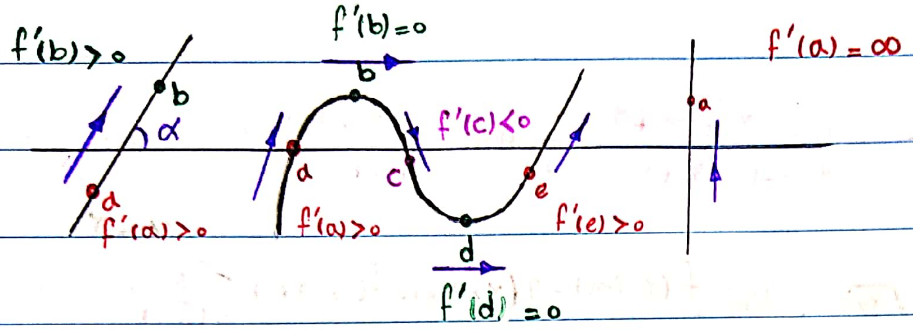
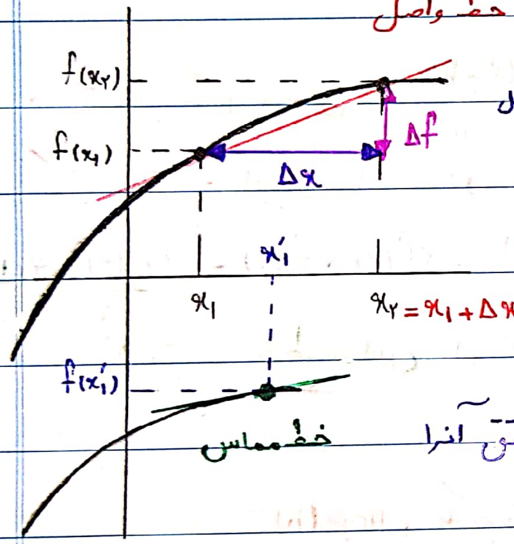
★ جمع بندی مشتق کنکور «۴ و ۵ دوازدهم» :　　　　۹۹,۴,۲۳



$$\text{شیب} = m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{df}{dx_0} = f'(x_0)$$



$$m_{\text{واصل}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

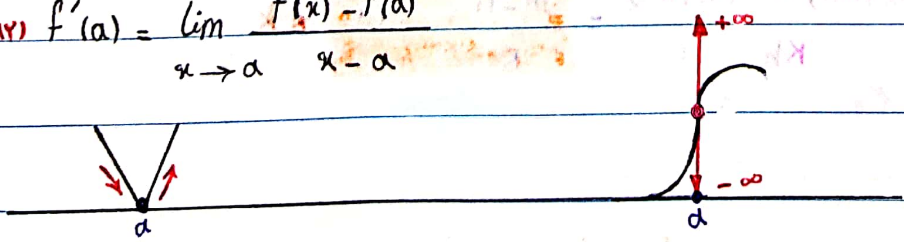
حد شیب خط واصل وقتی $\Delta x \to 0$ شیب خط مماس یا مشتق آنرا نشان می دهد.

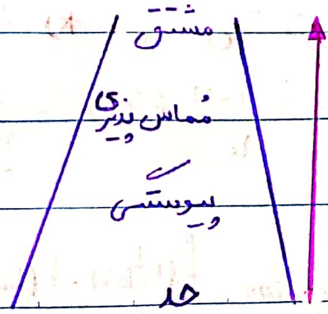
■ تعریف حدی مشتق: اگر f تابعی باشد که در یک بازه حول نقطهٔ a تعریف شده باشد در این صورت حدهای زیر «درصورت وجود» مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند،
اگر حد موجود نباشد f در a مشتق پذیر نیست.

$$(1)\quad f'(a) = \lim_{\bigcirc\to 0}\frac{f(a+\bigcirc)-f(a)}{\bigcirc}$$ «$\bigcirc$: Δx یا h»

اگر $\bigcirc = h$ و $a+h=x$: $h\to 0$ پس $x\to a$

$$(2)\quad f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$





مماس قائم ← ایستادن تابع ← مماس ناپذیری / نیم مماس ها در یک راستا نیستند ← مماس ناپذیری

وجود ندارد: $f'(a) \rightarrow m_{\text{مماس}} = \infty$

۹۹,۴,۲۸

۰ مقدار مشتق $f(x)=x^3+2x$ در $x_0=-1$ را بیابید.

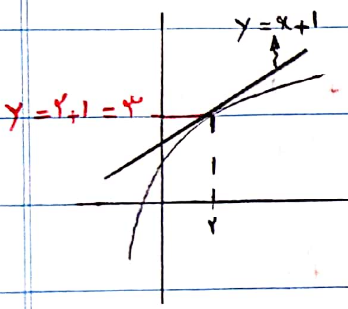
$f(-1)=-1-2=-3$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}HOP\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2}{1}=5$$

$x=2$

«۸۲» • $f(x)=x^2-x$, $g(x)=\sqrt{2x}$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)\cdot g(2+\Delta x)-f(2)\cdot g(2)}{\Delta x}=(fg)'$

$$(f\times g)'=f'g+g'f=(2x-1)(\sqrt{2x})+\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)(x^2-x)\xrightarrow{x=2}3\times 2+\frac{1}{2}\times 2=7$$



• با توجه به شکل حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+h)-9}{h}$ را بیابید.

نکتهٔ تستی در اینجور سوالات: نسبت به h hop

$$\overset{0}{\underset{0}{=}}HOP(h)\lim_{h\to 0}\frac{2f(2+h)\times f'(2+h)\times 1}{1}=2f(2)\times f'(2)=6f'(2)=6\times 1=6$$

شیب خط مماس $y=\underline{1}x+1$ ← $f'(2)=1$

$\circledast\ f(O)'=O'\times f'(O)$

• $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=5$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+\frac{h}{2})-f(2-h)}{10h-h^3}=?\ \frac{0}{0}$ نمی‌توان * + HOP(h)

$f'(2)$

$$\left(\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)\times\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}f'(2)=5\to f'(2)=20$$

*) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+\frac{h}{2})-f(2-h)}{10h}\overset{Hop(h)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}f'(2+\frac{h}{2})+1f'(2-h)}{10}=\frac{\frac{3}{2}f'(2)}{10}=3$$

مهم روش تستی *) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{Kh}=\boxed{\frac{m-n}{K}\cdot f'(a)}$ **

$$=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{10}f'(2)=\frac{3}{20}\times 20=3$$

۰ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1+3\Delta x)}{4\Delta x}=-\frac{2}{3}$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

*«طبق نکته»

