



منطق (Logic): علم مطالعه استدلال‌ها

استدلال معتبر (Valid): استدلالی که اگر مقدمات آن درست باشند، نتیجه آن نیز درست است.

مثال: مشخص کنید کدامیک از نتیجه‌گیری‌های زیر معتبر است؟

(الف) هر کتابی نویسنده دارد. شاهنامه یک کتاب است. بنابراین شاهنامه نویسنده دارد.

(ب) هر غذایی یک نویسنده دارد. قورمه سبزی یک ماشین است. پس قورمه سبزی یک نویسنده دارد.

(ج) زیدان یا مسی بهترین بازی‌ساز تاریخ فوتبال هستند. مسی بهترین بازی‌ساز تاریخ فوتبال نیست. پس زیدان بهترین بازی‌ساز تاریخ فوتبال است.

(د) هیچ مربع کاملی منفی نیست. ۲۵ مربع کامل است. پس ۲۵ منفی نیست.

(ه) هیچ مربع کاملی منفی نیست. ۴۰ مربع کامل است. پس ۴۰ منفی نیست.

(و) هر تیمی که اولین تیم صعود کننده به جام جهانی باشد، قهرمان جام جهانی می‌شود. ایران اولین تیم صعود کننده به جام جهانی است. بنابراین ایران قهرمان جام جهانی می‌شود.

(ز) اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود. فردا باران می‌بارد. بنابراین فردا زمین خیس می‌شود.

(ح) اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود. زمین خیس شده است. بنابراین باران باریده است.

(ط) همه انسان‌ها حیوان هستند. گربه کوچه ما یک حیوان است. بنابراین، گربه کوچه ما یک انسان است.

(ی) بعضی از جوانان شعر می‌سرایند. بعضی از سرایندگان شعر، پیر هستند. پس بعضی از جوانان پیر هستند.

(ک) بعضی از اعداد زوج بزرگتر از ۱۰ هستند. بعضی از اعداد بزرگتر از ۱۰ فرد هستند. پس بعضی از اعداد زوج فرد هستند.





تذکره ۱: اعتبار یک استدلال به معنی درستی نتیجه آن نیست. بلکه به معنی درستی نتیجه گیری است.

تذکره ۲: هر استدلال از چند مقدمه و یک یا چند نتیجه تشکیل می شود. به مقدمات استدلال، مفروضات استدلال نیز گفته می شود.

گزاره (Proposition): جمله ای است خبری که دارای ارزش درست یا نادرست باشد.

تذکره ۳: جملات امری، نهی، سؤالی، تعجبی، دعایی، نفرین و عاطفی (بیان احساسات) گزاره نیستند.

مثال: کدامیک از جملات زیر گزاره است؟

الف) در این مکان پارک نکنید.

ب) عجب گل زیبایی!

ج) لطفاً تلفن همراه خود را در حالت بی صدا قرار دهید.

د) من مادرم را خیلی دوست دارم.

هـ) پارک کردن در این مکان ممنوع است.

و) چه کسی پنیر مرا جابجا کرد؟

ز) سال ۲۰۲۵ پایان جهان است.

ح) این گل خیلی زیباست!

ط) لعنت بر کسی که اینجا آشغال بریزد.

ی) هر معادله درجه دو، دارای دو ریشه حقیقی است.

ک) هر عدد زوج بزرگتر از دو را می توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت.

ل) هزارمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۵ است.

م) هر عدد زوج بر دو بخش پذیر است.

تذکره ۲: ممکن است درستی یا نادرستی گزاره ای را ندانیم. مانند حدس گلدباخ





تذکره ۳: جملات مبهم گزاره نیستند.

- ایران کشور وسیعی است.
- شهریار شاعر مشهوری است.
- نقره فلز گران‌بهایی است.
- پنج میلیارد عدد بزرگی است.
- پیشرفت این پروژه قابل توجه بوده است.

تذکره ۴: هر استدلال از چند گزاره تشکیل می‌شود. بنابراین جملات امری، سؤالی، عاطفی و در استدلال به کار نمی‌روند.

تذکره ۵: گزاره‌ها را در منطق ریاضی معمولاً با حروف p, q, r, s, \dots نمایش می‌دهیم.

جدول ارزش گزاره‌ها: (Truth Table)

هر گزاره یکی و فقط یکی از دو ارزش «درست» یا «نادرست» را دارد. (T, F)
جدول ارزش یک گزاره:

P
د
ن

مثال: جدول ارزش دو گزاره و سه گزاره را رسم کنید.

نکته: جدول ارزش n گزاره حالت دارد.



ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌های مرکب: از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره مرکب به دست می‌آید. رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط):

مثال: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) ۵ عددی فرد است و ۳۶ مربع کامل است. (ب) ۵ عددی زوج است و ۳۶ مربع کامل است.

ج) ۵ عددی فرد است یا ۳۶ مربع کامل است. (د) ۵ عددی زوج است یا ۳۶ مربع کامل است.

هـ) اگر ۵ فرد باشد آنگاه در تقسیم بر دو باقیمانده‌اش برابر یک می‌شود.

و) اگر ۵ فرد باشد آنگاه بر دو بخش‌پذیر است. (ز) اگر ۵ زوج باشد آنگاه بر دو بخش‌پذیر است.

ح) اگر ۵ زوج باشد آنگاه در تقسیم بر دو باقیمانده‌اش یک می‌شود.

ط) چنین نیست که ۵ زوج باشد.

۱) نقیض یک گزاره: رابط نقیض " \sim " است که خوانده می‌شود: نه، چنین نیست که، نقیض $\sim p$ زمانی درست است که p نادرست باشد و زمانی نادرست است که p درست باشد.

جدول ارزش نقیض:

هم‌ارزی: $(p \equiv q)$ دو گزاره p و q را هم‌ارز گویند هرگاه در همه حالات ارزش آنها یکسان باشد.

مثال: به کمک جدول نشان دهید: $\sim(\sim p) \equiv p$





۲) ترکیب فصلی دو گزاره: رابط فاصل "v" است که خوانده می‌شود: یا ترکیب فصلی $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که هر دو مؤلفه آن نادرست باشند. در غیر این صورت درست است.

مثال: گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) $ab = 0 \Rightarrow$

ب) $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

ج) $|x| > 3 \Rightarrow$

د) $x^2 - 10x + 9 \geq 0$

د) باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۳، یا صفر است یا

۳) ترکیب عطفی دو گزاره: رابط عاطف "∧" است که خوانده می‌شود: و ترکیب عطفی $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که هر دو مؤلفه آن درست باشند. در غیر این صورت نادرست است.

مثال: گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر نمودار تابع درجه دو $f(x) = ax^2 + bx + c$ بالای محور x ها باشد آنگاه:

ب) $x^2 < 16 \Rightarrow$

ج) $(x-2)^2 + |y-3x| + \sqrt{z-3} = 0$

د) $|x^2 - 25| + \sqrt{x^2 - 7x + 10} = 0$



۴) ترکیب شرطی دو گزاره: رابط شرطی " \Rightarrow " است که خوانده می‌شود: اگر آنگاه
در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. در غیر این صورت درست است.

مثال: گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه

ب) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه

۵) ترکیب دو شرطی دو گزاره: رابط دو شرطی " \Leftrightarrow " است که خوانده می‌شود: اگر آنگاه و برعکس، p شرط لازم و کافی برای q است.

P اگر و تنها اگر q ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هر دو مؤلفه آن هم‌ارزش باشند. در غیر این صورت نادرست است.

مثال: گزاره‌های دو شرطی زیر را کامل کنید.

الف) اگر مثلثی سه ضلع برابر داشته باشد آنگاه

ب) چهار ضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش

جدول ارزش ترکیب گزاره‌ها:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				





مثال: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 \leq 5) \wedge (5 + 7 = 12)$

ب) دهلی نو در آسیا واقع شده است یا پاریس در امریکای جنوبی است.

ج) اگر ۱۰ بر ۳ بخش پذیر باشد آنگاه جدّه پایتخت عربستان است و برعکس.

د) $2 > 5 \Leftrightarrow -2 < -5$

هـ) اگر $5 \geq 3$ آنگاه سینوس در ربع دوم منفی است.

و) اگر شاهنامه سروده نمی‌شد، زبان فارسی از بین می‌رفت.

ز) $a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b$

مثال: اگر ارزش p و $\sim(p \wedge \sim q)$ درست باشند ارزش q را تعیین کنید.

مثال: اگر ارزش گزاره‌های $(q \wedge m)$ و $(q \wedge \sim m)$ درست باشند ارزش r را تعیین کنید.

مثال: اگر $p \vee q \equiv F$ و $\sim q \Rightarrow s \equiv T$ باشد، نشان دهید $(s \Leftrightarrow p) \Rightarrow q \equiv s$

مثال: اگر گزاره‌ای درست باشد ارزش گزاره $[(r \wedge \sim p) \vee p] \vee q$ چیست؟

مثال: در هر مورد ارزش گزاره‌های p, q, r, s را تعیین نمایید.

