



مرور مجموعه سال دهم آشنایی با چند مجموعه معروف

$$\mathbb{N} =$$

$$\mathbb{Z} =$$

$$\mathbb{W} =$$

$$\mathbb{Q} =$$

$$\mathbb{R} =$$

$$\mathbb{Q}' =$$

مجموعه متناهی / نامتناهی:

مثال: کدامیک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

الف) اعداد گویای بین صفر و یک

ب) مضارب طبیعی عدد ۲۳

ج) کسرهای منفی با صورت ۲۰

د) مولکول‌های آب کره زمین

هـ) اعداد صحیح فرد

و) $[-۲, ۵]$

ز) $\left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{۳۰}{x} \in \mathbb{N} \right\}$

ح) تمام دایره‌ها به مرکز $(-۲, ۱)$

۲) مجموعه تهی $(\emptyset, \{\})$: عضوی ندارد.

دو مجموعه خاص: ۱) مجموعه مرجع (U)

متمم A :

یادآوری چند رابطه:

$$\emptyset' =$$

$$U' =$$

$$A \cup A' =$$

$$A \cap A' =$$

$$(A')' =$$

$$(A \cup B)' =$$

$$(A \cap B)' =$$

$$A - B =$$

$$n(A \cup B) =$$



دو مجموعه جدا از هم:

مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۷ نفر به شنا و ۱۰ نفر به کوهنوردی علاقه‌مند هستند. اگر ۳ نفر به هیچ‌یک از این دو ورزش علاقه‌مند نباشند، چند نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند؟

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر $A \subseteq B$ باشد و B نامتناهی باشد، A هم نامتناهی است.

(ب) اگر $A \subseteq B$ باشد و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.

(ج) اگر A نامتناهی باشد، A' متناهی است.

(د) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، A و B نامتناهی هستند.

عضو بودن

$r \in A$ یعنی r عیناً در مجموعه A هست.

مثال: مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| < 3\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{N} \mid m^3 = 9m\}$$

$$C = \left\{ \frac{x}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 = 0, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$



زیرمجموعه

تعریف زیرمجموعه بودن:

زیرمجموعه نبودن:

مثال: همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, \{3\}\}$ را بنویسید.

مثال: همه زیرمجموعه‌های مجموعه $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ را بنویسید.

مثال: اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{\{1\}\}\}$ باشد، درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

$$\{1, 2\} \in A$$

$$\{1, \{2, 1\}\} \in A$$

$$\{1, \{2\}\} \in A$$

$$\{1\} \in A$$

$$\{\{1\}\} \in A$$

$$\{\{1\}, 2\} \in A$$

$$\{1, 2\} \subseteq A$$

$$\{1, \{1, 2\}\} \subseteq A$$

$$\{1, \{2\}\} \subseteq A$$

$$\{1, \{1\}\} \subseteq A$$

$$\{\{1\}\} \subseteq A$$

$$\{2, \{\{1\}\}, \{2\}\} \subseteq A$$

مثال: فرض کنید $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(ج) $\{\emptyset\} \in A$

(و) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

(ط) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \subseteq A$

(ب) $\emptyset \in A$

(هـ) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$

(ح) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \in A$

(الف) $\emptyset \subseteq A$

(د) $\{\{\emptyset\}\} \in A$

(ز) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \subseteq A$



مثال: سه مجموعه A, B, C را به گونه‌ای مثال بنزید که روابط زیر همگی بین آنها برقرار باشد.

$$A \in B, A \subseteq B, B \subseteq C, A \in C$$

مثال: مجموعه‌ای نامتناهی مثال بنزید که هر عضو آن زیرمجموعه آن نیز باشد.

ویژگی‌های زیر مجموعه

ویژگی ۱: هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش هست.

اثبات:

ویژگی ۲: تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای هست.

اثبات:

ویژگی ۳: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

اثبات:

ویژگی ۴: هر مجموعه n عضوی 2^n زیرمجموعه دارد.