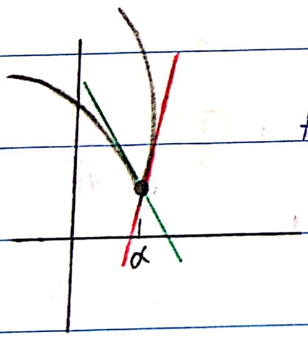
$\frac{1-3}{4} f'(1) = -\frac{2}{3} \longrightarrow f'(1) = \underline{\underline{2}}$ جواب *

شیب نیم مماس چپ $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = مشتق چپ $= f'_-(a) = f'(a^-)$

شیب نیم مماس راست $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = مشتق راست $= f'_+(a) = f'(a^+)$

*شرط مشتق پذیری: شیب نیم مماس چپ = شیب نیم مماس راست یا $f'_-(a) = f'_+(a)$

بررسی در توابع قدر مطلقی، براکتی و چند ضابطه‌ای



$f'_-(a) \neq f'_+(a) \longrightarrow f'(a)$: وجود ندارد

$f(x) = x|\sin \pi x|$ ، $f'(1^+) = ?$ «۸۹»

$\sin \pi^+ \longrightarrow$ ناحیه ۳ $\longrightarrow \sin - \longrightarrow f(x) = -x\sin\pi x$ مشتق ضرب

$f'(x) - 1 \times \sin\pi x \,.\, \cos\pi x . \pi \, x + 1 = \pi$

■ نکات بررسی مشتق پذیری:

$[f(x)]$: هرجا پیوسته نباشد، مشتق ندارد اما در نقاطی که پیوسته است، مشتق آن ۰ است.

چندضابطه‌ای: هرجا پیوسته نباشد، مشتق ندارد. «معمولا مرزها»

کسرها و ووا: در دامنهٔ خود مشتق پذیرند.

رادیکال ها: هرجا زیر رادیکال صفر نباشد مشتق پذیر است + در رادیکال ها با فرجه زوج شرط زیر رادیکال بزرگتر از صفر

$|f(x)|$: در نقاطی که $f(x)$ صفر شود ممکن است مشتق ناپذیر باشد.

• تابع f به ازای چه مقدار از a در نقطهٔ $x=1$ مشتق پذیر است؟ «۸۲»

$$f(x)=\begin{cases} ax-a & x<1 \\ x^2-x & x\geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1(a)-a=0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = (1)^2-1=0$ → شرط پیوستگی ✓

$f'_+(1) = 2x-1 \quad , \quad f'_-(1)=a \rightarrow f'_+(1)=f'_-(1) \longrightarrow a=1$

• در تابع f مقدار $f'(1)$ موجود است، b را بیابید. «۹۰ خارج»

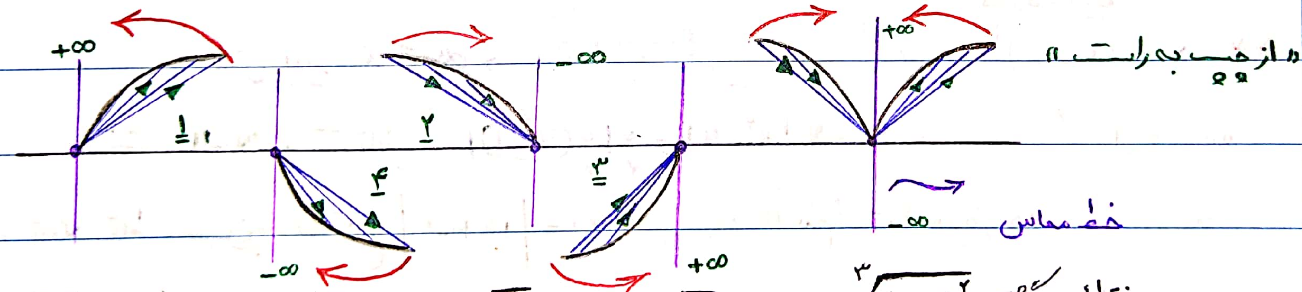
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & x>1 \\ ax+b & x\leq 1 \end{cases}$$

$\frac{2}{3}(2x+6)^{-\frac{1}{3}}\times 2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a+b$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$ → $a+b=4$ *

$f'_+(1) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x+6}} = \frac{2}{3} \quad , \quad f'_-(1)=a \rightarrow a=\frac{2}{3} \rightarrow 4-\frac{2}{3}=b \rightarrow b=\frac{10}{3}$



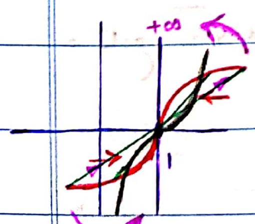
$\sqrt{x}$ $\quad -\sqrt{x}$ $\quad \sqrt{-x}$ $\quad -\sqrt{-x}$ $\quad \sqrt[3]{(x-2)^2}$ نقطهٔ بازگشتی

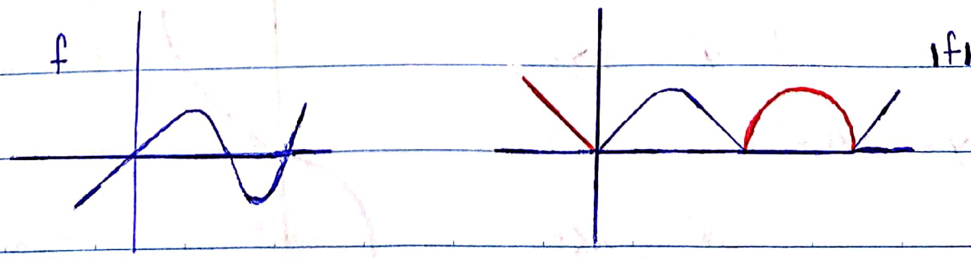
مماس قائم $-\infty , +\infty$ / مماس قائم $+\infty$ / مماس قائم $-\infty$ / مماس قائم $-\infty$ / مماس قائم $+\infty$

همیشه در نقاطی که زیر رادیکال را ۰ می‌شند مشتق ناپذیر

نواحی زوج $-\infty$ ، نواحی فرد $+\infty$

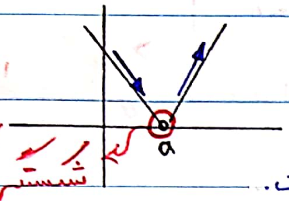
• تابع $\sqrt[5]{(x-1)^3}$ در نقطهٔ $x=1$ خط مماس $+\infty$ دارد ولی مشتق ندارد. «۸۴»





$$y=|f(x)|=|(x-a)(x-b)^2(x-c)^3\cdots|$$

فقط در ریشهٔ ساده یا ریشهٔ مرتبه اول مشتق ندارد یعنی $x=a$



در $x=a$ شیب ها برابر و قرینه مانند:

شکستگی «گوشه‌ای»

در ... , $x=c$, $x=b$ ریشه های مضاعف و بالاتر مشتق صفر است.

