

* جمع بندی هندسه تحلیلی + معادلات دایره در درس ۳ و فصل ۱ با زحمات:

■ وضعیت ۲ خط نسبت به هم:

$$m = m'$$

۱- موازی: برابری شیب‌ها

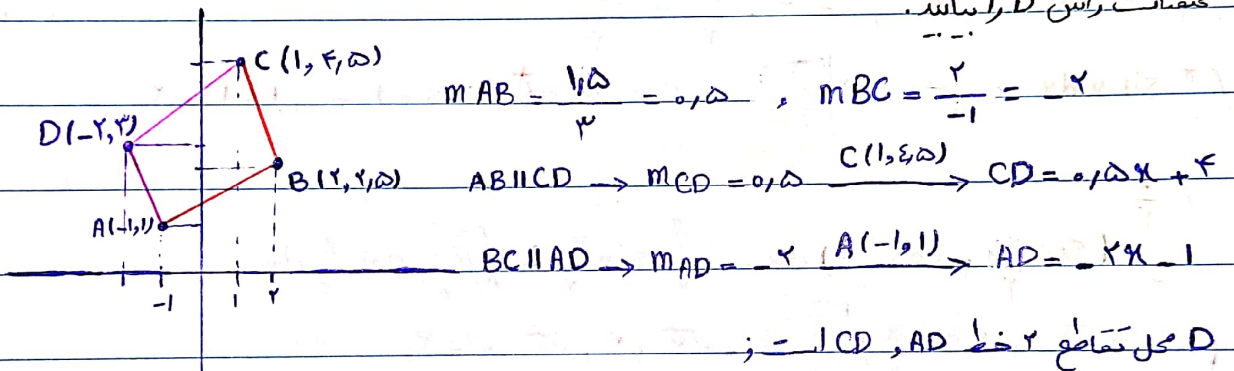
$$m \times m' = -1$$

۲- عمود: شیب‌های قرینه و معکوس

۳- مقاطع «عمود/غیر عمود»: مختصات نقطه تقاطع با حل دستگاه ۲ معادله خط به دست می‌آید.

• مسئله: مستطیل ABCD با مختصات رئوس $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(1, 4)$ را در نظر بگیرید.

مختصات رأس D را بیابید.



$$1/3x + 4 = -2x - 1 \rightarrow 2/3x = -5 \rightarrow x_D = -2 \quad \begin{matrix} y = 1/3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{matrix} \rightarrow y_D = 3 \rightarrow D(-2, 3)$$

روش ۱: $AD = BC \rightarrow x_D - x_A = x_C - x_B \rightarrow x_D + 1 = 1 - 2 \rightarrow x_D = -2$

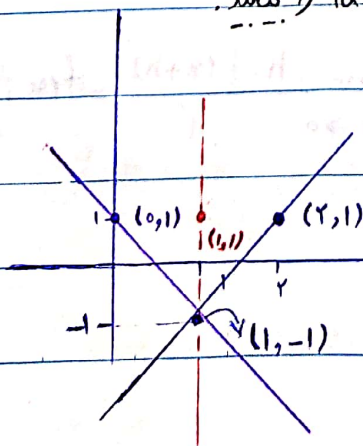
روش ۲: جمع حوسره هر قطر \rightarrow متوالی الاضلاع $y_D - y_A = y_C - y_B \rightarrow y_D - 1 = 4 - 2 \rightarrow y_D = 3$

نکته: خط 2 $x = a$ و $y = b$ همواره بر هم عمودند.

نکته: اگر خط به فرم $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ باشد؛ P قطب از مبدأ و q عرض از مبدأ است.

نکته: $S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$

• دو خط $y = ax + b$ و $y = 2x - 3$ نسبت به $x = 1$ متعامدند. $2a + b$ را بیابید.

