

«آمار و احتمال»

«فصل یک»

«درس یک»

8

* آشنایی با منطق ریاضی ←

گزاره
ارزش گزاره

گزاره غا

استدلال

10

11

گزاره: جمله ای خبری که ارزش آن درست یا نادرست است.

مثال: ۲ عددی زوج است. گزاره است. و ارزشش درست است.

12

مثال: مدرسه ما بزرگ است. گزاره نیست چون بزرگی تعریفی نسبی است و همه متفق القول

13

نیستند و وقتی گزاره نیست ما برای ارزش آن تعین نمی کنیم.

مثال: اعداد اول فردند. گزاره است و ارزشش متفق است.

14

نکته: جملات پرسشی، امری، عاطفی گزاره محسوب نمی شوند.

نکته: هر عدد طبیعی که جز به خودش و یک، بر عدد دیگری بخش پذیر باشد، مرکب است. مثال: ۴

15

نکته: گزاره ها را معمولاً با p, q, r, s نشان می دهند.

16

نکته: اگر n گزاره داشته باشیم جدول ارزش گزاره ها دارای 2^n سطر است.

17

مثال: اگر p گزاره q و r مفروضه باشد و بدانیم ارزش r نادرست است. ارزش گزاره این

گزاره ها چند حالت دارد؟ $2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 16$

18

تعیین یک گزاره: تعیین گزاره p را به صورت $\sim p$ نشان می دهند.

19

p | $\sim p$

\sim | p

p | \sim

20

ش ی ل س چ پ ج

۱	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲
۹	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹
۱۶	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶
۲۳	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳
					۲۱	۲۰	

نکته: برای تقریر کردن یک جمله می توانیم عبارت "چنین نیست که" را اول

جمله آورده و یا فعل متقا را مثبت کرده و فعل مثبت

بر آن چشم به صد آفرین باد که در عاشق کشتی سحر آفرین است

راستی کرده و یا از نظر مفهومی نقص کرده.

EX 8 تعین جملات زیر را بنویسید.

الف ۲ عدد در گویا است. (در محدوده اعداد صحیح) $\frac{2}{3}$ ضمیم نیست که ۲ عدد در گویا است.

ب ۲ عدد در گویا نیست.

ج ۲ عدد در گنگ است.

د $\frac{2}{3}$ عدد نجف در ایران است. $\frac{2}{3}$ ضمیم نیست که $\frac{2}{3}$ عدد نجف در ایران است.

ه $\frac{2}{3}$ عدد نجف در ایران نیست.

و $\frac{2}{3}$ عدد نجف در عراق است.

ز اعداد اول فردند. $\frac{2}{3}$ ضمیم نیست که اعداد اول فردند.

ح (در محدوده اعداد صحیح) اعداد اول فرد نیستند.

ط اعداد اول زوج هستند.

EX 9 تعین گزاره صادر بنویسید.

الف سه عدد فرد است. (در محدوده اعداد طبیعی) سه عدد زوج است.

ب $\frac{2}{3}$ ضمیم نیست که سه عدد فرد است.

ج سه عدد فرد نیست.

$p \vee q$

$p \wedge q$

$p \Rightarrow q$

$p \Leftrightarrow q$

فعلی (یا) \vee

عطفی (و) \wedge

شروطی (اگر... آنگاه) \Rightarrow

دو شرطی (اگر و تنها اگر) \Leftrightarrow

۱۷ ترکیب گزاره ها

نکته: اگر چند گزاره با هم ترکیب فعلی داشته باشند و ارزش مدعا را یک گزاره درست باشد، ارزش کل گزاره فعلی درست است.

نکته: در ترکیب فعلی چند گزاره اگر ارزش تمام گزاره ها نادرست باشد، ارزش کل گزاره نادرست است.

