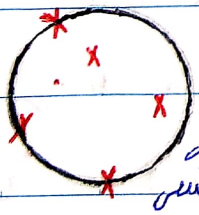
★ جمع بندی آمار کنکور ۷ دهم - ۷ یازدهم

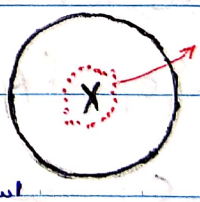
۹۹/۴/۱۴

■ تعریف علم آمار: مجموعه روش هائی است که در نهایت منجر به قضاوت و پیش بینی مناسب درمورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

■ مراحل علم آمار: جمع آوری اعداد و ارقام ← سازمان دهی و نمایش ← تحلیل و تفسیر داده ها ← نتیجه گیری



استفاده از شاخص های پراکندگی



استفاده از شاخص های مرکزی ۱۰ ۲۰ ۳۰

ERAM

Σ , σ سیگما

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ ← فراوانی ، جمع ، ایکس بار ، DATA

مرکزی

۱ـ میانگین = مرکز ثقل = $\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل}}$

۲ـ میانه = داده‌ٔ وسط = اگر n داده، داده‌ٔ $\frac{n+1}{2}$ ← چارک

Q_1 Q_2 Q_3

۳ـ مُد = داده‌ای که بیشترین تکرار را دارد

شاخص‌ها

پراکندگی

۱ـ دامنهٔ تغییرات = اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده $R = max - min$

۲ـ واریانس = میانگین مجذور انحراف داده‌ها از $\bar{x}$ = $\frac{\text{مجموع مجذورات انحراف از } \bar{x}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$

(۱) $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$

(۲) $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ = مجذور میانگین − $\frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$

۳ـ انحراف معیار = جذر مثبت واریانس (σ)

۴ـ ضریب تغییرات = میزان پراکندگی داده‌ها به ازای یک واحد از میانگین $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ بدون یکا

اگر تمام داده‌ها یکسان (a) ← (عدم وجود پراکندگی) $R = \sigma^2 = \sigma = CV = 0$, $\bar{x} = \text{میانه} = \text{مُد} = a$

$+ \; - \; \times \; \div$ عکس العمل مستقیم : مرکزی

$\pm$ بدون عکس العمل : پراکندگی به جز CV

$K : R$

$K^2 : \sigma^2$ ← K (ضرب)

$|K| : \sigma$

ضرب K : تغییر نمی‌کند $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{|K|}{K} = \pm 1$

CV

جمع + : $\downarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}\uparrow}$

تفریق − : $\uparrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}\downarrow}$

n چند است؟ ← اگر میانگین n داده‌ٔ آماری ۱۵ و میانگین ۱۵ داده‌ٔ دیگر ۱۰ باشد به طوری که میانگین تمام داده‌ها با هم ۱۲ باشد.

$12 = \frac{\sum n_i + (15 \times 10)}{n + 15} = \frac{15n + 150}{n + 15} \longrightarrow 12n + 180 = 15n + 150 \longrightarrow n = 10$

$\sum n_i = \bar{x}_n \times n = 15n$

• میانگین اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ را بیابید.

نکته : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ «حسابی» $\longrightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$

$1, 3, 5, \dots, 999$ حسابی $\longrightarrow \bar{x} = \frac{1 + 999}{2} = 500$

• میانگین داده‌های بسته بندی شدهٔ زیر را حساب کنید.

درس	x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۶
ضریب	f	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

-124 ←

$\bar{x}' = \frac{-70 + (-44) + (-30) + 48 + 100}{5 + 8 + 15 + 12 + 10} = \frac{-16}{50} = -0,32$

$\bar{x}' = \bar{x} - 124 \longrightarrow \bar{x} = 124 - 0,32 = 123,68$

ERAM

• اگر مجموع تفاضل تعدادی داده از عدد ۷ برابر صفر باشد، میانگین این داده‌ها را بیابید. «$\bar{x}=۷$»