اثبات:

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+1$ عضوی، 384 عدد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-1$ عضوی است. k چقدر است؟



مثال: تعداد اعضای یک مجموعه را دو برابر کرده‌ایم. به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۴۰ عدد افزوده شده است. این مجموعه چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

مثال: مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که :

الف) ۲ عضو آن باشد و هیچ یک از ۵ و ۷ عضو آن نباشد؟

ب) کوچکترین عضو آن ۳ و بزرگترین عضو آن ۸ باشد؟

ج) چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

د) چند زیرمجموعه فرد عضوی دارد؟

هـ) چند زیرمجموعه سه عضوی دارد به طوری که هیچ دو عدد متوالی در آن نباشند؟



اَعمال روی مجموعه‌ها

۱. اشتراک:

۲. اجتماع:

۳. تفاضل:

۴. متمم:

مثال: اگر $A = \{1, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{2\}\}$ (الف) $A - B$ و $B - A$ را بنویسید.

(ب) چند مجموعه مانند X وجود دارد به طوری که: $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ ؟

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ و B مجموعه شامل همه زیرمجموعه‌های A باشد، $B - A$ را بنویسید.



ادامه ویژگی‌های زیرمجموعه

ویژگی ۵: برای هر دو مجموعه دلخواه A, B داریم: $A \subseteq A \cup B$
اثبات:

ویژگی ۶: برای هر دو مجموعه دلخواه A, B داریم: $A \cap B \subseteq A$
اثبات:

ویژگی ۷: برای هر دو مجموعه دلخواه A, B داریم: $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$
اثبات:

ویژگی ۸: $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$
اثبات:

ویژگی ۹: $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
اثبات:



افراز یک مجموعه

مثال: همه افرازهای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

تعریف: گوئیم A به n زیر مجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱)

(۲)

(۳)

مثال: در هر مورد بررسی کنید که آیا مجموعه‌های داده شده افرازی برای مجموعه مرجع محسوب می‌شوند یا خیر.

الف) A, A'

ب) $A - B, A \cap B, B - A$

ج) $A' - B, A \cup B$

د) $B, B - A, A' \cap B'$

مثال: همه افرازهای مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ را بنویسید.



مثال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را به چند طریق می‌توان:

(الف) به یک مجموعه دو عضوی و یک مجموعه سه عضوی افراز کرد؟

(ب) افراز کرد به طوری که دقیقاً یک زیر مجموعه تک عضوی داشته باشیم؟

(ج) افراز کرد به طوری که ۱، ۲ هم دسته باشند؟

(د) افراز کرد؟

مثال: یکی از افرازهای مجموعه A به صورت $\{a\}, \{\{a, b\}\}, \{b\}, \{c\}$ است. مجموعه A چند افراز دارد؟



تساوی دو مجموعه

تعریف:

۲. تکرار اعضا در مجموعه مهم نیست.

نتایج: ۱. ترتیب اعضا در مجموعه مهم نیست.

ویژگی ۱: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
اثبات:

ویژگی ۲: اگر $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$
اثبات:

ویژگی ۳: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
اثبات:

ویژگی ۴: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
اثبات:



قوانین جبر مجموعه‌ها:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

۱. شرکت پذیری

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

۲. جابجایی

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

۳. عضو خنثی

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

۴. عضو وارون

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

۵. توزیع پذیری

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

۶. عضو غالب

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

۷. دمورگان

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

۸. خود نمایی
(تکرار)

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

۹. جذب

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

۱۰. شبه جذب

$$(A')' = A$$

۱۱. متمم متمم

$$A - B = A \cap B'$$

۱۲. قانون تفاضل



اثبات قوانین جبر مجموعه‌ها:

* برخی از قوانین به کمک معادل گزاره‌ای خود اثبات می‌شوند. مانند شرکت‌پذیری، جابجایی، عضو خنثی، توزیع‌پذیری، دمورگان، تکرار، جذب، شبه جذب
مثال: قانون دمورگان و توزیع‌پذیری را ثابت کنید.

* برخی از قوانین به کمک تعریف ثابت می‌شوند. مانند متمم متمم و قانون تفاضل.
مثال: قانون متمم متمم را ثابت کنید.

* برخی از قوانین به کمک برهان خلف ثابت می‌شوند. مانند عضو وارون و عضو غالب
مثال: قانون های $A \cup U = U$ و $A \cap A' = \emptyset$ را ثابت کنید.

* برخی از قوانین به کمک سایر قوانین اثبات می‌شوند مانند جذب و شبه جذب.
مثال: قوانین جذب و شبه جذب را ثابت کنید.