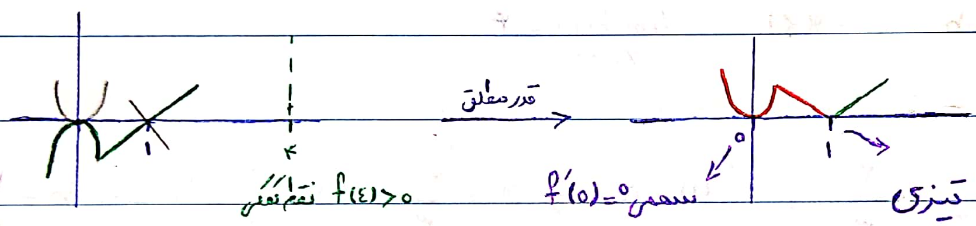
• تابع $f(x)=|x^3-x^2|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟ «۹۰»

راه ۱: طبق نکته تنها در $x=1$ ؛ «۱ نقطه»

$f(x)=|x^2(x-1)|$

ریشه مضاعف $x=0$ ، ریشه ساده $x=1$

راه ۲ «نمودارشناسی»:



قدر مطلق

نقطه تقعر $f(4)>0$ ، سهمی $f'(0)=0$ ، وجود ندارد: $f'(1)$ تیزی

** $y=(x-\alpha)|(x-\alpha)|$ ← تکرار در ضرب ← $x=\alpha$ مشتق پذیر

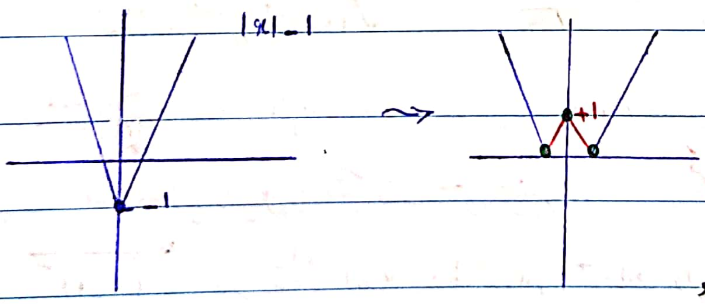
عامل ۰ شونده

← $y=x|x^2-x|=x|x(x-1)|$ فقط در $x=1$ مشتق ناپذیر

• تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x)=\big||x|-1\big|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ «ریاضی ۸۵»

«نقاط از ۲ طرف تیز»

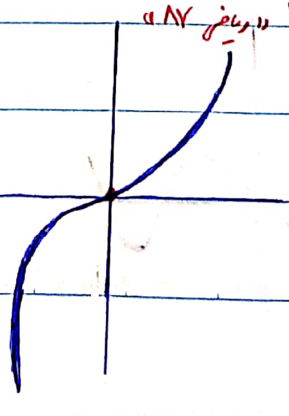
«۳ نقطه»



• تابع $f(x)=x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در صفر چگونه است؟ «ریاضی ۸۷»

«پیوسته و مشتق پذیر»

(راه ۱) $y=x|x|$: $\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$



(راه ۲) تکرار در ضرب $x|x|$ ← $x=0$ پیوسته ← مشتق پذیر

ERAM

• به ازای کدام مقدار K تابع روبرو همواره مشتق‌پذیر است؟ $f(x)=(x^3+x+K)|x-2|$

مشتق ناپذیر $x=2$

★ $x=2$ باید ریشه‌ی این عبارت

$x^3+x+K \xrightarrow{x=2} 0 \longrightarrow 8+2=-K \longrightarrow K=10$

نکته ۱: $y=[x-[x]]=[x]-[x]=0 \longrightarrow f'(x)=0$

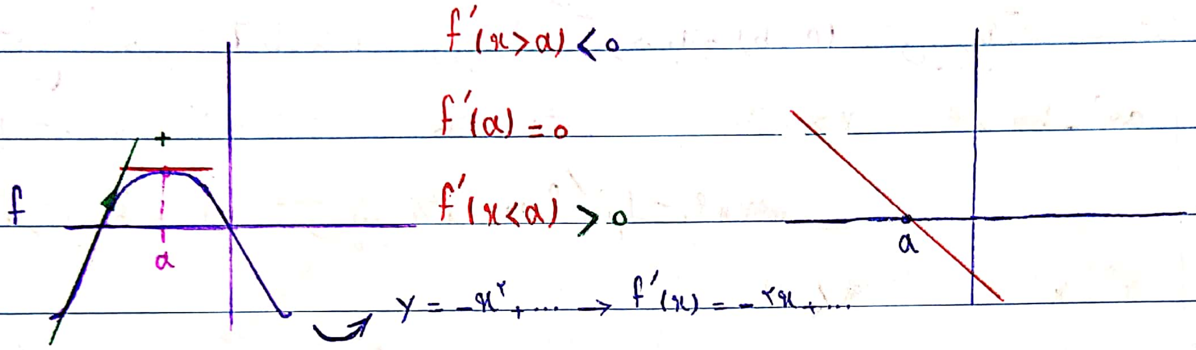
$\in \mathbb{Z}$

■ نمودار تابع f' از روی f:

$f'(x>a)<0$

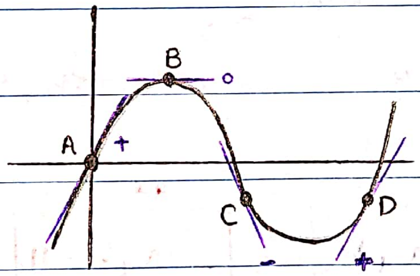
$f'(a)=0$

$f'(x<a)>0$



$y=-x^2+\dots \longrightarrow f'(x)=-2x+\dots$

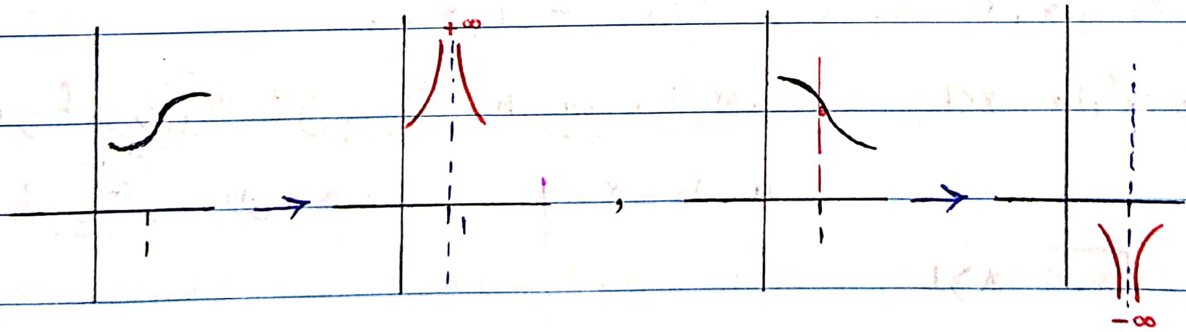
○ در کدام نقطه روی نمودار $f(x).f'(x)<0$ است؟