ش ی د س چ پ ج

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲

۵ روز رفته ۳۶۱ روز مانده

بت چینی صدوی دین و دلهاست خداوند اول و دینم نگه دار

P
>
N

P	q	$P \vee q$
>	>	>
>	N	>
N	>	>
N	N	N

جدول ارزش گزاره فصلی ←

نکته: در ترکیب عطفی زمانی ارزش گزاره درست است که ارزش تمام گزاره ها یکی که بین آن ها دو است و درست باشد.

P	q	$P \wedge q$
>	>	>
>	N	N
N	>	N
N	N	N

جدول ارزش گزاره عطفی ←

P	q	$P \Rightarrow q$
>	>	>
>	N	N
N	>	>
N	N	>

جدول ارزش گزاره شرطی ←

نکته: در ترکیب شرطی گزاره ارزش گزاره همیشه درست است مگر آنکه فرض (مقدم) درست باشد و حکم (نتیجه) نادرست باشد.

$$= (P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P)$$

از طرف اول به طرف دوم برسم و بالعکس

P	q	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P)$
>	>	>	>	> *
>	N	N	>	N
N	>	>	N	N
N	N	>	>	> *

جدول ارزش گزاره

گزاره دوطرفی ←

ش ی د س ج پ ج

نکته: $P \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که ارزش P و q یکسان

۱
۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲
۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹
۲۲ ۲۱ ۲۰ ۱۹ ۱۸ ۱۷ ۱۶
۲۹ ۲۸ ۲۷ ۲۶ ۲۵ ۲۴ ۲۳
۳۶ ۳۵ ۳۴ ۳۳ ۳۲ ۳۱ ۳۰

۶ روز رفته ۳۶۰ روز مانده باشد.

ورای طاعت دیوانگان زمانا مطلب که شیخ مذہب ما عاقلی کند و اذانت

EX) اندکس گزاره های زیر را تعیین کنید

1) $P \Rightarrow \sim Q$

P	Q	$\sim Q$	$P \Rightarrow (\sim Q)$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د

2) $\sim P \vee Q$

P	$\sim P$	Q	$\sim P \vee Q$
د	ن	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	د
ن	د	د	د

3) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \wedge (Q \Rightarrow R)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

ش ی د س چ پ ج

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲

۷ روز رفته ۳۵۹ روز مانده

دمی باینخوان متفق باش نصیبت دان اموراتاقی

روز هنرهای نمایشی

	P	q	r	$\sim P$	$\sim r$	$q \wedge (\sim r)$	$\sim P \vee (q \wedge \sim r)$
۴) $\sim P \vee (q \wedge \sim r)$							
	د	د	د	ن	ن	ن	ن
	د	د	ن	ن	د	د	د
	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
	ن	د	د	د	ن	ن	د
	ن	د	ن	د	د	د	د
	ن	ن	د	د	ن	ن	د
	ن	ن	ن	د	د	ن	د

۱۲ * منطق (logic) : علم معالجه استدلال ها

* استدلال معتبر (valid) : استدلالی که اگر مقدمات آن درست باشد نتیجه آن نیز درست است.

مثال) کدام یک از نتیجه گیرها زیر معتبر است ؟

الف) هر کتابی نویسنده دارد بنابراین هر خانه نویسنده دارد. ✓

ب) هر غذایی یک نویسنده دارد. قورمه سبزی یک مارتینگ است. پس قورمه سبزی یک نویسنده دارد.

ج) زیدان در تیمی بهترین بازی ساز تاریخ فوتبال هستند. مسی بهترین بازی ساز تاریخ فوتبال نیست.

د) مسی زیدانم بهترین بازی ساز تاریخ فوتبال است. ✓

ه) هیچ مربع کاملی متقی نیست. ۲۵ مربع کامل است. پس ۲۵ متقی نیست. ✓

و) هیچ مربع کاملی متقی نیست. ۴- مربع کامل است. پس ۴- متقی نیست. ✓

۱۷ در مواردی که فرض را می‌کنیم قبول می‌کنیم که فرض درست است و حکم کرده که از دل فرضها حکم سوال

درست صیاد یا خنجر. یعنی قدر نیست که فرض ما از لحاظ عقلی درست باشد ماقصود درست فرض می‌کنیم.

