۹۹/۵/۵

★ پایهٔ انتگرال:

محاسبه Δx با در نظر گرفتن تقریب نقصانی و اضافی: «نمودار های حرکت شناسی یک متحرک

| t | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | ۱۰ | ۱۵ | ۱۹ | ۲۲ | ۲۴ | ۲۵ |

$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \Delta x = \bar{V}\Delta t$

کران پائین — نُقصانی: $t[0,1] = 10 + t[1,2] = 15 + 19 + 22 + t[4,5] = 24 \cong 90\,m$

کران بالا — اضافی: $t[0,1] = 15 + t[1,2] = 19 + 22 + 24 + t[4,5] = 25 \cong 105\,m$

$\Rightarrow \underbrace{90}_{\text{مجموع پائین}} \leqslant \Delta x \leqslant \underbrace{105}_{\text{مجموع بالا}}$

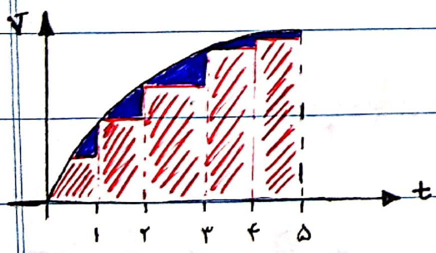
| t | ۰ | ۰٫۵ | ۱ | ۱٫۵ | ۲ | ۲٫۵ | ۳ | ۳٫۵ | ۴ | ۴٫۵ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | ۱۰ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷٫۵ | ۱۹ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۴٫۵ | ۲۵ |

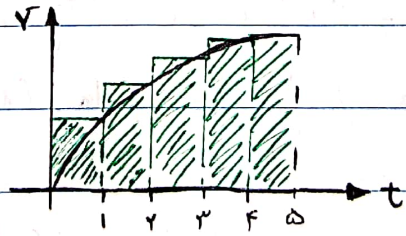
«چون بازه کوچک‌تر تقریب بهتر»

$94.5 \leqslant \Delta x \leqslant 102$

نقصانی: $0.5 \times 10 + 0.5 \times 13 + 0.5 \times 15 + \dots + 0.5 \times 24.5 = 94.5\,m$

اضافی: $0.5 \times 13 + 0.5 \times 15 + 0.5 \times 17.5 + \dots + 0.5 \times 25 = 102\,m$





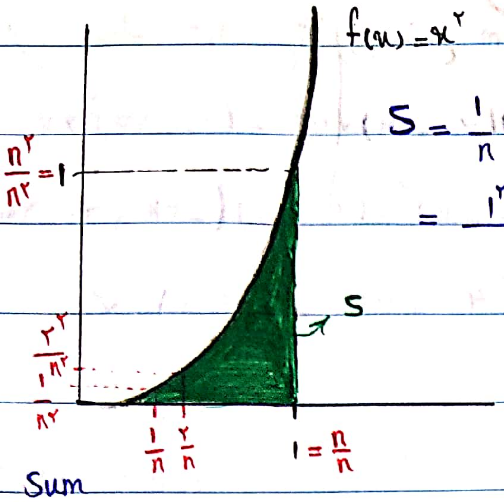
تقریب اضافی ⩾ سطح زیر نمودار ⩾ تقریب نقصانی

تقریب

نکته) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ERAM

مساحت حقیق زیر نمودار $x^2$ در بازهٔ $[0,1]$:




$$S = \frac{1}{n}\times\frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n}\times\frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n}\times\frac{3^2}{n^2} + \dots + \frac{1}{n}\times\frac{n^2}{n^2}$$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S \xrightarrow{\text{پرتوان}} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Sum

$\int 2x\,dx = x^2 + C$ «Anti Derivative» ۱) انتگرال نامعین (تابع اولیه) ← پادمشتق

$\int_{0\,\text{از}}^{1\,\text{تا}} x^2\,dx = \frac{1}{3}$ «Integral» ۲) انتگرال معین ← مساحت زیر نمودار

← تعریف انتگرال نامعین: $\int f(x)\,dx = F(x) \longrightarrow F'(x) = f(x)$

1) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ «عدد ثابت» $n \neq -1$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ 3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

4) $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$ 5) $\int e^x\,dx = e^x + C$ 6) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

1) $\int \underset{\text{ضریب}}{K} f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$ 2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ «قاعدهٔ تفکیک»

برای ضرب و تقسیم صادق نیست.