نقطه	f	f'	f.f'
A	0	+	0
B	+	0	0
C	−	−	+
D	−	+	−

D نقطه

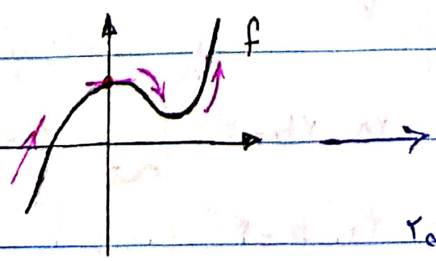
○ اگر نمودار f در اطراف $x=1$ به دو صورت مقابل باشد، f' در اطراف $x=1$ چگونه است؟

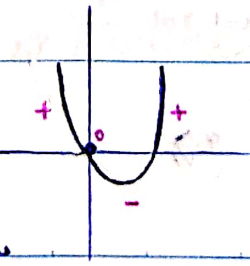


ناحیه ۱ و ۳ ← مماس قائم $+\infty$

ناحیه ۲ و ۴ ← مماس قائم $-\infty$

مثال

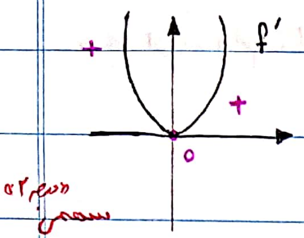


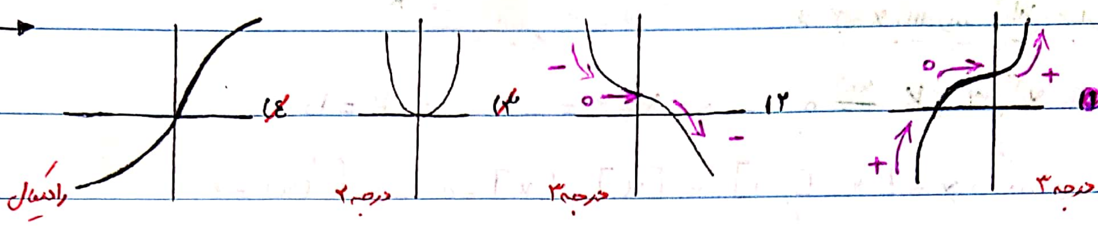


کُد درجه ۳

سهمی درجه ۲

• اگر f تابعی پیوسته و نمودار f' به صورت مقابل باشد، نمودار f به چه شکل است؟





■ مشتق‌پذیری در بازه: ۹۹،۵،۱

تابع f در بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است اگر در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

• اگر تابع f همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟ «۹۷»

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4 & x\geq -2 \\ x^3-x & x<-2 \end{cases}$$

* پیوستگی:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = 4a-2b+4$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -8+2=-6$$
$$\to 4a-2b+4=-6 \to 4a-2b=-10 \to \boxed{2a-b=-5}\ *$$

* مماس‌پذیری:

$$f'_+(-2) = 2ax+b = -4a+b$$
$$f'_-(-2) = 3x^2-1 = 11$$
$$\to \boxed{-4a+b=11}\ ** \xrightarrow{*,**} a=-3,\ b=-1$$

$$\to -3x^2-x+4 \quad x\geq -2 \to f(1) = -3-1+4=0$$

• اگر f بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، b را بیابید. «ریاضی ۹۲»

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & x<1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x\geq 1 \end{cases}$$

شرط پیوستگی «به ازای $x=1$»: $a+b=2$

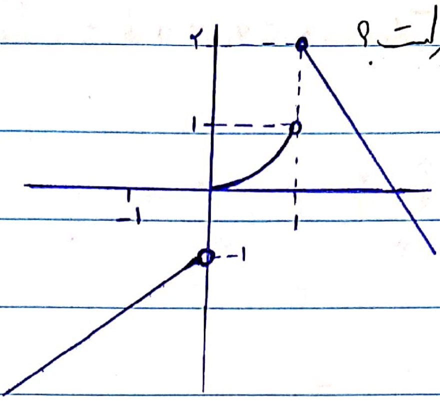
$$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2+b & x<1 \\ 2\dfrac{4}{2\sqrt{4x-3}} & x\geq 1 \end{cases} \xrightarrow{x=1} 3a+b=4$$

شرط مماس‌پذیری:

$$2a+2b=4$$
$$3a+b=4$$
$$\to a=b=1$$

• تابع f در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x<1 \\ 3-x & x\geq 1 \end{cases}$$



۱) $(0,1]$

۲) $[-1,1)$

۳) $[0,4)$

۴) $[-1,0)$ ✓

* «با پیوستگی می‌توان حل کرد»

ابتدا (a,b) سپس $[a$ یا $b]$

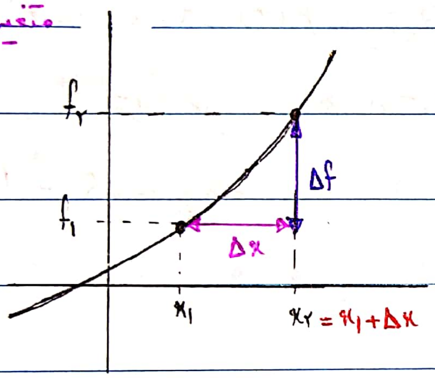
■ آهنگ تغییر:

$y = f(x)$ متغیر مستقل

متغیر وابسته

تغییرات y نسبت به تغییرات x

۱- آهنگ متوسط: شیب متوسط



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$\Delta x = h =$ نمو

۲- آهنگ لحظه‌ای - آنی: شیب آنی $\quad f'(x)=\tan\alpha$

• در تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ آهنگ تغییرات متوسط تابع به تغییر متغیر x در نقطهٔ $x=1$ با نمو متغیر ۰/۲۱ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه چقدر کمتر است؟ «۹٤»

آهنگ:
- متوسط ← دو نقطه
- یک نقطه و نمو
- آنی ← مشتق در ۱ نقطه

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(1{,}21)-f(1)}{0{,}21}=\frac{1{,}1-1}{0{,}21}=\frac{10}{21}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{10{,}5}{21}-\frac{10}{21}=\frac{0{,}5}{21}=\frac{1}{42}$$

• تابع $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تابع در نقطهٔ $x=4$ تا $x=12$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=4$ چقدر بیشتر است؟ «۹۳»

متوسط: $\dfrac{f(12)-f(4)}{12-4}=\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\dfrac{-2/15}{8}=-\dfrac{1}{60}$

آنی: $-\cancel{\frac{1}{2}}(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\times\cancel{2}=-(9)^{-3/2}=-\sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^3}=-\frac{1}{27}$

$$-\frac{1}{60}\cancel{-(-}\frac{1}{27})=\frac{-9+20}{540}=\frac{11}{540}$$

3×20 $\quad$ 9×3

ERAM

- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-1}$ آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α را بیابید. «خارج ۹۰»

$$\text{متوسط} = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{\frac{5}{4}-2}{3} = \frac{-3/4}{3} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{لحظه‌ای}: \left(\frac{1x+0}{1x-1}\right)' = \frac{-1-0}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$-\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \rightarrow \alpha-1=2 \Rightarrow \alpha=3$$

