\\ k & x=-۴\end{cases}$ با یکدیگر مساوی هستند؟

۱) ۴ ۲) $-۴$ ۳) ۸ ۴) $-۸$

۲۵. دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\frac{۱}{x-۲}+۱}{\frac{۲}{۲-x}-۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۲\}$

۲۶. اگر مجموعه‌ی $A$ دارای ۳ عضو و مجموعه‌ی $B$ دارای ۶ عضو باشد، تعداد توابعی که می‌توان از $A$ به $B$ و از $B$ به $A$ نوشت از راست به چپ کدام است؟

۱) $۳^۶ , ۶^۳$ ۲) $۶^۳ , ۳^۶$ ۳) $۹^۲ , ۲^۹$ ۴) $۲^۹ , ۹^۲$

۲۷. دامنه‌ی تابع $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) $[۰,۵]$ ۲) $[۰,\sqrt{۵}]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۵,+\infty)$

۲۸. مقادیر مجاز برای ورودی تابع $g(x)=\frac{۴}{[x]+[-x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}\geq ۰$

۲۹. اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+8x+22}$ باشد، حاصل $f(4+\sqrt{2})$ کدام است؟

(۱) ۶  (۲) $2\sqrt{2}$  (۳) ۳  (۴) ۴

۳۰. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a\cdot b^x\ ;\ b>0$ داریم $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$، مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

(۱) ۶  (۲) ۸  (۳) ۱۲  (۴) ۲۴

۳۱. اگر عبارت $\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر $x$ در کدام بازه است؟

(۱) $[\frac{2}{3},2]$  (۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$  (۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$  (۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

۳۲. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2^{2\log_4 x}}$ کدام است؟

(۱) $[0,+\infty)$  (۲) $(\frac{3}{2},+\infty)$  (۳) $(0,+\infty)$  (۴) $[\frac{3}{2},+\infty)$

۳۳. به ازای کدام مقدار $n$، رابطهٔ $f=\{(-2,3),(2,-1),(-2,m),(m-1,n+1)\}$ بیانگر یک تابع است؟

(۱) $-2$  (۲) ۱  (۳) $-1$  (۴) ۳

۳۴. کدام رابطه بیانگر یک تابع است؟

(۱) $\sin^2 x+\cos^2 y=1$  (۲) $y=\begin{cases}x^2-2x\ ; & x>0\\ 1-x^3\ ; & x<1\end{cases}$  (۳) $x^2+y^2=1\ ,y\geq 0$  (۴) $\sin 2y=[x]$

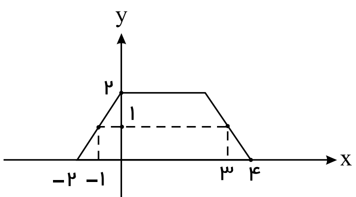
۳۵. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log(5x-20)-\log(x-2)}$ کدام است؟

(۱) $(2,\frac{9}{2}]$  (۲) $(4,+\infty)$  (۳) $[\frac{9}{2},+\infty)$  (۴) $(4,\frac{9}{2}]$

۳۶. اگر $D_f$ و $R_f$ به‌ترتیب دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x^3-2x}+\sqrt{2x-x^3}+x^2$ باشند، در مجموعهٔ $D_f\cup R_f$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

(۱) ۱  (۲) ۲  (۳) ۴  (۴) بی‌شمار

۳۷. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|f(x+2)|-1}$ کدام است؟




(۱) $[-1,3]$  (۲) $[-3,1]$  (۳) $[-2,4]$  (۴) $[-4,2]$

۳۸. کدام دو تابع با هم برابرند؟

(۱) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=x$  (۲) $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$

(۳) $f(x)=\log x^2$ و $g(x)=2\log x$  (۴) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{2-x}$

۳۹. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_4(|x^2-2|-x)$، کدام است؟

(۱) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$  (۲) $(-\infty,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$  (۳) $[-1,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$  (۴) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

۴۰. برد تابع $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}-\{1\}$  (۲) $\mathbb{R}-\{0,1\}$  (۳) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$  (۴) $\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{2}\}$

# پاسخنامه تشریحی

**۱ . گزینه ۳**

$$\frac{1}{2}x+2\le 3(x-1)\Rightarrow \frac{1}{2}x+2\le 3x-3$$
$$\Rightarrow 3x-3-\frac{1}{2}x-2\ge 0\Rightarrow \frac{5}{2}x-5\ge 0\Rightarrow x\ge 2$$

پس تابع $f$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ و هر زیرمجموعه آن بالاتر از خط $y=3x-3$ قرار نمی‌گیرد، در نتیجه $x_0\ge 2$ و داریم:

$$f(x_0)=\frac{1}{2}x_0+2\ge \frac{1}{2}(2)+2=3\Rightarrow f(x_0)\ge 3$$

**۲ . گزینه ۳**

توجه کنید که $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$ است.