★ یادآوری: $e \simeq 2.718$ نپر - عدد اویلر ← $(e^x)' = e^x$ , $\log_e^x = \ln x \longrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \sin x + C$

$\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx = 3\times\frac{1}{6}x^6 + C = \frac{x^6}{2} + C$

$\int \frac{x^4-1}{x^5}\,dx = \int \frac{x^4}{x^5}\,dx - \int \frac{1}{x^5}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-5}\,dx = \ln x + \frac{1}{4}x^{-4}) + C$

$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\underset{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C =$

$\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$

$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ $\int \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} = \sqrt{3x-1} + C$

$$\frac{1}{5}\int 5\frac{dx}{2\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5x-2}+C$$

«تغییر متغیر در انتگرال‌گیری:»

$$\frac{3}{2}\int \underset{2x}{3x}\sqrt{\underset{=u}{(x^2+1)}}\,dx=\frac{3}{2}\int u'.u^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)+C=u^{\frac{3}{2}}+C=\sqrt{(x^2+1)^3}+C$$

بسته

$$\to 1)\int u^n.u'dx=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C \quad ,n\neq 1, \qquad 2)\int u'.\sin u\,dx=-\cos u+C$$

$$3)\int u'.\cos u\,dx=\sin u+C \qquad 4)\int u'e^u dx=e^u+C$$

$$5)\int\frac{u'}{u}dx=\ln u+C$$

$$\frac{1}{5}\int \underset{u'}{5}e^{\underset{u}{5x}}dx=\frac{1}{5}\int u'e^u dx=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{5x}+C$$

نکته) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ ⭑ مهم ⭑

$$\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\int 1\,dx}_{x}-\underbrace{\int\cos 2x\,dx}_{\frac{1}{2}\times\sin 2x}\Big)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$\int\tan x\,dx=-\int\frac{-\sin x\to u'}{\underset{u}{\cos x}}dx=-\ln(\cos x)+C$$

$$\int\sin 2x\cos^3x\,dx=\int 2\sin x\cos^4 x\,dx=-2\int\underbrace{-\sin x}_{u'}\underbrace{\cos^4 x}_{\cos x=u}dx=-2\int u'.u^4dx=$$

$$-2\times\left(\frac{1}{5}u^5\right)+C=-\tfrac{2}{5}\cos^5x+C$$

$$\int(x^6+x)^4dx=\int\left(x(x^5+1)\right)^4dx=\frac{1}{5}\int\underbrace{5x^4}_{u'}\underbrace{(x^5+1)}_{u}{}^4dx=\frac{1}{5}\int u'u^4dx=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}u^5+C=$$

$\dfrac{1}{25}(x^5+1)^5+C$ تابع اولیه

■ روش جزء به جزء:

$$(UV)'=U'V+V'U\to(UV)'-U'V=V'U\xrightarrow[\text{گیری}]{\text{انتگرال}}UV-\int U'V\,dx=\int V'U\,dx$$

$$\int\underset{u}{x}\,\underset{v'}{\sin x}\,dx=x(-\cos x)-\int 1(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=$$

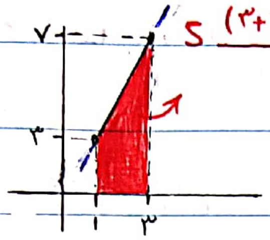
$$-x\cos x+\sin x+C$$

ERAM

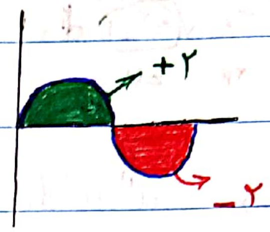
۹۹/۵/۶

■ **تعریف انتگرال معین:** مساحت علامت دار زیر نمودار تابع $f$ در بازهٔ $[a,b]$ را انتگرال معین $f$ در این بازه می‌نامند و با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می‌دهند. «همواره یک عدد است»

$$\int_1^3 (2x+1)\,dx = 10$$




$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

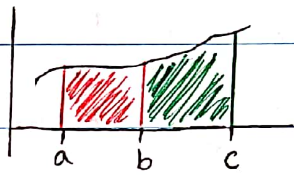



۱) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

۲) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

۳) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\Rightarrow$ کران بالا = کران پایین $\rightarrow$ ۰ = مساحت زیر نمودار