- اگر $P(t)=3000+100t^2$ نمایش جمعیت نوعی باکتری در زمان t باشد «t برحسب ساعت» آهنگ تغییر متوسط افزایش جمعیت در ۵ ساعت اول پس از زمان $t=2$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت در $t=3$ بیشتر است؟ «خارج ۸۷»

$$\text{متوسط} \frac{f(7)-f(2)}{5} = \frac{4500}{5} = 900 \qquad \text{آنی}\ 200t = 600 \longrightarrow 900-600=300$$

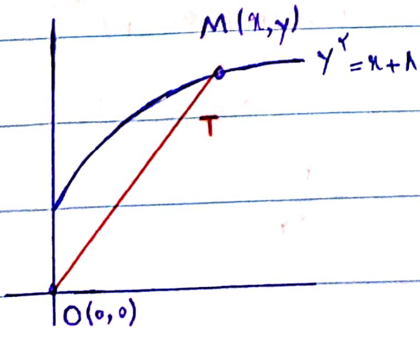
نکته) $f(x)=ax^2+bx+c$ $\quad [\alpha,\beta]$ متوسط = آنی $\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$[2,7]\ \text{متوسط} = f'\left(\frac{9}{2}\right) = 200\left(\frac{9}{2}\right) = 900$$

- در تابع $f(x)=3x^2+4x-2$ تفاضل آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $\alpha+\frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تابع وقتی متغیر x از عدد α به $\alpha+h$ تغییر کند، کدام است؟ «خارج ۸۵»

$$[\alpha,\alpha+h]\ \text{متوسط} = f'\left(\frac{\alpha+\alpha+h}{2}\right) = f'\left(\alpha+\frac{h}{2}\right) \rightarrow f'\left(\alpha+\frac{h}{2}\right) - f'\left(\alpha+\frac{h}{2}\right) = 0$$

- نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی $y^2=x+8$ حرکت می‌کند. T فاصلهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ تغییر T در $x=7$ کدام است؟ «خارج ۸۴»



$$OM = T = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+x+8}$$

$$T' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}} = \frac{15}{16}$$

$V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ حجم مایع باقی‌مانده ◦ الف) مدت زمان تخلیه ب) حجم اولیه

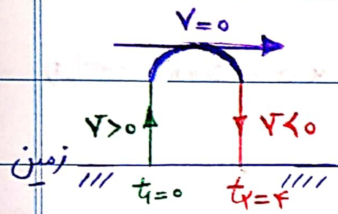
پ) آهنگ متوسط تخلیهٔ ظرف   الف) $V=0 \longrightarrow t=100s$ ب) $t=0 \longrightarrow V=40$

ت) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر آهنگ تغییر متوسط تخلیهٔ آن است؟

پ) $\frac{V(100)-V(0)}{100} = \frac{0-40}{100} = -\frac{4}{10}$ ت) $[0,100]$ متوسط = آنی $f'(\frac{100+0}{2}) \Rightarrow t=50$

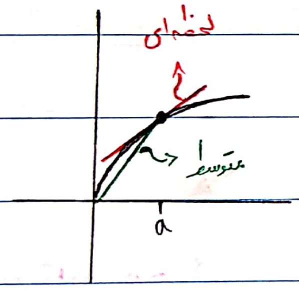
◦ معادلهٔ حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود به صورت $S=-5t^2+20t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند m/s است؟ «۸۲»

$$S' = -10t+20 \xrightarrow{t=4} V = -20\ m/s$$

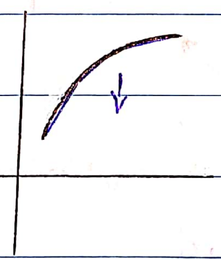


$-5t^2+20t=0 \Rightarrow (-5t)(t-4)=0 \longrightarrow t_1=0 , t_2=4$

یادآوری: $x_t \xrightarrow{\square'} V_t \xrightarrow{\square'} a_t$

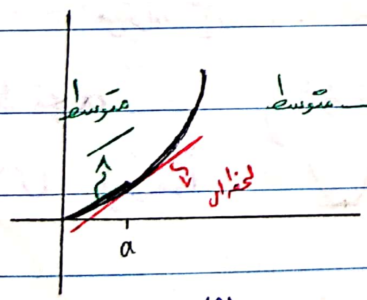


m آهنگ متوسط > m آهنگ آنی

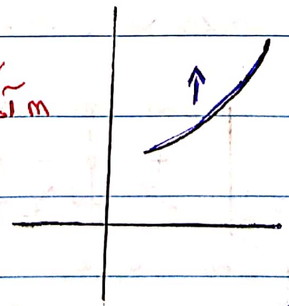


سرعت متوسط ↓

↓ تقعر گودی رو به



m آهنگ متوسط < m آهنگ آنی



سرعت متوسط ↑

↑ تقعر گودی رو به

مشتق ۲ تابع $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ ⇐ $f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$ (مشتق nام

* اکیداً نزولی $x_1 < x_2 , f(x_1) > f(x_2)$ ، اکیداً صعودی $x_1 < x_2 , f(x_1) < f(x_2)$
* نزولی $x_1 < x_2 , f(x_1) \geq f(x_2)$ ، صعودی $x_1 < x_2 , f(x_1) \leq f(x_2)$

تابع ثابت «هم صعودی هم نزولی ← غیر یکنوا» $f(x_1)=f(x_2)=\dots=f(x_n)$

فقط اکیدا صعودی - فقط اکیدا نزولی ← اکیدا یکنوا

فقط صعودی - فقط نزولی ← یکنوا

* اگر $f(x)$ مشتق پذیر باشد در هر بازه از دامنهٔ f :

تشخیص یکنوایی با مشتق ;

$f'(x)>0$ ↗ ; اکیدا صعودی , $f'(x)\geq 0$ ← صعودی

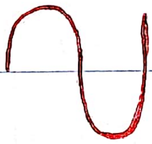
$f'(x)<0$ ↘ ; اکیدا نزولی , $f'(x)\leq 0$ ← نزولی

$f'(x)=0$ → ; ثابت

نکته) $ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{D'} 2ax+b=0 \to x=-\frac{b}{2a}=x_S$ راس سهمی

$y=x^3-3x \to y'=3x^2-3=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		$+1$	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
	↗	→	↘	→	↗



$y=\frac{1}{x} \to y'=-\frac{1}{x^2}$ $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$-\infty$	0	$+\infty$
−	‖	−
↘	‖	↘