۱) $\sim[p \wedge (p \Leftrightarrow q)] \equiv F$

۲) $\sim p \wedge (p \Leftrightarrow q) \equiv T$

۳) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv F$

۴) $p \vee [\sim(q \wedge r)] \equiv F$

۵) $[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee r)] \equiv F$

۶) $[\sim(r \Rightarrow (p \vee \sim q))] \wedge [\sim r \Leftrightarrow (q \wedge s)] \equiv T$



اثبات هم‌ارزی به کمک جدول ارزش

مثال: هم‌ارزی های زیر را به کمک جدول ثابت کنید.

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ج) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

هـ) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

ح) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

ی) $p \wedge \sim p \equiv F$

ل) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ن) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

ع) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ص) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

ر) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

د) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

و) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$

ط) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

ک) $p \vee \sim p \equiv T$

م) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

س) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

ف) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ق) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

ش) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$





قوانین جبر گزاره‌ها:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee r$$

۱. شرکت پذیری

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۲. جابجایی

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge T \equiv p$$

۳. عضو خنثی

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

۴. عضو وارون

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۵. توزیع پذیری

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

۶. عضو غالب

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

۷. دمورگان

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

۸. خود نمایی

(تکرار)

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

۹. جذب

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

۱۰. شبه جذب

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

۱۱. نقض مضاعف

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

۱۲. قانون شرطی

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

۱۳. قانون دو شرطی





اثبات به کمک قوانین

مثال: هم‌ارزی‌های زیر را به کمک قوانین جبر گزاره‌ها ثابت کنید.

الف) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ب) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

ج) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

د) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv T$

هـ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)] \vee p \equiv T$

و) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv T$

ز) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ح) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q] \equiv T$

ط) $(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow q) \equiv T$

ی) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ک) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \equiv \sim p$

ل) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow p)$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) چین در اروپاست و $\pi > 3$

ب) ۳۵ بر ۳ یا ۴ بخش پذیر است.

ج) اگر دمای هوا کاهش یابد، لباس گرم می‌پوشیم.

د) اگر صبر کنیم آنگاه موفق می‌شویم و به هدف خود می‌رسیم.

هـ) اگر مثلثی سه ضلع برابر داشته‌باشد، آنگاه سه زاویه برابر دارد و برعکس.

و) چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر اقطارش همدیگر را نصف کنند.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \Rightarrow q$

ب) $(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$

ج) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

د) $\sim p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

هـ) $[p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p)] \wedge (r \wedge p)$

و) $[(q \wedge \sim p) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim q$





نکات تکمیلی

تذکره ۱: «یا» در محاورات فارسی با «یا» در منطق و ریاضی متفاوت است.

یای عرفی (یای غیر شامل، Exclusive or): جمع دو مؤلفه (درستی هر دو مؤلفه) ممکن نیست یا مورد نظر نیست.

من چای یا قهوه می‌خورم. زمین یا کشاورزی است یا بایر.

یای منطقی (یای شامل، Inclusive or):

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$

تذکره ۲: گزاره‌ای را که مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همیشه درست باشد، گزاره همیشه درست می‌نامیم. مانند

$$p \vee \sim p, p \Rightarrow p$$

تذکره ۳: گزاره‌ای را که مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همیشه نادرست باشد، گزاره همیشه نادرست می‌نامیم. مانند

$$p \wedge \sim p$$

تذکره ۴: در یک ترکیب شرطی، اگر مقدم نادرست باشد، ترکیب شرطی همواره درست است. در این صورت اصطلاحاً می‌گوییم: ترکیب شرطی به انتفاء مقدم درست است.

تذکره ۵: در یک ترکیب شرطی، اگر تالی درست باشد، ترکیب شرطی همواره درست است. در این صورت اصطلاحاً می‌گوییم: ترکیب شرطی به اثبات تالی درست است.

مثال: گزاره‌های زیر به انتفاء مقدم درست هستند.

الف) اگر نادر شاه فرزندش را کور نمی‌کرد، سلسله افشاریه استمرار می‌یافت.

$$(p \wedge (p \vee q)) \wedge \sim p \Rightarrow r \quad (\text{ب})$$





تذکره ۶: گزاره $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نام دارد.

توجه: عکس ترکیب شرطی با خود آن لزوماً هم‌ارز نیست. اما عکس نقیض ترکیب شرطی با خود آن هم‌ارز است.

مثال: عکس نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

(الف) اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود.

(ب) اگر عددی مضرب ۳ باشد، مکعب آن نیز مضرب ۳ است.