رابطهٔ انحراف از میانگین $\Sigma(x_i-\bar{x})=0$ ← $x_1, x_2, \dots, x_n$: نکته

• اگر داده‌های ۱۴، ۱۸، ۱۵، ۱۲، ۱۲، ۹، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۵، ۱۱ را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معیار داخل جعبه چند می‌شود؟

نمودار جعبه‌ای

۹, ۱۱, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸

چارک اول — چارک دوم — چارک سوم

$\bar{x}=\frac{12+14+14+15+15}{5}=14$

$\sigma^2=\frac{(12-14)^2+(14-14)^2+(14-14)^2+(15-14)^2+(15-14)^2}{5}=\frac{6}{5}\rightarrow\sigma=\sqrt{1,2}\simeq 1,1$

• واریانس ۲۹۲۰، ۲۹۱۸، ۲۹۱۶، ۲۹۱۴ را حساب کنید.

-2916 ← $x_i: -2, 0, 2, 4$ ← $\bar{x}=1$ ← $\sigma^2=\frac{(-3)^2+(-1)^2+(1)^2+(3)^2}{4}=5$

نکته: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ حسابی ← $\sigma^2=\frac{d^2(n^2-1)}{12}=\frac{2^2(4^2-1)}{12}=\frac{60}{12}=5$

(x_1 و x_2 با فاصلهٔ d، x_2 و x_3 با فاصلهٔ d)

• در ۵۰ دادهٔ آماری، مجموع اختلافات داده‌ها از عدد ۱۲ برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده‌ها از ۱۲ برابر ۴۵۰ است. ضریب تغییرات این داده‌ها چند است؟

$\bar{x}=12$ ، $\sigma^2=\frac{\sum f_i(x-\bar{x})^2}{n}=\frac{450}{50}=9\rightarrow\sigma=3\rightarrow CV=\frac{3}{12}=0,25$

• میانگین محیط مربع‌هائی ۳۲ و میانگین مساحت آن‌ها ۶۵,۴۴ است، انحراف معیار طول اضلاع این مربع‌ها چند برابر میانگین اضلاع است؟

میانگین طول اضلاع $=x=8$ ← میانگین محیط $=4x=32$

$S=x^2\rightarrow\frac{\sum x^2}{n}=65,44$

★ $\sum x_i^2$ = مجموع مساحت مربع‌ها

$\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2=65,44-8^2=1,44\rightarrow\sigma=1,2\rightarrow\frac{1,2}{8}=0,15$

• در ۱۵۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ به هر برابر مربع از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌شیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبل است؟

$CV'=\frac{\sigma'}{\bar{x}'}=\frac{2\sigma}{2\bar{x}+3}=\frac{2\sigma}{27}$

$\frac{CV'}{CV}=\frac{\frac{2\sigma}{27}}{\frac{\sigma}{12}}=\frac{24\sigma}{27\sigma}=\frac{8}{9}$

ERAM

• ضریب تغییرات دریکسری از داده‌های آماری ۸۰ره محاسبه شده است. اگر به هر داده‌ٔ مفروض ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل ۷۵ره خواهد شد، میانگین داده‌های اولیه را بیابید.

$$CV' = \frac{\sigma}{\bar{x}+5} \xrightarrow{\frac{CV}{CV'}} \frac{80}{75} = \frac{\bar{x}+5}{\bar{x}} \xrightarrow{\times 15\bar{x}} 15\bar{x}+75 = 16\bar{x} \longrightarrow \bar{x} = 75$$

★ جمع‌بندی آنالیز ترکیبی و احتمالات: ۶، ۷، دهم ـ یازدهم ـ ۷ دوازدهم

	ساده	$n!$
جایگشت	تکراری	$\frac{n!}{r!}$
	دسته‌بندی	

دسته‌بندی: بین درمیان ← اگر تعداد نامساوی: شروع با تعداد بیشتر ؛ دوری $(n-1)!$

• به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب بازی متمایز را بین ۳ کودک به طور مساوی تقسیم کرد؟

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

• ۳ مهرهٔ آبی متمایز و ۶ مهرهٔ قرمز یکسان را به چند طریق می‌توان در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ مهرهٔ آبی کنار هم نباشند؟