پس: $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=(x_1+x_2)^3=(-3)^3=-27$

توجه کنید $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ می باشد.

**۳ . گزینه ۴** شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ باشد.

$$\Delta>0\to b^2-4ac>0\to 4(a-2)^2-4(14-a)>0\to (a-2)^2-(14-a)>0$$
$$\to a^2+4-4a-14+a>0\to a^2-3a-10>0\to (a-5)(a+2)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-2 \quad\text{یا}\quad a>5 : I$$
$$\frac{c}{a}>0\to 14-a>0\to a<14\quad : II$$
$$-\frac{b}{a}>0\to 2(a-2)>0\to a-2>0\to a>2\quad : III$$

از اشتراک $I$ و $II$ و $III$ به جواب $5<a<14$ می‌رسیم.

**۴ . گزینه ۳** چون $x+2=0$ یک ریشه $x=-2$ دارد.

کافی است $x^2-2x+4+m=0$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$$x^2-2x+4+m=0\xrightarrow{\Delta\ge 0}\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(4+m)\ge 0$$
$$\Rightarrow 4-16-4m\ge 0\Rightarrow -4m\ge 12\Rightarrow m\le -3$$

توجه کنید اگر گفته شده بود سه ریشهٔ حقیقی متمایز در آن صورت $\Delta>0$ را منظور می‌کردیم.

**۵ . گزینه ۳** ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$، $k$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند،

و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$، $k$ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند.

روش اول:

$$2x^2+bx+2=0\ \xrightarrow[b\text{ در }2\text{ و }c\text{ در }2^2]{\text{دو برابر}}\ 2x^2+2bx+8=0\ \Rightarrow\ x^2+bx+4=0$$
$$\xrightarrow[x\to x-1]{\text{یک واحد بیشتر}}\ (x-1)^2+b(x-1)+4=0\ \Rightarrow\ x^2+1-2x+bx-b+4=0$$
$$\Rightarrow\ x^2+(b-2)x-b+5=0\quad \text{مقایسه با}\quad x^2-7x+c=0$$

پس: $b-2=-7\ \Rightarrow\ b=-5\ ,\ -b+5=c\ \Rightarrow\ c=10\to b-c=-15$

روش دوم:

اگر $y$، ریشه‌ی جدید و $x$ ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=2x+1\ \Rightarrow\ x=\frac{y-1}{2}$$
$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می دهیم}} 2(\frac{(y-1)^2}{4})+b(\frac{y-1}{2})+2=0\to \frac{y^2-2y+1}{2}+\frac{by-b}{2}+2=0$$
$$y^2-2y+1+by-b+4=0\to y^2+(b-2)y-b+5=0$$

ادامه‌ی حل مسئله مشابه روش اول است.

**۶ . گزینه ۳**

$$S=4P\Rightarrow -\frac{b}{a}=4\times\frac{c}{a}\Rightarrow 4c+b=0\Rightarrow 4m+(3-3m)=0\Rightarrow m=-3$$

**۷ . گزینه ۱** طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x+1)^2=2x+\sqrt{6x^2+1}\Rightarrow x^2+2x+1=2x+\sqrt{6x^2+1}\to x^2+1=\sqrt{6x^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۴ + ۱ + ۲x^۲ = ۶x^۲ + ۱ \to x^۴ - ۴x^۲ = ۰ \to x^۲(x^۲ - ۴) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ & \text{ق‌ق} \\ x = ۲ & \text{ق‌ق} \\ x = -۲ & \text{غ‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

**بنابراین جمع ریشه‌ها برابر ۲ است.**

**۸ . گزینه ۴ ریشه‌های معادلهٔ $cx^۲ - bx + a = ۰$، عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است.**

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} -x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \to x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$$