* در دامنهٔ خود همواره نزولی نیست در دل فقط نزولی و اکیدا

رسم تابع درجه ۳: $y=ax^3+bx^2+cx+d$

می‌توانند ۳ ریشه داشته ←   روند حرکت - ↙ $a<0$,   روند حرکت + ↗ $a>0$

$y'=3ax^2+2bx+c$

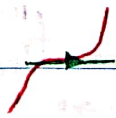
1) $\Delta f'>0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه}}$

$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
+	0	−	0	+
↗	→	↘	→	↗

شرط $a>0$    غیر یکنوا   شرط $a<0$ 

2) $\Delta f'=0 \xrightarrow{\text{۱ ریشه}}$

$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
+	0	+
↗	→	↗

 صعودی    نزولی

3) $\Delta f'<0 \xrightarrow{\text{۰ ریشه}}$

ریشهٔ حقیقی ندارد

همواره +

 اکیدا صعودی    اکیدا نزولی

• تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در کدام ناحیه اکیدا صعودی است؟ «آزاد ۸۵»

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$

$x=0$ یا $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ در

• تابع با ضابطه x^3+ax^2+x همواره صعودی است. حدود تغییرات a را بیابید. «۸۲»

$f'(x)=3x^2+2ax+1$

شرط ۱: $a>0$ ✓ شرط ۲: $\Delta f'\leq 0$

$(2a)^2-4(3)(1)=4a^2-12\leq 0$

$a^2\leq 3 \longrightarrow |a|\leq\sqrt{3}$

• نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در چه بازه‌های صعودی است؟ «۸۰»

$D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$f'(x)=\frac{1(1-x^2)-(-2x)x}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$ همواره + / همواره +

در همواره صعودی به جز ریشه‌های مخرج: $\mathbb{R}-\{-1,+1\}$

• با چه شرطی تابع ax^3+bx^2+1 اکیدا صعودی است؟ «۸۷»

شرط ۱: $a>0$ $\Delta f'\leq 0 \rightarrow 3ax^2+2bx$

$4b^2-4(3a)(0)=4b^2\leq 0 \rightarrow b=0$: شرط ۲

• نمودار $f(x)=x(x-1)^3$ در نقطهٔ $x=1$ چگونه است؟ «۸۸» «مشتق fog»

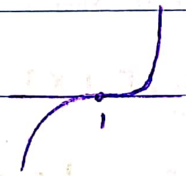
راه ۱: تشریحی

$f'(x)=1(x-1)^3+3(x-1)^2x=(x-1)^2(x-1+3x)=0$

$x=\frac{1}{4}$, $\overset{*}{x}=1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\overset{*}{1}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

خواستهٔ سؤال

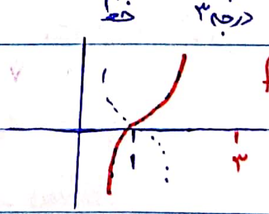


راه ۲: تستی «نمودارشناسی»

$f(x)=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=1$

خط ↓ ، درجه ۳ ↓

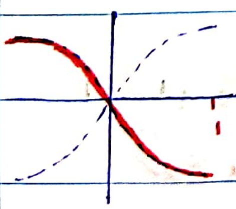
• نمودار تقریبی $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ «خارج ۹۱»



$f(3)>0$

$x^{\frac{3}{5}}(x^{\frac{5}{5}}-4)=0 \longrightarrow x=0$ یا $x=4$

«تابع کشیده» $\sqrt[5]{x^3}$ ؛ خط



$f(1)=1-4^{\frac{3}{5}}=1-2^{\frac{6}{5}} \xrightarrow{2^1<2^{\frac{6}{5}}} f(1)<0$

۹۹/۵/۲

■ نقطهٔ بحرانی: نقطه‌ای از دامنه که $f'=0$ یا ناموجود $=f'$

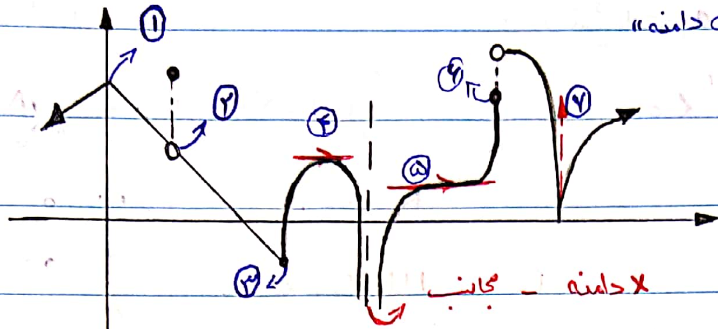
نقاط ابتدا و انتها تابع جزء نقاط بحرانی هستند

* بررسی دامنه

ERAM

• شکل زیر نمودار تابع $y=f(x+2)$ است. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ کدام است؟ ۷

تاثیری بر نقاط بحرانی نمی‌گذارد «بحرانی ∝ دامنه»



۱ـ ۳ ! طرف یا ۲ طرف تیز ندارد $=f'$

۲ـ ۶ عدم پیوستگی ندارد $=f'$

۴ـ ۵ شیب مماس صفر $f'=0$

۷ مماس قائم ← مماس ناپذیری ندارد $=f'$

* نقاط ابتدا و انتها مشخص نشده‌اند پس بحرانی نیستند. $D=\mathbb{R}$

• مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟ «رادیکال ۳ تاثیری بر دامنه نمی‌گذارد»

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{11}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0 \rightarrow \frac{1}{3}\left(x^{\frac{11}{3}}-\frac{1}{x^{1/3}}\right)=0 \rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{x^4-1}{x^{1/3}}\right)=0$$

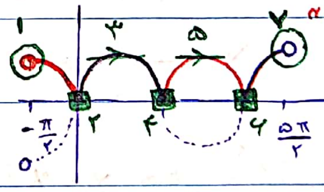
* $f'(x)=0 \rightarrow x^4-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

* $f'(x)$: ندارد $\rightarrow x^{\frac{1}{3}}=0 \rightarrow x=0$

مجموعه جواب: $\{-1, 0, +1\}$

نکته: با توجه به اصلاحیه کتاب تابع $\sqrt{x}$ در $x=0$ بحرانی است. «نقطه ابتدایی»

• تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|\sin x|$ در بازه $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$؟ «۸۲»



«۷»

• تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^3-x|$ روی بازه $[-1, 2]$ «ریاضی ۹۰»

$f(x)=0$

$|f(x)| \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x(x^2-1)=0 \rightarrow -1, 0, +1$

$3x^2-1=0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

* اگر وجود * ابتدا و انتها

$-1, +2 \Rightarrow$ جواب *۶*

• تعداد نقاط بحرانی $y=x|x^2-3|$؟

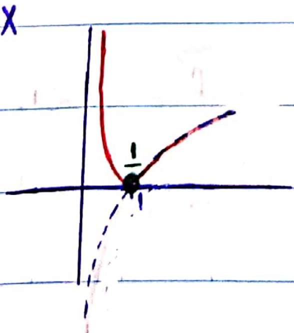
$f(x)=0 \rightarrow x^2-3=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$g(x)|f(x)| \rightarrow (g(x)\cdot f(x))'=0 \rightarrow (x^3-3x)'=0 \rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow +1, -1$