جایگاه قرارگیری آبی ← ▽ ○ ▽ ○ ▽ ○ ▽ ○ ▽ ○ ▽ ○ ▽

$$\binom{7}{3} \times 3! \times 1! = 35 \times 6 = 210$$

• به چند طریق می‌توان حروف A, B, C, D, E, F را کنار یکدیگر قرار داد به طوری که A و B کنار هم باشند و E و F کنار هم نباشند؟

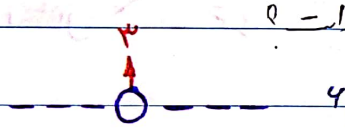
$$\rightarrow 12 \times 12 = 144$$

جایگاه‌های قرارگیری E و F

A, B ← $2! \times 3! = 12$ ← $\binom{4}{2} \times 2! = 12$

• $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 56$ (۳ جمله) — ترکیبی

• ۳ خودکار قرمز و ۴ خودکار آبی (متمایز) به تعداد متفاوت در یک ردیف کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. تعداد حالاتی که خودکار وسطی قرمز باشد چندتاست؟



$$3 \times 6!$$

• با حروف کلمهٔ RANGTN (کاملاً شبیه) چند کلمه رمز ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

N	$\binom{4}{2} \times 3! = 24$	حالت ۷۲
N	$\binom{4}{2} \times 3! = 36$	
N, N	$\binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 12$	

• $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{8} = ?$

پاسکال: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{12}{3} + \binom{12}{4} = \binom{13}{4} = \binom{13}{9}$$

$$\binom{13}{9} + \binom{13}{8} = \binom{14}{9} = C(14,9)$$

• با ارقام ۳,۳,۳,۲,۲,۱ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

حالات: ۱_۲_۲_۳ → $\frac{4!}{2!}=12$ ، ۱_۲_۳_۳ → $\frac{4!}{2!}=12$ ، ۱_۳_۳_۳ → $\frac{4!}{3!}=4$ ، ۲_۳_۳_۳ → $\frac{4!}{3!}=4$ ، ۲_۲_۳_۳ → $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

حالت ۳۸

• با اعداد ۶,۳,۲,۱,۰ چند عدد پنج رقمی زوج متمایز می‌توان نوشت؟

حالت ۶۰ → الف) $4\times 3\times 2\times 1\times 1=24$

ب) $3\times 3\times 2\times 1\times 2=36$

قانون «لاپلاس» ـ اگر مساوی را در نظر نگیریم ـ برد پیروزی ۵۰٪، برد استقلال ۵۰٪

احتمال ـــ تجربی ـ تخمین احتمال: تخمین شانس» پیش‌بینی یک بازی فوتبال: طبق تجربیات بازی‌های پیشین

برد پیروزی ۷۰٪ و برد استقلال ۳۰٪

عدم ★ قانون برنولی «داستان شکست و پیروزی» سکه ـ فرزند ـ ... احتمال $\frac{1}{2}$

$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ n: تعداد کل پرتاب، فرزند، ... ، K: تعداد پیروزی در n بار آزمایش «دقیقا»

• در یک بیمارستان ۵ فرزند در یک روز متولد شده‌اند با کدام احتمال حداقل دو تا از آنان دختر اند؟

$1-\frac{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}}{2^5}=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}$

• در پرتاب دو تاس چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده عددی اول باشد؟

$n(S)=6^2=36$

۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ → $n(A)=15$

$\rightarrow P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

• کیسه‌ای داریم که در آن ۵ مهره زرد و ۳ مهره بنفش وجود دارد به تصادف دو مهره برمی‌داریم احتمال:

تیپ ۱: ۲ مهره باهم الف) حداقل یکی بنفش ب) حداکثر یکی زرد

$n(S)=\binom{8}{2}$ $n(A)=\binom{5}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ ، $n(B)=\binom{5}{0}\binom{3}{2}+\binom{5}{1}\binom{3}{1}$ $\rightarrow P(A)=P(B)=\frac{18}{28}$

تیپ ۲: ۲ مهره متوالی بدون جایگذاری الف) اولی زرد و دومی بنفش ب) یکی زرد و یکی بنفش