**۹ . گزینه ۴ یعنی اگر خط و منحنی را تلاقی دهیم معادله‌ی تلاقی نباید ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.**

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ۲x \\ y = mx + ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} -x^۲ + ۲x = mx + ۴ \Rightarrow \boxed{x^۲ + (m - ۲)x + ۴ = ۰} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

**برای اینکه معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta < ۰$ باشد.**

$$\Delta < ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac < ۰$$
$$\Rightarrow (m - ۲)^۲ - ۱۶ < ۰ \Rightarrow (m - ۲)^۲ < ۱۶ \Rightarrow -۴ < m - ۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < m < ۶$$

**۱۰ . گزینه ۴**

$$۳ax - \sqrt{۳x - ۷} = ۷a \Rightarrow ۳ax - ۷a - \sqrt{۳x - ۷} = ۰$$
$$\Rightarrow a(۳x - ۷) - \sqrt{۳x - ۷} = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳x - ۷}(a\sqrt{۳x - ۷} - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۳x - ۷} = ۰ \Rightarrow ۳x - ۷ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{۷}{۳} \\ a\sqrt{۳x - ۷} - ۱ = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳x - ۷} = \dfrac{۱}{a} \end{cases}$$

**برای اینکه معادلهٔ دوم نیز دارای یک جواب باشد، باید $\frac{۱}{a} > ۰$ باشد (چون سمت چپ نامنفی است)، پس باید $a > ۰$ باشد.**

**توجه شود که دامنهٔ متغیر معادله $x \geq \frac{۷}{۳}$ است تا زیر رادیکال منفی نشود و به‌ازای $a > ۰$، قطعاً ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{۳x - ۷} = \frac{۱}{a}$ از $\frac{۷}{۳}$ بزرگتر خواهد بود و قابل قبول است.**

**۱۱ . گزینه ۱ اگر منحنی و خط را تلاقی دهیم، معادله‌ی تلاقی باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز باشد.**

$$y = (۲x + ۱)(x + ۸) \Rightarrow y = ۲x^۲ + ۱۶x + x + ۸ \Rightarrow y = ۲x^۲ + ۱۷x + ۸$$

$$\begin{cases} y = ۲x^۲ + ۱۷x + ۸ \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲ + ۱۷x + ۸ = mx \Rightarrow \boxed{۲x^۲ + (۱۷ - m)x + ۸ = ۰} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow (۱۷ - m)^۲ - ۶۴ > ۰$$

$$\Rightarrow (۱۷ - m)^۲ > ۶۴ \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} |۱۷ - m| > ۸ \Rightarrow \begin{cases} ۱۷ - m > ۸ \to m < ۹ \\ \text{یا} \\ ۱۷ - m < -۸ \to m > ۲۵ \end{cases}$$

**۱۲ . گزینه ۱**

$$S = \text{مجموع ریشه ها} = \frac{-b}{a} = \frac{a + ۳}{۱} = ۴ \Rightarrow a = ۱$$
$$P = \text{ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = \frac{۳a}{۱} \xrightarrow{a=۱} P = ۳$$

**۱۳ . گزینه ۲**

**اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه:**

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

**در اینگونه تست‌ها ابتدا با توجه به صورت سوال رابطه‌ای بین $x_۱$ و $x_۲$ می‌نویسیم و سپس یک رابطه‌ی دیگر بین $x_۱$ و $x_۲$ از خود معادله می‌یابیم:**

$$x_۱ = ۳x_۲ + ۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ = ۳ \\ x_۱ + x_۲ = \frac{۱۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_۱ + ۳x_۲ = -۳ \\ x_۱ + x_۲ = \dfrac{۱۷}{۳} \end{cases}$$
$$۴x_۲ = \frac{۸}{۳} \Rightarrow x_۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x_۱ = ۵$$

**$x_۱ = ۵$ را درمعادله جای‌گذاری می‌کنیم:**

$$f(۵) = ۳(۵)^۲ - ۱۷(۵) + m = ۷۵ - ۸۵ + m = ۰ \Rightarrow m = ۱۰$$

**۱۴ . گزینه ۴ چون $x = ۲$ ریشهٔ معادله است، پس با قراردادن در معادله، تساوی زیر برقرار است، یعنی در معادله صدق می‌کند:**

$$x = ۲, ۳x^۲ + mx - ۸ = ۰ : ۳(۲)^۲ + m(۲) - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲m = -۴ \Rightarrow m = -۲$$

بنابراین معادله به‌صورت $۳x^{۲} - ۲x - ۸ = ۰$ در می‌آید. برای به‌دست آوردن ریشهٔ دیگر، معادله را به روش $\Delta$ حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۲)^{۲} - ۴(۳)(-۸) = ۱۰۰ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۲ \pm ۱۰}{۶} = ۲, -\frac{۴}{۳}$$

پس ریشهٔ دیگر $-\frac{۴}{۳}$ است.