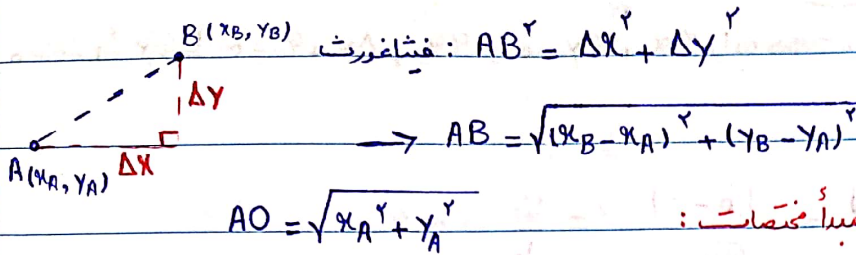


$$1 = 0x + b \rightarrow b = 1$$

$$-1 = a + b \quad b = 1 \rightarrow a = -2$$

$$2(1 - 2) + 1 = -3 \quad \text{ج}$$

فاصله نقطه از خط:



فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات:

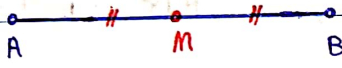
نقاط $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 9)$ سه رأس یک مثلث هستند نوع مثلث چیست؟

$$AB = \sqrt{14 + 1} = \sqrt{15}, \quad AC = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}, \quad BC = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

قائم الزاویه \checkmark $\rightarrow 15 + 53 = 68 \neq 65$ \rightarrow روش 1

عمود قائم الزاویه \checkmark $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ $\rightarrow m_{AB} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}, m_{AC} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = -1$ روش 2

مختصات وسط پاره خط:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$2x_M - x_A = x_B, \quad 2y_M - y_A = y_B$$

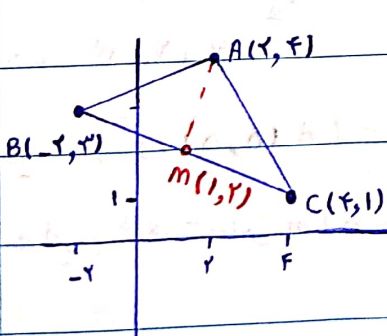
$$P'(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$

قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به $O(x_0, y_0)$:

$$P'(-\alpha, \beta)$$

قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات:

مثلث بارشوس $A(2, 4)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 1)$ را در نظر بگیرید. طول میانه AM و معادله آن را بنویسید.



$$AM = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$m_{AM} = \frac{2}{1} = 2 \quad m(BC) = -\frac{1}{2} \rightarrow b = 0 \rightarrow y_{AM} = 2x$$

فاصله نقطه از خط:

معادله به فرم استاندارد: $ax + by + c = 0$ نقطه x_0, y_0

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله خط موازی: $ax + by + c' = 0, ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ضریب x = ضریب x

ضریب y = ضریب y

فاصله ۲ خط $4x + 17y + 4 = 0$ و $3x + 4y = 0$ را به دست آورید.

$$4x + 17y = 0$$

$$4x + 17y + 4 = 0$$

$$d = \frac{|10 - 4|}{\sqrt{34 + 44}} = \frac{4}{10} = 0,4$$

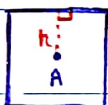
مساحت مثلث با ۳ رأس $A(2, 5)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$ چقدر است؟ خارج ۹۲

$$AB = \sqrt{1 + 25}, AC = \sqrt{4 + 9}, BC = \sqrt{9 + 4} \rightarrow \text{مساحت } BC, AC$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow \text{مساوی الساقین قائم الزامیه} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = 6,5$$

نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربع است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y - x = 5$ است. مساحت مربع؟ خارج ۹۳

$$h = \frac{|1 - 3 - 2 - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \rightarrow 2h = 4\sqrt{5}$$



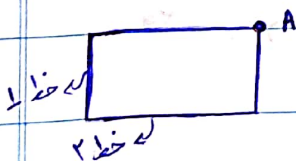
$$S = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

دو نقطه بر خط $y = x - 1$ به معادله $2x - 3y = 5$ از خط $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است.

$$2x - 3(x - 1) = 5 \rightarrow 2x - 3x + 3 = 5 \rightarrow -x + 3 = 5 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$$

$$2(-2) - 3(-2 - 1) = 5 \rightarrow -4 + 9 = 5 \rightarrow 5 = 5$$

۲ ضلع یک مستطیل منطبق بر خط $2x - y = 7$ و $2y + x = 4$ به معادلات $2x - y = 7$, $2y + x = 4$ است. مساحت این مستطیل؟ خارج ۹۰



$$A(18, 5)$$

$$\frac{|18 + 10 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|1 + 10 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{24}{\sqrt{5}} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{168}{5} = 33,6$$