$n(S)=\binom{8}{1}\binom{7}{1}$ $n(A)=\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}$ $n(B)=\binom{5}{1}\binom{3}{1}\times 2$ $P(A)=\frac{15}{56}$ ، $P(B)=\frac{30}{56}$

ترتیب مشخص نشده است «جایگشت»

ERAM

پ) همرنگ ت) حداکثر یک بنفش ث) دومی زرد

$n(C) = \binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1} = 26 \rightarrow p(C) = \frac{26}{56}$

$n(D) = \binom{5}{1}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{3}{1} \times 2 \rightarrow p(D) = \frac{50}{56}$

یک بنفش یا هیچی بنفش

$n(E) = \binom{5}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} \rightarrow p(E) = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

اولی زرد دومی زرد یا اولی بنفش دومی زرد

یک مهره $n(S)=8$, $n(E)=5 \rightarrow p(E) = \frac{5}{8}$

نکته: عدم صحبت درباره مهره(هائی) خارج کرده = در تأثیر نگرفتن احتمال آخری

تمرین ۳: ۲ مهره متوالی با جایگذاری الف) همرنگ ب) حداقل یک زرد پ) دومی بنفش

$n(S) = \binom{8}{1}\binom{8}{1}$, $n(A) = \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{3}{1}\binom{3}{1} \rightarrow p(A) = \frac{34}{64}$

$n(B) = \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{1}\binom{3}{1} \times 2 \rightarrow p(B) = \frac{55}{64}$

$n(C) = 3$, $n(S) = 8$ یک مهره $\rightarrow p(C) = \frac{3}{8}$

سازگار $A \cap B \neq \emptyset$ ناسازگار $\neq$ $A \cap B = \emptyset$

پیشامد

مستقل $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ وابسته $\neq$ $p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$

■ قانون احتمال کل:

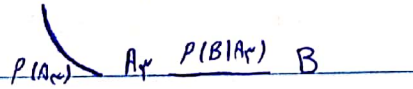
افراز شدن فضای نمونه‌ای به چند قسمت = تفکیک به قسمت‌های ناتهی ۲- بی‌اشتراک ۳- مجموع آنها = S

$p(B) = p(A_1)p(B|A_1) + p(A_2)p(B|A_2) + \dots \rightarrow p(B) = \sum p(A_i)p(B|A_i)$

- قانون ضرب احتمال: $p(A \cap B) = p(B)p(A|B)$

نکته: اگر $A \subseteq B$ آنگاه $p(A) \leq p(B)$

درختی

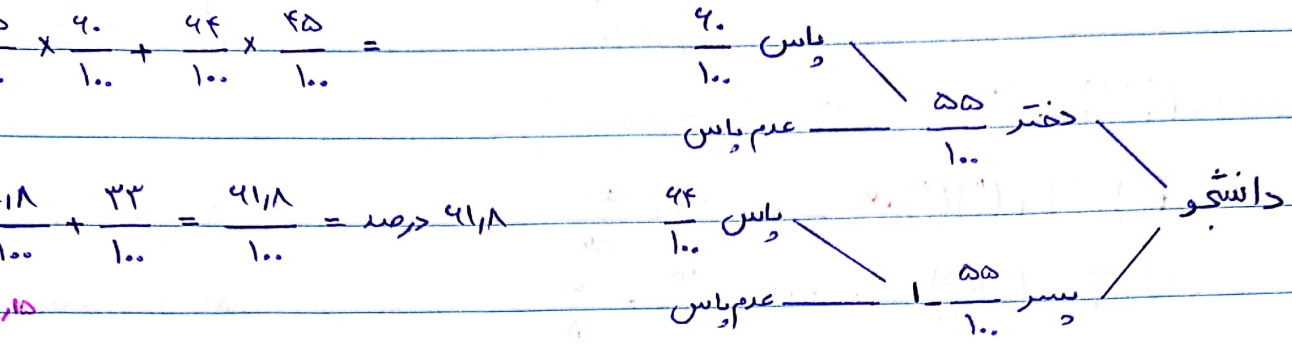


• ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند،

۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را پاس کرده‌اند

چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

ERAM



- $P(A) = P(B) = 0,8$, $P\left((A-B) \cup (B-A)\right) = 0,4 = P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