۱۵ . گزینه ۲ چون معادلهٔ دو مجذوری $x^{۴} + mx^{۲} + n = ۰$ دارای سه ریشهٔ متمایز است، پس قطعاً یکی از ریشه‌ها برابر صفر است، یعنی $x = ۰$ باید در معادله صدق کند. بنابراین $n = ۰$ است.

$$n = ۰ \Rightarrow x^{۴} + mx^{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲}(x^{۲} + m) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ x^{۲} + m = ۰ \Rightarrow x^{۲} = -m \end{cases}$$

باید $-m > ۰$ باشد تا معادله دارای دو ریشهٔ دیگر غیر از $x = ۰$ باشد، یعنی $m < ۰$.

۱۶ . گزینه ۴ اگر مختصری حواس مبارک را جمع کنیم، متوجه می‌شویم که تساوی $۹a + ۳b + c = ۰$ از قرار دادن $x = ۳$ در معادله به دست آمده است. حال با توجه به رابطهٔ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ و اینکه یکی از ریشه‌ها $\alpha = ۳$ است، داریم:

$$۳\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \beta = \frac{c}{۳a}$$

۱۷ . گزینه ۱ چون مجموع ضرایب معادله مساوی صفر است پس $x_{۱} = ۱$ , $x_{۲} = \frac{c}{a} = \sqrt{۳}$ و داریم:

$$\left|\sqrt{۱} - \sqrt[۴]{۳}\right| + \sqrt{۱} + \sqrt[۴]{۳} = \sqrt[۴]{۳} - ۱ + ۱ + \sqrt[۴]{۳} = ۲\sqrt[۴]{۳}$$

۱۸ . گزینه ۳ با انتخاب تغییر متغیر $t = x^{۲} - ۲x$ خواهیم داشت:

$$t^{۲} - t = ۲ \Rightarrow t^{۲} - t - ۲ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} t_{۱} = -۱, t_{۲} = -\frac{c}{a} = ۲$$

$$t_{۱} = -۱ \Rightarrow x^{۲} - ۲x = -۱ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$t_{۲} = ۲ \Rightarrow x^{۲} - ۲x = ۲ \Rightarrow x^{۲} - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ + ۸ = ۱۲ > ۰ \quad \text{۲ ریشه}$$

جمعاً ۳ ریشهٔ متمایز دارد.

۱۹ . گزینه ۴

می‌دانیم که $۱ - x = (۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x})$

$$\frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ + \sqrt{x}} = (۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x}) \Rightarrow \frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ + \sqrt{x}} - (۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x}) = ۰ \Rightarrow \frac{(۱ - \sqrt{x}) - (۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x})^{۲}}{۱ + \sqrt{x}} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(۱ - \sqrt{x})\left(۱ - (۱ + \sqrt{x})^{۲}\right)}{۱ + \sqrt{x}} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - \sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \quad x = ۱ \\ ۱ - (۱ + \sqrt{x})^{۲} = ۰ \Rightarrow \quad x = ۰ \end{cases}$$

بنابراین دو جواب قابل قبول دارد.

۲۰ . گزینه ۲ اگر محسن در $a$ روز اتاق را رنگ بزنند، داریم:

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times(۱۲a)} ۱۲ + ۲a + a = ۶a \Rightarrow a = ۴$$

پس محسن به تنهایی اتاق را در ۴ روز رنگ می‌زند.

۲۱ . گزینه ۳

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$$

۲۲ . گزینه ۴ زیر رادیکال دوم همواره مثبت است، فقط کافی است زیر رادیکال اول را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهیم.