دو ضلع یک مربع منطبق بر خط $2x - y = 7$ و $2y + x = 4$ است. مساحت مربع؟ خارج ۹۲

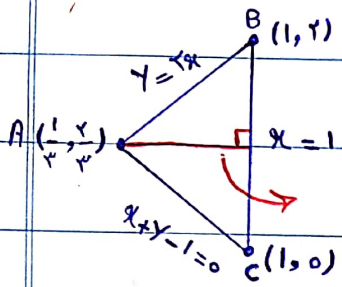
$$x + y + 1, 2x - 2y - 3$$

$$2x - 2y - 2, 2x - 2y - 3$$

$$\frac{|1 - 3 - 2|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \rightarrow S = \frac{25}{8}$$

معادله سه ضلع یک مثلث $x+y=1$ ، $y=2x$ ، $x=1$ است. معادله خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟ «۸۴»

نسبت کوچکترین ارتفاع بر بزرگترین ضلع وارد می شود.



$$y - 2x = x + y - 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \quad y = 2x \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

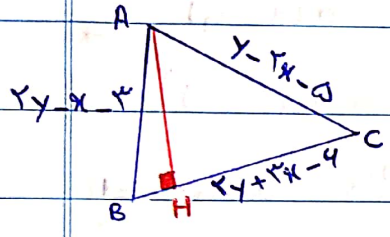
$$AB = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad AC = \frac{\sqrt{18}}{3}, \quad BC = 2 \rightarrow \text{بزرگترین ضلع BC}$$

سه ضلع مثلث به معادلات $AB: 2y - x = 3$

$$y = \frac{2}{3} \text{ افق}$$

$$BC: 2y + 3x = 4, \quad AC: y - 2x = 5$$

AH کدام است؟ «۸۹»



$$m_{BC} = -\frac{3}{2} \quad m_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$-2y + 3x + 10 = 0 \quad | \quad 3x + y = 0 \rightarrow x = -\frac{y}{3}, y = \frac{1}{3}$$

$$2y - x - 3 = 0 \quad | \quad y_{AH} = \frac{2}{3}x + b \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{y}{3} + b$$

$$\rightarrow \frac{1y}{a} = b \rightarrow y_{AH} = \frac{2}{3}x + \frac{1y}{a} \rightarrow ay - 2x = 1y$$

صفرها تابع درجه ۲: ریشه ها معادله $f(x) = 0$ عرض از مبدا است.

علامت صفرهای توانم زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = x^2 + 5x + 3$

ب) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$

$\Delta = 13 > 0$ ریشه ها

$\Delta < 0 \rightarrow \Delta > 0$ ریشه ها

Product $P = \frac{c}{a} = 3$ هم علامت

مختلف علامت $P = -\frac{4}{3}$

Sum $S = -\frac{b}{a} = -5$ متر

$S = -\frac{5}{3} < 0$ قدر مطلق ریشه منفی بزرگتر از ریشه مثبت

الف) $y = -x^2 + 2x - 1$

ب) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

$\Delta = 0$ ریشه مضاعف

$\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد

$P = 1 \rightarrow |x| \oplus$ ریشه ها

نسبت: اگر صفرها یک تابع درجه ۲، x_1 و x_2 باشد

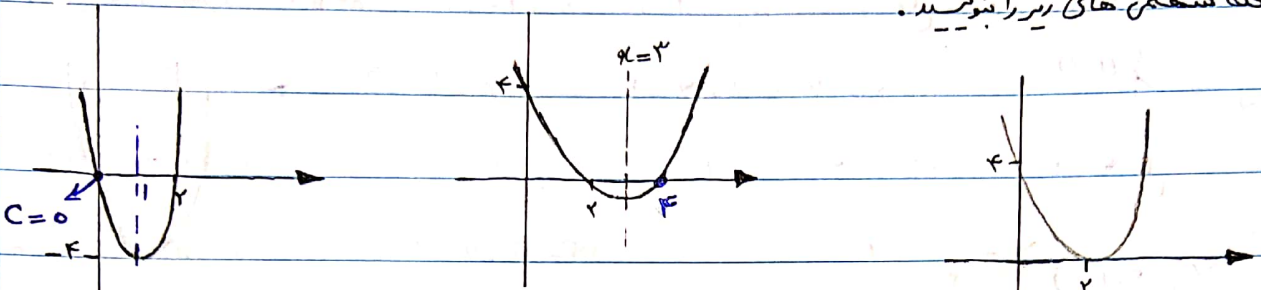
$S = 2 \rightarrow 1 + 1$

معادله مجموع: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

ضرب

نکته ۱. \min یا \max سهم به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید و مقدار آن برابر است با: $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$

• معادله سهم های زیر را بنویسید.