۱۸ استدلال معتبر استدلالی نیست که نتیجه آن درست باشد بلکه استدلالی است که نتیجه گیر آن درست باشد.

و هر تیمی که اولین تیم صعود کرده به جام جهانی باشد قهرمان جام جهانی می‌شود. ایران اولین تیم صعود کرده به

جام جهانی است. بنابراین ایران قهرمان جام جهانی می‌شود. ✓

ز اگر باران بیارد زمین خیس می‌شود. زمین خیس شده است. بنابراین باران باریده است.

ح اگر باران بیارد زمین خیس می‌شود. فردا باران می‌بارد. بنابراین فردا زمین خیس می‌شود. ✓

ب همه انسان ها حیوان هستند. گربه کوچک مایک حیوان است. بنابراین گربه کوچک مایک انسان است.

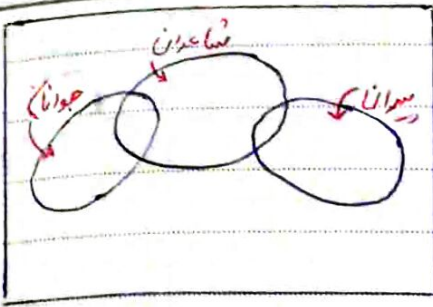
ک بعضی از جوانان سعد می‌سازند. بعضی از سزایندگان سعد می‌سازند. پس بعضی از جوانان سزایندگان سعد هستند.

۸ روز رفته ۲۵۸ روز مانده پس بعضی از جوانان سزایندگان هستند.

۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹

۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹

نگردید که سرواندر چمن حرکت می‌کنیم اندام را

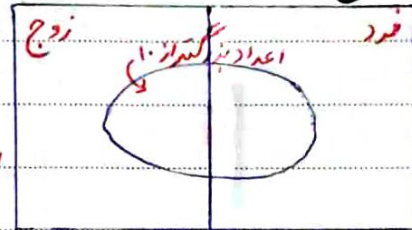


ک



ط

بعضی از اعداد زوج بزرگتر از ۱۰ است. بعضی از اعداد بزرگتر از ۱۰ فرد هستند. پس بعضی از اعداد زوج فرد هستند.



اعداد صحیح

تذکره ۱ - اعتبار یک استدلال به معنی درستی نتیجه آن نیست. بلکه به معنی درستی نتیجه گیری است.
 تذکره ۲ - هر استدلال از چند مقدمه و یک یا چند نتیجه تشکیل می شود. به مقدمات استدلال، مفروضات استدلال نیز گفته می شود.

P	~P	~(~P)
>	N	>
N	>	N

$P \equiv \sim(\sim P)$

اندازه گزاره P = اندازه گزاره ~(~P)

سوال ۱ / صفحه ۷ کتاب درسی

سوال ۲ / صفحه ۷ کتاب درسی

$a, b \in \mathbb{R}, ab=0 \Rightarrow (a=0) \vee (b=0)$

$[(2x-y)^2=0] \wedge [(x-1)^2=0] = 0$
 $(2x-y)^2 \geq 0$
 $2x-y=0$
 $2-y=0 \rightarrow y=2$

سوال ۹ / صفحه ۹ کتاب درسی

(a^2 عددی زوج است $\Rightarrow a$ عددی زوج است) \equiv (a عددی فرد است $\Rightarrow a^2$ عددی فرد است)

$a = 2k \rightarrow a^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$
 دلم خرازه اسرار بود دست قضا درش بست و کلیدش به دلستانی داد

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۱	۸	۷	۶	۵	۴	۳
۲	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰
۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷
۴	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴
۵	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱

$\Rightarrow a^2 = 2K^2 \rightarrow$ عددی زوج است

۸. ایزدگار گزاره‌ها را زیر را تعیین کرده.