* اگر وجود * ابتدا و انتها ✗

* ۴ * جواب

• تعداد نقاط بحرانی $y=|\log x|$؟ ۱ نقطه



• نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ «۸۰»

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}} \to f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0 \to \frac{2}{3}\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=0$$

$$\to \frac{2}{3}\left(\frac{2x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=0 \to 2x^{\frac{2}{3}}=1 \xrightarrow{\div 2,\ \square^3} x^2=\frac{1}{8} \to f'=0,\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

f' ندارد، $x=0$

$$\Rightarrow \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

• نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس مثلث‌اند. نوع مثلث را بیابید. «۸۵»

$$f'(x)=2x(x-2)^2+x^2(2(x-2))=0 \to 2x(x-2)(x-2+x)=0$$

$A(0,0)$, $B(2,0)$; $C(1,1)$

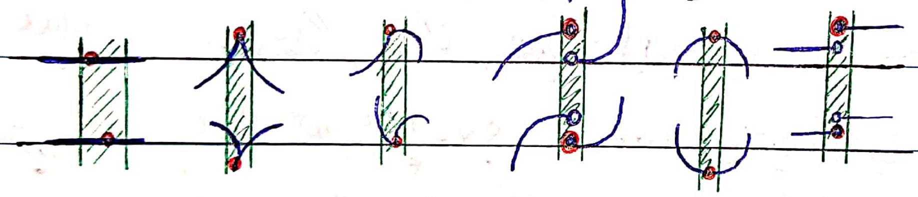
$AB=\sqrt{4}=2$

$AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\to AC^2+BC^2=AB^2$ ✓ → متساوی الساقین قائم الزاویه

■ اکسترمم نسبی: نقطه‌ای است که از نقاط اطرافش (همسایگان) ← بالاتر یا مساوی $f(a)\geq f(x)$ باشد.
پائین‌تر یا مساوی $f(a)\leq f(x)$



max نسبی «نقاط توپر»

min نسبی «نقاط توپر»

■ اکسترمم مطلق: نقاطی هستند که در تمام نقاط دامنه ← بالاتر یا مساوی max مطلق
پائین‌تر یا مساوی min مطلق

تذکرات: ۱- بررسی کل بازه

۲- max یا min مقدار در کل «عرض» این نقاط»

۳- نقاط ابتداء انتها و میانی بررسی «بررسی ابتدا و انتها در اکسترمم نسبی انجام نمی‌شود.» مهم

■ آزمون مشتق اول: «فرض c طول نقطه بحرانی تابع f»

۱- f' در $x=c$ از (+) ↗ به (−) ↘ ← $x=c$ طول نقطهٔ max نسبی ∩

۲- f' در $x=c$ از ↘ به ↗ ← $x=c$ طول نقطهٔ min نسبی ∪

۳- f' در $x=c$ بدون تغییر علامت ↗↗ یا ↘↘ ← اکسترمم نسبی ندارد

• طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟ «خارج ۸۵»

$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 0 \to 4x(x^2 + x - 2) = 4x(x-1)(x+2) = 0$

$\downarrow$ 0 ، 1 ، -2

نقطهٔ تکی

$-\infty$	-2	0	$+1$	$+\infty$
$-$		$+$	$-$	$+$
$\searrow$	min	$\nearrow$ max	$\searrow$ min	$\nearrow$

★ طول max $= 0$

• نقطهٔ بحرانی تابع $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازهٔ $(-1, 2)$ چگونه است؟ «خارج ۸۶»

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \times 3x^2 - 6x = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}} = 0$$

صورت $\to 3x(x-2) = 0 \to x = 0 , \cancel{x = 2}$

مخرج $\to x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \xrightarrow[\text{امتحان}]{2, -1, 0, 1} (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

-1 ✗ $+2$ ✗ در اکسترمم نسبی نقاط ابتدا و انتهای تابع لحاظ نمی‌شود چون همسایگی ندارد.

$-\infty$	0	$+\infty$
$+$		$-$
$\nearrow$	max	$\searrow$

جواب max

⊛ نقطهٔ تکی را در f' می‌اندازیم نه f!

• کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ؟ «خارج ۹۲»

$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

$\to x(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1) = 0$ $\downarrow$ 0 ، 4 ، -1

$f(-1) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 0$

$f(4) = -32$ min مطلق

• اختلاف بیشترین و کمترین مقدار $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازهٔ $[-2, 2]$ کدام است؟ «۹۲»

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\to x^2 - 2x - 3 = 0 \to (x-3)(x+1) = 0$

$3 \notin [-2, 2]$: 3 ✗ , -1 ✓

$f(-2) = 3$, $f(2) = -17$

$f(-1) = 10$ ★ $10 - (-17) = 27$

• max مطلق $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ در بازهٔ $[-2, 2]$ ؟

$$f'(x) = 1\sqrt{4 - x^2} + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4 - x^2}}(x) = 0$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \to 4 - x^2 = x^2 \to x^2 = 2$$

$\to x = \pm\sqrt{2} \in [-2, 2]$, $f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -2$, $\boxed{f(\sqrt{2}) = 2}$ ج , $f(2) = 0$

• کمترین مقدار تابع $y = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ در بازهٔ $[-1, 2]$ ؟

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 + 3) - [2x(x^2 - 3x)]}{(x^2 + 3)^2} = 0$$

صورت $\cancel{2x^3} + 6x - 3x^2 - 9 - \cancel{2x^3} + 6x^2 = 0$

$3x^2 + 6x - 9 = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) = 0$ — 1 ✓ ، -3 ✗ در بازه نیست

مخرج $x^2 = -3$ غ‌ق , $f(-1) = 1$, $\boxed{f(1) = -\frac{1}{2}}$ ★ جواب

$f(2) = -\frac{2}{7}$

ERAM

نکته) $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2} \to R_f=[\underset{min}{-\frac{a^2}{2}},\underset{max}{\frac{a^2}{2}}]$ *تمام قسیم طور*

• max مطلق $f(x)=\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2+5}$ کدام است؟ «۸۵»

$f'(x)=\frac{-(4x^3-12x^2+8x)}{(x^4-4x^3+4x^2+5)^2}=0$

*فقط صورت) $-4x(x^2-3x+2)=0 \to -4x(x-2)(x-1)=0 \to x=\{0,1,2\}$

$f(0)=\frac{1}{5}\ ,\ f(1)=\frac{1}{6}\ ,\ f(2)=\frac{1}{5} \to max_f=\frac{1}{5}$