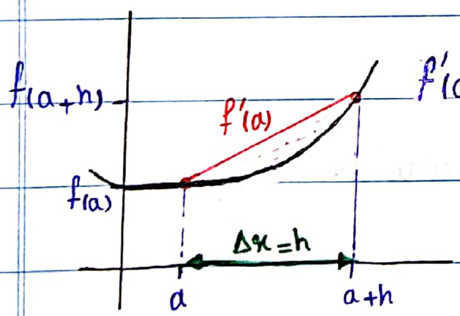
۴) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$




۵) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0$

■ دیفرانسیل $x$، $dx$:

$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت متوسط $\rightarrow$ $V_{\text{آنی}} = \frac{dx}{dt}$ سرعت لحظه‌ای = مشتق جابجائی / زمان

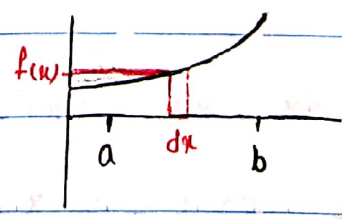



$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad = dx$$

$\frac{dy}{dx} = f'(x) \rightarrow dy = f'(x)\,dx$ «دیفرانسیل $y$»

$$\frac{du}{dx} = u' \rightarrow du = u'\,dx \rightarrow \int u^n\,du = \int u^n u'\,dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$




$\int_a^b f(x)\,dx$ = مساحت زیر نمودار از بازهٔ $a$ تا $b$

ج.   عرض   طول

■ قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت دوم: اگر $f$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و $F$ یک تابع اولیه برای $f$ باشد، داریم:

شرط: $F'(x)=f(x)$ یا $F(x)=\int f(x)\,dx$ ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b)}_{\text{کران بالا}} - \underbrace{F(a)}_{\text{کران پایین}}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

نامعین

$$\int_1^3 (2x+1)\,dx = x^2+x\Big|_1^3 = 12-2=10$$

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = 4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

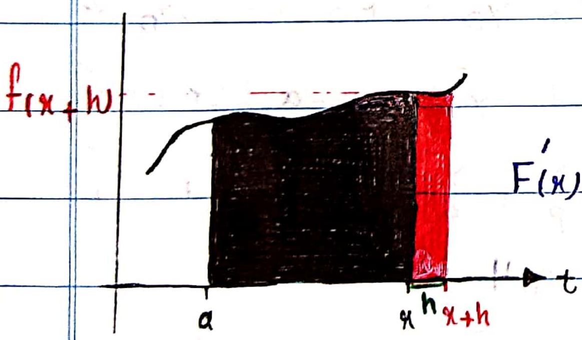
$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0^\circ) = +1+1=2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$\left(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cancel{\sqrt{2}}+2+\cancel{\sqrt{2}}-0=2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \underbrace{2x}_{u'}\sqrt[3]{\underbrace{x^2-1}_{u}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 u'u^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\Big|_0^3 = \frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^3 = 6-\frac{3}{8}=\frac{45}{8}$$

■ صورت اول قضیهٔ بنیادی:




فرض کنید تابع $f$ در بازهٔ $I$ شامل نقطهٔ $a$، پیوسته باشد. اگر $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ آنگاه $F$ در بازهٔ $I$ مشتق‌پذیر است و $F'(x)=f(x)$

تابع مساحت، همان تابع اولیه است.

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\overbrace{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}^{\text{مساحت قرمز}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot f(x+h)}{\cancel{h}} = f(x+0)=f(x)$$

$$\to \int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \cancel{\int_a^a f(t)\,dt}^{\,0}$$

ERAM