۱. $p \Rightarrow p$

	p	p	$p \Rightarrow p$
همیشه درست	د	د	د
	ن	ن	د

۲. $(p \vee \sim p)$

	p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
همیشه درست	د	ن	د
	ن	د	د

۳. $(p \wedge \sim p)$

	p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
همیشه نادرست	د	ن	ن
	ن	د	ن

۹. سوال ۲ کار در کلاس / صفحه ۱۲ کتاب درسی

الف) قوانین جابجایی

$p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$ *	$q \vee p$ *
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$ *	$q \wedge p$ *
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ب) قوانین شرکت پذیری

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$ *	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$ *
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ش ی د س ج پ ج

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

P	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$ *	$(q \wedge r)$	$p \wedge (q \wedge r)$ *
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

قوانین توزیع بندیس (ب)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

P	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$ *	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

P	q	r	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$ *	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

روز رفته ۳۵۵ روز مانده ۱۱

بخش پذیری در کلمه و اعداد صحیح است.

باقی مانده: $0, 1, 2, \dots, k-1$

$$n \mid k$$

$$0 \leftarrow n = 2k \quad 1 \leftarrow 2k+1 \quad 2 \leftarrow 2k+2 \quad \overline{0 \ 1 \ 2 \ \dots}$$

توانینج (موردکلی)

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

$$(P \Rightarrow Q) \equiv \sim P \vee Q$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$ *	$\sim P$	$\sim P \vee Q$ *
>	>	>	ن	>
>	ن	ن	ن	ن
ن	>	>	ن	>
ن	ن	>	>	>

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P \equiv Q \vee \sim P \equiv \sim P \vee Q$$

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge R) \wedge Q$$

توزیع پذیری =>

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

وابطه دو طرفه است.

توزیع پذیری =>

$$\rightarrow P \wedge (Q \vee R)$$

* برای ثابت کردن هم ارزی بدون جدول

۱. از طرف اول شروع کرده و به طرف دوم برس.

۲. از طرف دوم شروع کرده و به طرف اول برس.

۳. عدد طرف راست را ساده کرده و نشان دهید مثل هم است.

۹ هر موقع خواستی هم ارزی را بدون جدول ثابت کنی همه آنگاه‌ها را به "یا" تبدیل کن چون تعیین روی
۱۰ یا نمی توان این کار است.



- ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.
- آیا $3+2$ برابر با 5 است؟
- هر عدد فرد بزرگتر از 5 را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
- هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
- صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با 5 است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است؛ بنابراین، هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

P
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول روبه‌رو چهار حالت دارد.

$$\frac{2}{p} \times \frac{2}{q} = 4$$

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p ، q و r ، طبق جدول روبه‌رو $2^3=8$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$2^p \times 2^q \times 2^r = 8$$

برای اینکه در نوشتن حالات چنین را جایگذاری کل حالت را درست آورده

$$8 \div 2 = 4$$

در p 4 تا اول درست 4 تا دوم نادرست

$$4 \div 2 = 2$$

در q 2 تا اول درست 2 تا دوم نادرست و به همین ترتیب

$$2 \div 2 = 1$$

در r یکی درست یکی نادرست و به همین ترتیب

$8 \div 2 = 4$ $4 \div 2 = 2$ $2 \div 2 = 1$
~~د~~ ~~د~~ ~~د~~

- به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟
 - با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟

کار در کلاس

دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. ($D = \mathbb{Z}$)

ب) $15x^2 - 7x - 8 = 0$ ($D = \mathbb{R}$)

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ ($D = \{1, 2, \dots, 6\}$)



ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

۱. هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟
۲. آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.
- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. تعداد گزاره‌ها: ۲
 - عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است. تعداد گزاره‌ها: ۲
 - اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. تعداد گزاره‌ها: ۲
 - چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. تعداد گزاره‌ها: ۱
 - اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. تعداد گزاره‌ها: ۲

(از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p, q, r, \dots و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p, q, r, \dots و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

(نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد، در این صورت، ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.)