(ج) اگر مدارس تعطیل شوند آنگاه (تعطیل رسمی است یا برف آمده‌است یا هوا آلوده شده‌است یا کرونا شیوع پیدا کرده‌است).

(د) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

مثال: اعتبار استدلال‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) هر دیکتاتور ظالم است. هیتلر ظالم است. پس هیتلر دیکتاتور است.

(ب) اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه $\sqrt{2} + 1$ گنگ است. $\sqrt{2} + 1$ گویا است. پس $\sqrt{2}$ گویاست.

تذکره ۷: گاهی اثبات عکس نقیض یک گزاره از اثبات خود آن گزاره ساده‌تر است.

مثال: ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است.

مثال: ثابت کنید اگر n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.



مثال: ثابت کنید هر عدد اول بزرگتر از ۳ به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k+5$ است.

گزاره نما: جملات خبری که در آنها متغیر وجود دارد.

مثال: عبارات زیر گزاره نما است.

(۱) p عددی اول است.

(۲) x از شاعران ایرانی است.

(۳) در پرتاب دو تاس، احتمال اینکه مجموع دو تاس x باشد، $\frac{1}{8}$ است.

$$(۴) \quad 3x^2 + x = 7$$

تذکره ۱: گزاره نماها گزاره نیستند. زیرا به واسطه وجود متغیر نمی‌توانیم به آن ارزشی نسبت دهیم.

تذکره ۲: گزاره نماها می‌توانند یک متغیره، دو متغیره و باشند.

دامنه متغیر (Domain of Variable): مجموعه مقادیری که با قرار دادن آنها به جای متغیر گزاره نما، گزاره نما به گزاره تبدیل می‌شود.

مثال: دامنه متغیر کدامیک از گزاره نماهای زیر را می‌توان مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفت؟

$$(۲) \quad \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$(۱) \quad \sqrt{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$(۴) \quad \frac{x+1}{|x|+1} \in \mathbb{N}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{x-1} \geq \frac{x}{x+1}$$

مجموعه جواب (Answer Set): مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها گزاره نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. ($S \subseteq D$)

به عنوان مثال مجموعه جواب گزاره نمای $3x - 5 = 1$ ، مجموعه تک عضوی $S = \{2\}$ می‌باشد.





مثال: مجموعه جواب گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt{x-2} = 5$

ب) $2x - 2 \leq x + 1$

ج) $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{N}$

د) باقیمانده تقسیم x بر ۴ برابر ۳ است.

هـ) احتمال این که در پرتاب یک تاس پیشامد A رخ دهد، $\frac{1}{3}$ است.

ه) $\frac{2x+1}{x+2} \in \mathbb{Z}$

سور

عبارت‌های «همه / هر / به ازای جمیع مقادیر» و «به ازای بعضی مقادیر / بعضی / وجود دارد»، «به ازای هیچ مقدار» سور نام دارند.

نکته مهم: سورها قبل از گزاره‌ها قرار می‌گیرند و آن را به گزاره تبدیل می‌کنند.

گزاره‌های زیر شامل سور هستند:

عددی طبیعی که در معادله $x^2 - 16 = 0$ صدق کند وجود دارد.

هر مستطیلی یک مربع است. بعضی از معلم‌ها مجرد هستند.

بعضی از اعداد گنگ منفی هستند.

همه اسب‌ها شیشه می‌کشند.

گزاره مسوّر به سور می‌تواند دارای ارزش نادرست باشد:

همه متوازی‌الاضلاع‌ها اقطار برابر دارند.

بعضی اعداد صحیح، گنگ هستند.

همه اعداد اول فرد هستند.

هر آسیایی ایرانی است.





انواع سور:

۱. سور عمومی: با نماد \forall نمایش داده می‌شود و خوانده می‌شود: « به ازای هر، به ازای جمیع مقادیر، همه، هر » گزاره شامل سور عمومی زمانی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند. به عبارت دیگر مثال نقض نداشته‌باشد.

۲. سور وجودی: با نماد \exists نمایش داده می‌شود و خوانده می‌شود: « وجود دارد، به ازای بعضی از مقادیر، بعضی » گزاره شامل سور وجودی زمانی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

تذکر: بهترین روش تعیین ارزش گزاره‌های شامل سور، ترجمه آنها به فارسی است.

مثال: گزاره‌های زیر را به فارسی بنویسید و ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 - 9 = 0$

ج) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq x$

د) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 0$

هـ) $\forall x \in \mathbb{Z}, x(x+1) = 2k$

و) $\exists x \in \mathbb{N}, 4x^2 + 5x + 1 = 0$

ز) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

ح) $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = \cot x$

ط) $\forall x \in \mathbb{O}, x^2 = 8k + 1$

ی) $\exists a \in \mathbb{P}, a = 2k$

ک) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2^x$

ل) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 9 > 6x$

تذکر: E نماد مجموعه اعداد فرد، O مجموعه اعداد زوج و P مجموعه اعداد اول است.