راه ۲: $x^2(x^2-4x+4)=x^2(x-2)^2\geq 0 \to x^2(x-2)^2+5\geq 5$ مخرج

$f(x)=\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\dots \to max_f=\frac{1}{5}$

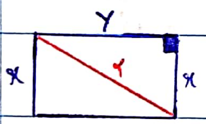
■ بهینه سازی: min مطلق بدی، max مطلق تحویل بگیری

روال حل مسائل بهینه سازی: ۱- در صورت امکان شکلی از مسأله را ترسیم + نامگذاری متغیرها

۲- نوشتن معادلهٔ اولیه یک اکسترمم به صورت تک متغیره

۹۹/۵/٤

۳- مشتق معادله و به دست آوردن اکسترمم مطلق



• اگر قطر یک مستطیل ۲ باشد، ماکزیمم محیط آن را به دست آورید. $P=2(x+y)$

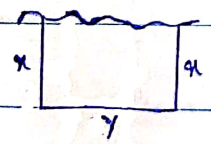
$* \ x^2+y^2=4 \to y=\sqrt{-x^2+4} \to P=2(x+\sqrt{-x^2+4})$

$P'_x=1+\frac{-2x}{2\sqrt{-x^2+4}}=0 \to \frac{\sqrt{-x^2+4}-x}{\sqrt{-x^2+4}}=0 \xrightarrow{صورت} \sqrt{-x^2+4}-x=0$, $\square^2$

$\to -x^2+4=x^2 \to 2x^2=4 \to x=\sqrt{2}$ ✓ $-\sqrt{2}$ ✗

(*) $P_{max}=2(\sqrt{2}+\sqrt{-2+4})=4\sqrt{2}$

• بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود چند متر مربع است؟ «ریاضی خارج ۹۱»



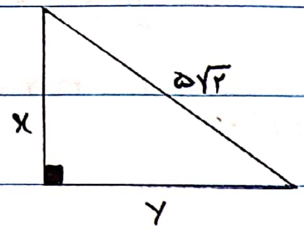
$S=xy\ ,\ P=2x+y=88 \to y=88-2x \to * \ S=x(88-2x)=$

$-2x^2+88x \to P'_x=0 \to -4x+88=0 \to x=22 \to S_{max}=22(88-44)$

$=968$ روش ۲: $\square+\triangle=$ ثابت $\to \triangle\square=max\ (\triangle=\square)$ شرط

$2x+y=88 \to 2x\cdot y=max\ (2x=y \to x=22,\ y=44)$

• با توجه به شکل ماکزیمم $3x+4y$ کدام است؟ «ریاضی ۹۰»



$$x^2+y^2=50 \to x=\sqrt{-y^2+50}$$

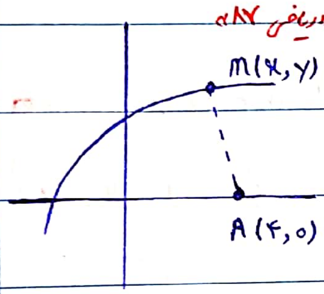
$$3\sqrt{-y^2+50}+4y = \text{خواسته} \to f'_y=0$$

$$3\frac{-2y}{2\sqrt{-y^2+50}}+4=0 \to \frac{-6y+8\sqrt{-y^2+50}}{2\sqrt{-y^2+50}}=0 \to 8\sqrt{-y^2+50}=6y \quad \square^2$$

$$\to -64y^2+3200=36y^2 \xrightarrow{\div 100} y^2=32 \to y=4\sqrt{2} \to 3\sqrt{-32+50}+16\sqrt{2}=$$

$$3\sqrt{18}+16\sqrt{2}=9\sqrt{2}+16\sqrt{2}=25\sqrt{2}$$

• کمترین فاصله نقطه $(4,0)$ از نقاط منحنی به معادله $y=\sqrt{2x+9}$ کدام است؟ «ریاضی ۸۷»



$$AM=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{2x+9})^2}=\sqrt{x^2-6x+25}$$

$$AM'=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+25}}=0 \to 2x=6 \to x=3 \to \sqrt{9-18+25}=4$$

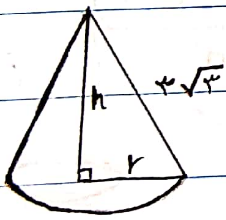
• کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادله $y=\frac{2}{x^2}$ کدام است؟ «ریاضی ۸۸»

$$x^2=\frac{2}{y}$$

$$AM=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{2}{y}+y^2}$$

$$AM'=\frac{-\frac{2}{y^2}+2y}{2\sqrt{\frac{2}{y}+y^2}}=0 \to 2y=\frac{2}{y^2} \to 2y^3=2 \to y=1 \to \sqrt{\frac{2}{1}+1^2}=\sqrt{3}$$

• بیشترین حجم مخروط روبرو؟



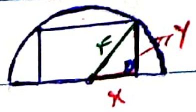
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$h^2+r^2=27 \to r^2=27-h^2 \to V=\frac{1}{3}\pi(27-h^2)h=$$

$$\frac{1}{3}\pi(\underbrace{27h-h^3}_{\square'}) \to V'_h=27-3h^2=0 \Rightarrow 9=h^2 \to h=3$$

$$\frac{1}{\cancel{3}}\pi(27-9)\cancel{3}=18\pi$$

• یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است اگر شعاع دایره ۴ سانتی متر باشد، بیشترین مساحت مستطیل؟



$$S=2xy\ ,\ x^2+y^2=16 \to y=\sqrt{-x^2+16} \to 2x\sqrt{-x^2+16}$$

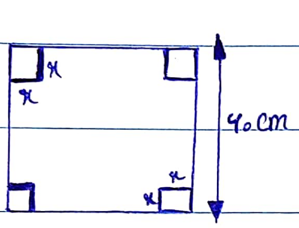
$$S'_x=\overset{\div 2}{\cancel{2}}(\sqrt{-x^2+16})+\cancel{2}x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{-x^2+16}}=0 \to \frac{-x^2+16-x^2}{\text{یه چیزی!}}=0$$

$$-2x^2=-16 \to x=2\sqrt{2}$$

$$\to 4\sqrt{2}\sqrt{-8+16}=4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=16$$

تکنیک صنعتی! در این سؤالات $x = \frac{\text{ضلع}}{6}$

○ از یک قطعه مقوا مربع شکل به ضلع $60\ cm$ جعبه‌ای درباز به شکل مکعب مستطیل می‌سازیم. V_{max} ؟



$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (60-2x)(60-2x) \times \underset{h}{x} = (60-2x)^2 \times x$

$V'_x = 2(60-2x)\times -2 \times x + 1(60-2x)^2 = (60-2x)(-4x + 60 - 2x) = 0$

$2x = 60 \rightarrow x = 30$ × منفی است / $60 = 6x \rightarrow x = 10$ ✓

$\rightarrow (60-20)^2 \times 10 = 16000$