$|x| - ۱ \geq ۰ \Rightarrow |x| \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱$ یا $x \leq -۱ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-۱, ۱)$

۲۳ . گزینه ۳ هم $x^{۲} \geq ۰$ است هم $(x^{۲} - ۴)^{۲} \geq ۰$ است یعنی زیر رادیکال به خاطر منفی هرگز نمی‌تواند مثبت باشد ولی می‌تواند صفر باشد.

$$-x^{۲}(x^{۲} - ۴)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \,,\, x = ۲ \,,\, x = -۲$$

پس دامنه‌ی تعریف این تابع ۳ عضو دارد.

۲۴ . گزینه ۴ باید دامنه‌ها برابر باشند و به ازای هر عضو از دامنه، بردهایشان هم برابر شوند.

$$D_g = D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-۴)(x+۴)}{x+۴} = x - ۴ & x \neq -۴ \\ k & x = -۴ \end{cases}$$

$$f(-۴) = -۴ - ۴ = -۸$$

$$g(-۴) = f(-۴) \quad \Rightarrow \quad k = -۸$$

۲۵ . گزینه ۲

دامنهٔ تابع کسری برابر است با: $D_f = R - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$.

$$y=\frac{\frac{۱}{x-۲}+۱}{\frac{۲}{۲-x}-۲}=\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ ۲-x=۰\Rightarrow x=۲\\ \frac{۲}{۲-x}-۲=۰\Rightarrow ۲-x=۱\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow D_f:\mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

**۲۶. گزینه ۱** تعداد توابع از مجموعه‌ی $n$ عضوی به مجموعه‌ی $m$ عضوی برابر $m^n$ است.

$A$ به $B$ تعداد توابع از $=۳^۶$

$B$ به $A$ تعداد توابع از $=۶^۳$

**۲۷. گزینه ۱**

$$\begin{aligned}&\sqrt{x}\Rightarrow x\geq ۰\quad (۱)\\ &\sqrt{y}=\sqrt{۵}-\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{۵}\geq\sqrt{x}\Rightarrow x\leq ۵\quad (۲)\end{aligned}\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} ۰\leq x\leq ۵$$

**۲۸. گزینه ۳**

می‌دانیم:
$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

مخرج کسر نباید صفر باشد پس:

$D_g=\mathbb{R}-\{$ ریشه یا ریشه‌های مخرج $\}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

**۲۹. گزینه ۱**

ضابطه $f$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sqrt{-(x^۲-۸x)+۲۲}=\sqrt{-(x-۴)^۲+۱۶+۲۲}=\sqrt{۳۸-(x-۴)^۲}$$
$$f(۴+\sqrt{۲})=\sqrt{۳۸-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

**۳۰. گزینه ۳** در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ab^x$ ، $f(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ است، پس داریم:

$$f(۰)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ab^۰=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$
$$f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow \frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow\frac{۱}{b^۲}=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow b^۲=۱۶\xrightarrow{b>۰}b=۴$$

حال با معلوم بودن مقادیر $a$ و $b$، ضابطه‌ی تابع $f$ را نوشته و سپس $f(\frac{۳}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=۴\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^x\Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۴^۳}=\frac{۳}{۲}\times ۸=۱۲$$

**۳۱. گزینه ۴** روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجهٔ فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجهٔ فرد به ازای تمام مقادیر $x$ تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰\rightarrow\frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\geq ۰\rightarrow\begin{cases}\text{صورت}=۰\rightarrow ۹x^۲=۴\rightarrow x^۲=\frac{۴}{۹}\rightarrow x=\pm\frac{۲}{۳}\\ \text{مخرج}=۰\rightarrow ۲x^۲=۰\rightarrow x=۰\end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-۲}{۳}$ | | $۰$ | | $\frac{۲}{۳}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عبارت $\geq ۰$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | ن | $+$ | $۰$ | $-$ | |

$$\rightarrow x\in[\frac{-۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$$

روش دوم:

اگر $x=۱$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x=۱$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x=۰$ مخرج را صفر می‌کند و گزینهٔ دوم که شامل $x=۰$ است نیز حذف می‌شود.

**۳۲. گزینه ۳**

$$f(x)=\sqrt{۲^{۲\times\frac{۱}{۲}\log_۲ x}}=\sqrt{۲^{\log_۲ x}}=\sqrt{x}$$

در نگاه اول $x\geq ۰$ دامنهٔ تابع است! در حالی که باید به دامنهٔ لگاریتم اولیه توجه کنیم که شامل صفر نیست.