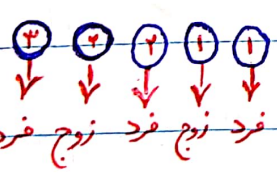
$P(B' \cap A) = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,3 = 0,5$

$\rightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,4 \longrightarrow 1,2 - 2P(A \cap B) = 0,4 \longrightarrow P(A \cap B) = 0,3$

- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند به تصادف سه موش از بین موش‌ها انتخاب می‌شود، با چه احتمالی اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

$$P(\text{سیاه، سفید}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}\binom{7}{1}} = \frac{15}{56}$$

- در سبدی ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد، این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، با چه احتمالی ۲ مهره با شماره فرد متوالیا خارج نمی‌شود؟



$\rightarrow n(A) = 12$

$n(S) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$\rightarrow P(A) = 0,1$

★ جمع‌بندی عبارات جبری: در ۳ جمله

$5+9n$

• ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف، احتمال سیاه و سفید برابر باشد چند مهرهٔ سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟

ظرف اول ($\frac{1}{2}$) ← ۱ مهره سفید ← $\frac{5}{8}$

ظرف دوم ($\frac{1}{2}$) ← ۱ مهره سفید ← $\frac{6}{11+9n}$

$$P_W = \frac{1}{2}\times\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{6}{11+9n}$$

ظرف اول ($\frac{1}{2}$) ← ۱ مهره سیاه ← $\frac{3}{8}$

ظرف دوم ($\frac{1}{2}$) ← ۱ مهره سیاه ← $\frac{5+9n}{11+9n}$

$$P_B = \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{5+9n}{11+9n}$$

$$\frac{5}{16} + \frac{6}{22+2n} = \frac{3}{16} + \frac{5+9n}{22+2n} \rightarrow \frac{2}{16} = \frac{9n-1}{22+2n} \rightarrow 22+2n = 8n-8 \rightarrow n=5$$

• درون ظرفی ۶ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه قرار دارد. در مرحلهٔ اول ۲ مهرهٔ بدون جایگذاری از ظرف خارج می‌کنیم و در مرحلهٔ دوم، ۱ مهرهٔ دیگر از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط در یکی از مرحله‌ها، ۱ مهرهٔ سفید خارج می‌شود؟

مرحلهٔ اول: ۱ سیاه + ۱ سفید ← $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}$

مرحلهٔ دوم: ۱ سیاه ← $\frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}}$

$$\times \rightarrow \frac{6\times4}{45}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{5}$$

مرحلهٔ اول: ۲ سیاه ← $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}$

مرحلهٔ دوم: ۱ سفید ← $\frac{\binom{6}{1}}{\binom{8}{1}}$

$$\times \rightarrow \frac{6}{15}\times\frac{6}{8} = \frac{1}{10}$$

$$+ \rightarrow P = 0/2 + 0/1 = 0/3$$

• تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر زوج بیاید، سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر فرد بیاید، دوباره تاس پرتاب می‌کنیم. این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب سکه شویم. با کدام احتمال حداکثر بعد از پرتاب سوم تاس، سکه «رو» می‌آید؟

اولین پرتاب یا دومین یا سومین پرتاب

زوج ← پشت

فرد ← زوج ← پشت

فرد ← فرد ← زوج ← پشت

$$P = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

ERAM

★ احتمال رخداد یک پیشامد:

احتمال پیشامد حتمی (S) ۱ و احتمال پیشامد نشدنی $(\emptyset)$ ۰ است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\emptyset \subseteq A \subseteq S \rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S) \xrightarrow{\div} \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

«احتمال پیشامد متمم»:

$$P(A) = 1 - P(A') \quad , \quad P(A') = 1 - P(A)$$

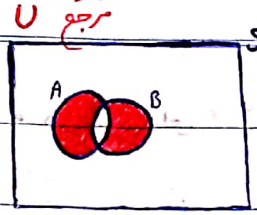
$$\rightarrow P(A) + P(A') = 1$$

مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت $(n(A))$	۱	۲	۳	۴	۵	۶*	۵	۴	۳	۲	۱