نقیض سورها:

نقیض گزاره

گزاره

$$\forall x \in A, P(x)$$

$$\exists x \in A, P(x)$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

ب) $\forall x \in \mathbb{Z}, x(x+1) = 2k$

ج) $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = \cot x$

د) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 0$

هـ) $\exists a \in P, a = 2k$

و) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = \sqrt{2}$

ح) مکعب بعضی اعداد حقیقی برابر خود آن عدد است.

ز) هر ایرانی آسیایی است.

ی) به ازای هر عدد a ، اگر a زوج باشد آنگاه $a+1$ فرد است.

ط) بعضی از دانش‌آموزان، پزشک یا مدیر خواهند شد.

ل) بعضی از انسان‌ها، اگر محبت ببینند، محبت می‌کنند.

ک) همه حیوانات اگر به آنها غذا دهیم، با ما دوست می‌شوند.

تذکرا: در فارسی نقیض سور وجودی معمولاً با «وجود ندارد/هیچ» بیان می‌شود. گاهی نیز با سور عمومی بیان می‌شود که در این صورت بهتر است نقیض گزاره با فعل مثبت به کار رود.

مثال: بعضی از پسرها دروغ می‌گویند.

نقیض: هیچ پسری دروغ نمی‌گوید. / همه پسرها راست می‌گویند.

مثال: بعضی از ورزشکاران تحصیل کرده هستند.



نقیض: هیچ ورزشکاری تحصیل کرده نیست. / همه ورزشکاران تحصیل نکرده هستند.

تذکره ۲: اگر گزاره‌نمایی با سور عمومی به گزاره درست تبدیل شود، آنگاه با سور وجودی نیز به گزاره درست تبدیل می‌شود.

مثال: هر کتابی نویسنده دارد. / بعضی کتاب‌ها نویسنده دارند. (وجود دارد کتابی که نویسنده دارد)

همه انسان‌ها دوپا دارند. / بعضی انسان‌ها دو پا دارند. (وجود دارد انسانی که دو پا دارد).

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و نقیض آن‌ها را بنویسید.

الف) $\exists x \in \mathbb{R}^-, x + \frac{1}{x} \leq -2$

ب) $\exists x \in \mathbb{N}, 4x^2 + 4x + 1 = 0$

ج) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 1 + y^2 \geq 0$

د) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = 6k$

ه) $\forall a \in \mathbb{R}, \frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$

و) $\forall x, y \in \mathbb{Q}', x + y \in \mathbb{Q}'$

ز) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 = 2k \Rightarrow n = 2k$

ح) $\forall x \in \mathbb{R}, \tan x \cdot \cot x = 1$

ط) $\exists x \in \mathbb{N}, \sqrt{2-x} \in \mathbb{N}$

ی) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \in \mathbb{P}$

ک) $\exists n \in \mathbb{N}, 3^n < n!$

ل) $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x-2} = 0$

م) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

مثال: نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}, -2 < x + \frac{1}{x} \leq 2) \vee (\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \in \mathbb{N})$ را بنویسید.

مثال: نقیض گزاره « همه وزرا عضو هیئت دولت هستند و بعضی وزرا عضو شورای عالی امنیت ملی هستند. » را بنویسید.





مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ دامنه متغیر گزاره‌ها باشد، ارزش گزاره‌های مسور زیر را بررسی کنید.

$$\forall x \in A, x^2 - 6x + 5 \leq 0 \quad (۲)$$

$$\exists x \in A, x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (۱)$$

$$\exists x \in A, 2^x = x^2 + 3 \quad (۴)$$

$$\forall x \in A, x^2 > x \quad (۳)$$

مثال: گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید. سپس نقیض آنها را به فارسی بیان کنید.

(الف) حاصل جمع هر عدد گویا با $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

(ب) به ازای جميع مقادیر a عدد 3 شمارنده $a(a^3 - 1)$ است.

(ج) عدد گنگی وجود دارد که اگر به توان $\sqrt{2}$ برسد، گویا شود.

(د) مجموع مکعبات هر سه عدد صحیح متوالی، مضرب 9 است.

مثال: گزاره‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید و ارزش آنها را تعیین کنید.

(الف) $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = \cot x$

(ب) $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

(ج) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(د) $\exists x \in \mathbb{Q}, x \times \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