بنابراین دامنهٔ $f(x)$ برابر است با: $\boxed{x>۰}$

**۳۳. گزینه ۱** به مولفه‌های اول نگاه کرده و داریم:

$$\begin{cases}(-۲,۳)\in f\\ (-۲,m)\in f\end{cases}\rightarrow m=۳\rightarrow f=\{(-۲,۳),(۲,-۱),(-۲,۳),(۲,n+۱)\}$$
$$\rightarrow f=\{(-۲,۳),(۲,-۱),(۲,n+۱)\}\rightarrow\begin{cases}(۲,-۱)\in f\\ (۲,n+۱)\in f\end{cases}$$
$$\rightarrow n+۱=-۱\rightarrow n=-۲:f=\{(-۲,۳),(۲,-۱)\}$$

**۳۴. گزینه ۳** هر گزینه‌ای که در آن به ازای حداقل یک $x$، بیش از دو $y$ پیدا شود تابع نبودن آن تایید می‌شود. در گزینه‌ی ۱ به ازای $x=۰$ به رابطه‌ی $\cos^۲ y=۱$ می‌رسیم که معادل $\cos y=\pm۱$ بوده و دارای بی‌شمار جواب برای $y$ است(مثلاً $\cos y=۱$ جواب‌های بیشماری به صورت $y=۲k\pi$ و $\cos y=-۱$ جواب‌های بیشماری به صورت $y=۲k\pi+\pi$ دارد.) در

گزینه ۲ ضابطه‌ها در بیشمار نقطه به صورت $(۰,۱)$ اشتراک دامنه دارند و مثلاً به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ دو تا $y$ به صورت $y=\frac{۱}{۴}-۲(\frac{۱}{۲})=\frac{-۳}{۴}$ و $y=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$ حاصل می‌شود. در گزینه ۴ نیز به ازای $x=۰$ به معادله $\sin ۲y=۰$ می‌رسیم که بیشمار $y$ به صورت $۲y=k\pi$ یا $y=\frac{k\pi}{۲}$ داریم. اما در رابطه‌ی ۳ برای هر $x$ تنها یک $y$ داریم و تابع است.

**۳۵. گزینه ۳**

$$۵x-۲۰>۰\Rightarrow x>۴\quad[۱]$$
$$x-۲>۰\Rightarrow x>۲\quad[۲]$$
$$\log(۵x-۲۰)-\log(x-۲)\geq ۰\Rightarrow \log(۵x-۲۰)\geq\log(x-۲)\Rightarrow ۵x-۲۰\geq x-۲\Rightarrow ۴x\geq ۱۸\Rightarrow x\geq\frac{۹}{۲}\quad[۳]$$

$$[۱],[۲],[۳]\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq\frac{۹}{۲}\Rightarrow D_f=[\frac{۹}{۲},+\infty)$$

**۳۶. گزینه ۲** ابتدا دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x^۳-۲x}+\sqrt{۲x-x^۳}+x^۲$$

$$\begin{cases} x^۳-۲x\geq ۰ & (۱)\\ ۲x-x^۳\geq ۰ & (۲)\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک }(۱),(۲)} x^۳-۲x=۰\Rightarrow x(x^۲-۲)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\pm\sqrt{۲}$$

پس $D_f=\{۰,\sqrt{۲},-\sqrt{۲}\}$ یعنی دامنهٔ تابع سه عضوی دارد. این مقادیر را در تابع جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر $y$ به‌دست آیند:

$$x=۰\Rightarrow f(x)=۰$$
$$x=\sqrt{۲}\Rightarrow f(x)=۲$$
$$x=-\sqrt{۲}\Rightarrow f(x)=۲\Rightarrow R_f=\{۰,۲\}$$
$$\to D_f\cup R_f=\{۰,-\sqrt{۲},\sqrt{۲},۲\}$$

**۳۷. گزینه ۲**

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$|f(x+۲)|-۱\geq ۰\Rightarrow |f(x+۲)|\geq ۱\to\begin{cases} f(x+۲)\geq ۱\\ \text{یا}\\ f(x+۲)\leq -۱\end{cases}$$

با توجه به نمودار نامعادلهٔ $f(x+۲)\leq -۱$ جواب ندارد زیرا برد تابع $[۰,۲]$ است و نامعادلهٔ $f(x+۲)\leq -۱$ در محدودهٔ موردنظر نمی‌باشد.