مثال: نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد»، یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا

نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به صورت روبه‌روست:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال^۱: جدول ارزش گزاره $(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.
حل:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

(همان طور که ملاحظه می کنید، در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $(\sim p)$ یکسان است. در این حالت می گوئیم: دو گزاره p و $(\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و می نویسیم: $(\sim p) \equiv p$.
در حالت کلی اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می نویسیم: $p \equiv q$ و می خوانیم: p هم ارز است با q .)

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت « $p \vee q$ » می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. در اینجا به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می شود. گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید:

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید، یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید».

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. اگر مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

بنابراین، ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه رو است.

مثال^۲: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \times b = 0$ در این صورت $a=0$ یا $b=0$ یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله ها استفاده می کنیم:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x+7) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x+7=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-7$$

۱ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همه حالت‌های ارزش دو گزاره $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** گفته می‌شود.

۲ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$ *	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$ *
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

مثال: مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$(2x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

حل: چون $(x - 1)^2 \geq 0$ و $(2x - y)^2 \geq 0$ بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$[(2x - y)^2 = 0] \wedge [(x - 1)^2 = 0] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

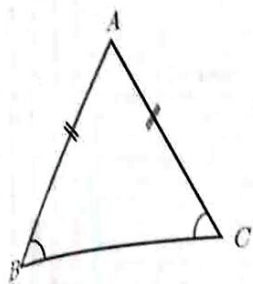
ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

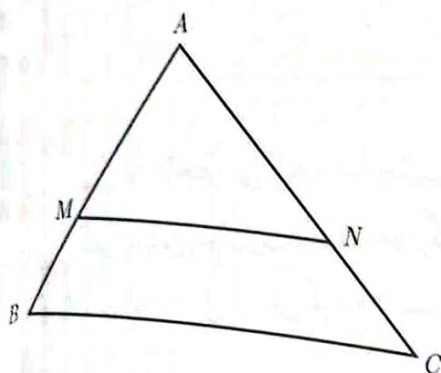
خواندنی

گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های « p شرط کافی برای q است» و « q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

تا به حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.



$$\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم: $MN \parallel BC$ آن گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

۳ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد، آن گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره مرکب

« $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.

در این حالت می‌گویند: ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست

باشد.

مثال: ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است، آن گاه $2 < 5$ » به انتفای مقدم

درست است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲ گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$ *	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$ *
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید:

(ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

(الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$ *
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

(ب)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$ *
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

(الف)

گزاره‌هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

(a^2 عددی زوج است $\Rightarrow a$ عددی زوج است) \equiv (a عددی فرد است $\Rightarrow a^2$ عددی فرد است)

اگر a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$ ، خواهیم داشت:

$$a^2 = (2k)^2 = 2k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k' \in \mathbb{Z}}) = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »

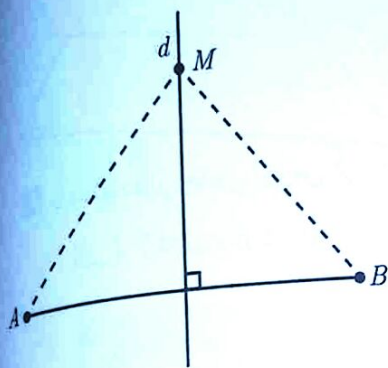
مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌هاست.

الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow 2 > 5$

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow \sqrt{2}$ عددی گویاست.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد.



$$[M \in d(\text{عمود منصف پاره خط } AB)] \Leftrightarrow MA = MB$$

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د *
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د *

با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

ب) قوانین شرکت پذیری

پ) قوانین توزیع پذیری

در زیر یکی از قانون‌های توزیع پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همه دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردویی گرد است». «هر مستطیلی یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاعی یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دسته یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج‌اند». «بعضی از دوزنقه‌ها، مستطیل‌اند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سوره معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.