مثال: با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، ثابت کنید:

الف) $(A \cup B) \cap (A \cup B)' = A$

ج) $(A \cup B)' \cap ((A \cap B \cap C) \cup (B' \cup A)) = (A \cup B)'$

هـ) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

ز) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ط) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ک) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

م) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

س) $\{[(A \cup B) - A'] \cup [B \cup (A - B')]\} - A' = A$

ف) $(B \cup C) - (C \cup D) = (B - C) - D$

ب) $(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap (A \cup B) \cap B) = B$

د) $A - B = B' - A'$

و) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = B$

ح) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ی) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ج) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ن) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B' \cap (A \cup B)] = A$

ر) $[A - (B \cap C)]' = (A - B)' \cap (A - C)'$

ص) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

مثال: درستی رابطه $A - (B - C) = (A - B) - C$ را با مثال، نقض کنید.

مثال: ثابت کنید:

الف) $(A \subseteq B \wedge A \subseteq B') \Rightarrow A = \emptyset$

ب) $(A \subseteq B \wedge A' \subseteq B) \Rightarrow B = U$

مثال: ثابت کنید: $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$



مثال: ثابت کنید: $(A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$

مثال: ثابت کنید: $(A \cap B = A \cap C, B - A = C - A) \Rightarrow B = C$

مثال: سه مجموعه A, B, C را در نظر بگیرید. هر یک از مجموعه‌های زیر را به کمک اجتماع، اشتراک، متمم و تفاضل بنویسید و آن را با نمودار ون نمایش دهید.

(الف) اعضای که در A هستند ولی در هیچ یک از B, C نیستند.

(ب) اعضای که لااقل در یکی از سه مجموعه هستند.

(ج) اعضای که در هیچ یک از سه مجموعه نیستند.

(د) اعضای که حداکثر در یکی از سه مجموعه هستند.

(ه) اعضای که دقیقاً در یکی از سه مجموعه هستند.

(ز) اعضای که دست کم در دو مجموعه از سه مجموعه هستند.



ضرب دکارتی دو مجموعه

یادآوری: زوج مرتب

تعریف ضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

تذکره ۱:

تذکره ۲:

مثال: اگر $A = \{۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۱, ۴\}$ و $C = (۰, ۲]$ و $D = \{x \in \mathbb{R} | |x| < ۱\}$ باشد حاصل $A \times B$ و $B \times C$ و $D \times C$ را در دستگاه مختصات نمایش دهید.

مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

الف) $[۲, ۳] \times [-۲, ۱۰] \cap [-۱, ۴] \times (۳, ۵]$

ب) $[-۱, ۲) \times (۳, +\infty) \cup (-\infty, ۰] \times \mathbb{R}^+$

ج) $[-۲, ۲)^2 - (-۱, ۱]^2$

د) $\mathbb{Z} \times (۲, ۴] - (۲, ۴] \times \mathbb{Z}$

هـ) $[۰, ۳] \times [-۲, ۲] - [۲, ۴] \times (۱, ۵]$

و) \mathbb{R}^2



مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 1\}$ مجموعه $A^2 - A \times (A \cap B) - (A \cup B)$ را با اعضا نمایش دهید و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کنید.

مثال: اگر $A_n = (\frac{-3}{n}, \frac{6n-3}{n})$, $B = \{-n | [\frac{10}{2n+1}] > 0, n \in \mathbb{N}\}$ نمودار مجموعه‌های $(A_1 \times A_2) \cap (A_2 \times A_3)$ و $B \times A_1$ را در صفحه مختصات دکارتی رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

مثال: اگر $A = [-1, 3]$ و $B = [1, 5]$ باشند، مساحت مجموعه $B \times A - A^2$ چقدر است؟

مثال: ثابت کنید:

(الف) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(ب) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ج) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

(د) $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$



مثال: اگر $A = \{2y+x, 2, 4\}, B = \{2, x-y\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، بیشترین مقدار $x^2 + y^2$ را به دست آورید.

مثال: درستی احکام زیر را ثابت کنید:

الف) $A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

ب) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$

ج) $(A \times B) \cap (A \times B') = \emptyset$

د) $(A \cap B)^2 = (A \times B) \cap (B \times A) = A^2 \cap B^2$

هـ) $(A \times B') \cap (B' \times A) = (A - B)^2$

و) $|A^2 \cup B^2| = |A|^2 + |B|^2 - |A \cap B|^2$

مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 50\}$ و $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $(A \times B) \cap (B \times A)$ را به دست آورید.

مثال: اگر A دارای ۶ عضو و B دارای ۳ عضو و $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشند، مجموعه $(A \cap B') \times (A \cup B)$ چند عضو دارد؟