برای حل نامعادلهٔ $f(x+۲)\geq ۱$ ابتدا نامعادلهٔ $f(x)\geq ۱$ را حل می‌کنیم. یعنی قسمتی از نمودار $f$ که در آن نمودار بالای خط $y=۱$ قرار دارد، که با توجه به نمودار $f$ داریم:

$$f(x)\geq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۳$$

حال در بازهٔ موردنظر به‌جای $x$، $x+۲$ قرار می‌دهیم تا دامنهٔ تابع مورد نظر به‌دست آید:

$$-۱\leq x+۲\leq ۳\Rightarrow -۳\leq x\leq ۱$$

**۳۸. گزینه ۴** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$\begin{cases} D_f=[۰,+\infty)\\ D_f=\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow f\neq g$$

گزینهٔ «۲»:

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x|\\ f(x)=\sin x\end{cases}:\ \text{ضابطه‌ها یکسان نیستند}\Rightarrow f\neq g$$

گزینهٔ «۳»:

$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\\ D_g=(۰,+\infty)\end{cases}\Rightarrow f\neq g$$

گزینهٔ «۴»:

$$\begin{cases} D_f=D_g=[۰,۲]\\ f(x)=\sqrt{x(۲-x)}=\sqrt{x}\sqrt{۲-x}=g(x)\end{cases}$$

**۳۹. گزینه ۴** روش اول: کافی است عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار دهید.

$$|x^۲-۲|-x>۰\to |x^۲-۲|>x$$

ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{۲}$ هستند.

$$x<-\sqrt{۲}\to x^۲-۲>x\to x^۲-x-۲>۰\to (x-۲)(x+۱)>۰\ \to x<-۱\ \text{یا}\ x>۲\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x<-\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}\to -x^۲+۲>x\to x^۲+x-۲<۰\to (x+۲)(x-۱)<۰\ \to -۲<x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۲<x<۱$$

$x > \sqrt{2} \to x^2 - 2 > x \to x^2 - x - 2 > 0 \to (x-2)(x+1) > 0 \to x < -1$ یا $x > 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x > 2$

**از اجتماع جواب‌های به‌دست آمده به $2 < x$ یا $1 < x$ می‌رسیم.**

**روش دوم: به روش عددگذاری حل می‌کنیم.**

$x = 2 \to$ جلوی لگاریتم منفی می‌شود $\to$ گزینه‌های **۲** و **۳** حذف می شوند

$x = -1 \to$ جلوی لگاریتم مثبت می‌شود $\to$ گزینهٔ **۱** حذف می شود

**۴۰ . گزینه ۴ برای تعیین برد ابتدا باید به دامنه دقت کنید.**

**برد تابع هموگرافیک با ضابطه $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R} - \{\dfrac{a}{c}\}$ است.**

**در $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ با فرض $x \neq 1$ داریم: $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = f(x)$. برد این تابع ساده شده، $\mathbb{R} - \{1\}$ است. از طرفی $x = 1$ را در دامنهٔ این تابع نداریم پس $y(1) = \dfrac{1}{2}$ را هم در برد نداریم، پس بردش تابع $\mathbb{R} - \{1, \dfrac{1}{2}\}$ است.**

## پاسخنامه کلیدی

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱. ۳ | ۷. ۱ | ۱۳. ۲ | ۱۹. ۴ | ۲۵. ۲ | ۳۱. ۴ | ۳۷. ۲ |
| ۲. ۳ | ۸. ۴ | ۱۴. ۴ | ۲۰. ۲ | ۲۶. ۱ | ۳۲. ۳ | ۳۸. ۴ |
| ۳. ۴ | ۹. ۴ | ۱۵. ۲ | ۲۱. ۳ | ۲۷. ۱ | ۳۳. ۱ | ۳۹. ۴ |
| ۴. ۳ | ۱۰. ۴ | ۱۶. ۴ | ۲۲. ۴ | ۲۸. ۳ | ۳۴. ۳ | ۴۰. ۴ |
| ۵. ۳ | ۱۱. ۱ | ۱۷. ۱ | ۲۳. ۳ | ۲۹. ۱ | ۳۵. ۳ | |
| ۶. ۳ | ۱۲. ۱ | ۱۸. ۳ | ۲۴. ۴ | ۳۰. ۳ | ۳۶. ۲ | |

آموزشگاه آلاء