$S(1, -1)$ $f(x) = a(x-2)(x-4)$ $a(x-x_1)^2$
 $\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow 2a = b$ $(0, -1) \rightarrow -1 = 4a \rightarrow a = -\frac{1}{4}$ $f(x) = a(x-2)^2$
 $\frac{\Delta}{4a} = -1 \rightarrow 4a = b^2$ $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x-4)$ $(0, -1) \rightarrow -1 = 4a \rightarrow a = -1$
 $F\sqrt{a} = b$ $2a = 4\sqrt{a} \rightarrow 4a^2 - 16a = 0$ $f(x) = (x-2)^2$
 $\rightarrow 4a(a-4) = 0 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = -4 \rightarrow f(x) = 4x^2 - 8x$

• ماشین A و B با هم محصول را در ۱۸ ساعت تولید می کنند؛ اگر ماشین A ۱۵ ساعت زودتر از B به تنهایی آن محصول را تولید کند، A به تنهایی چند ساعت این محصول را تولید می کند؟

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \rightarrow 18(x+15) + 18(x) = x(x+15) \rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$
 $\rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \rightarrow x = 30 \text{ h (A)} \rightarrow B = 45 \text{ h}$

• علی و رضا در مسابقه دو مسافت ۳۰ km را می پیمایند، اگر سرعت علی از رضا $\frac{5}{h}$ بیشتر بوده و علی ۱۵ ساعت زودتر مسیر را پیماید، سرعت رضا چند است؟

$Ali = Reza + \frac{5}{h}$ $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
 $\frac{30}{t} = \frac{30}{t+1} + \frac{5}{h} \rightarrow 30(t+1) = 30(t) + 5(t)(t+1) \rightarrow t^2 + t - 4 = 0$
 $\rightarrow (t+4)(t-1) = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow v_{Reza} = \frac{30}{1+1} = 15 \text{ km/h}$

• معادله روبه چند جواب حقیقی دارد؟

$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} = 0$
 $x \geq 0$ $x-1 \geq 0$ $x^2 \geq 0$ $1 > 0$
 جمع ۳ منفر + ۱ منفر نمی شود x جمع ۳ علامت + اصغر نمی شود x جمع جواب حقیقی ندارد.

تعداد جواب ها معادله $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0$ چند است؟

$x^2 - x - 2 = 0 \quad a+c=b \rightarrow x=2, x=-1$

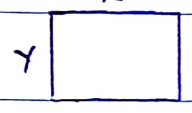
نامنفی

$\rightarrow x=2$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow x=2, x=3$

اجواب

نسبت مجموع طول و عرض مستطیل طلایی به طول آن برابر نسبت طول به عرض است.



$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad \frac{x}{y} = a \rightarrow 1 + \frac{1}{a} = a \rightarrow a+1 = a^2$

$\rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \varphi, \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618$ «عدد طلایی»

مسافت هوای تهران مشهد 1000 km است. هواپیمای مسیر تهران به مشهد با سرعت ثابت 700 کیلومتر بر

ساعت طی می کند. به دلیل وزش باد مخالف در مسیر برگشت، هواپیمای 700 کیلومتر بر ساعت گدازت

می شود و زمان بازگشت 20 دقیقه طولانی تر خواهد بود. سرعت هواپیمای در مسیر رفت و مدت زمان مسیر

تهران به مشهد را حساب کنید. $t = \frac{\Delta x}{v}$

$t = \frac{1000}{v} \rightarrow t = \frac{1000}{v-200} \rightarrow \frac{1000}{v} + \frac{1}{3} = \frac{1000}{v-200}$

$\rightarrow 3(v-200) \times 1000 + v(v-200) = 3v(1000) \rightarrow v^2 - 200v - 600000 = 0$

$\rightarrow (v-1000)(v+400) = 0 \rightarrow v = 1000 \text{ km/h} \rightarrow t_{رفت} = \frac{1000}{1000} = 1 \text{ h}$