$P(A)$ اعداد رو شده یکسان $= \frac{۶}{۳۶}$

$P(A)$ اعداد دوم بزرگتر از اعداد اول $P(B) =$ اعداد اول بزرگتر از اعداد دوم $= \frac{۱۵}{۳۶}$

ERAM



تفاضل متقارن دو پیشامد $(A \Delta B)$: هر دو پیشامد آنهایی هستند ولی همزمان نباشند

$$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B' \quad , \quad B - A = B - (A \cap B) = B \cap A'$$

قوانین دمورگان : $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

$$A \cup A' = U \quad , \quad A \subseteq A \cup B \quad , \quad A \cap A' = \emptyset \quad , \quad A \cup A' = S \quad , \quad (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad , \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$P(A') = 1 - P(A) \longrightarrow n(A') = n(U) - n(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \longrightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \longrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \longrightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A - B) \cup P(B - A) \longrightarrow n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) \longrightarrow n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

عضو هیچ‌کدام / احتمال هیچ‌کدام

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \quad \text{یا} \quad = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

نتیجه ۱ اگر A و B ناسازگار باشند : $P(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad , \quad P(A - B) = P(A)$

نتیجه ۳ پیشامد دو به دو ناسازگار : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

نتیجه ۱ $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(B) + P(A - B)$

مثال اگر $A \subseteq B$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $P(A' \cup B)$ را حساب کنید.

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = \left[1 - \frac{1}{3}\right] + P(B) - \left[P(B) - P(A \cap B)\right] \quad \xrightarrow{A \subseteq B} \quad \text{پس } P(A \cap B) = P(A)$$

تفاضل

$$\Rightarrow = \frac{2}{3} + P(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \longrightarrow \text{متمم}$$

FRAM

99/1/19

فصل هفتم یازدهم: آمار و احتمال (۲)

★ احتمال شرطی:

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

⊛ «احتمال رخ‌دادن پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B رخ داده است»

★ اگر ـ می‌دانیم که ـ با فرض اینکه ★

«احتمال A به شرط B» — حتماً

• اگر $P(A)=0/6$ و $P(B)=0/7$ و $P(A|B')=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $P(B'\cup A)$ را بیابید.

«احتمال A به شرطی که B رخ نداده است»

$$P(A|B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A\cap B')}{1-P(B)} = \frac{2}{3} \xrightarrow{P(B)=0/7} P(A\cap B') = 0/2$$

$$P(B'\cup A) = P(B') + P(A) - P(B'\cap A) = 1 - P(B) + 0/6 - 0/2 \xrightarrow{P(B)=0/7} = 0/7$$

• در جامعه‌ای ۳ درصد افراد احتمال دو قطبی دارند و ۴ درصد افراد احتمال شخصیت مرزی. اگر فردی دارای هر دو این باشد، احتمال بایپولار بودن وی، ۵ درصد است. با کدام احتمال فردی از این جامعه حداقل یکی از این دو اختلال را دارد؟

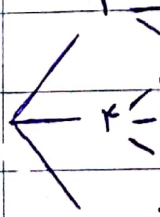
حتماً — حتماً — احتمال شرط

$$P(Bi|Border) = \frac{P(Bi\cap Border)}{P(Border)} = 0/05 \xrightarrow{P(Border)=0/04} P(Bi\cap Border) = 0/002$$

$$P(Bi\cup Border) = P(Bi) + P(Border) - P(Bi\cap Border) = 0/03 + 0/04 - 0/002 = 0/068$$

درصد ۶/۸

• تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم هر دو تاس زوج آمده است: الف) با کدام احتمال جمع اعداد رو شده ۶ است؟ ب) با کدام احتمال حداقل یکی از اعداد رو شده ۲ است؟



$n(S_{جدید}) = 9$

الف) $A=\{(2,4),(4,2)\} \longrightarrow P(A|S_{new}) = \frac{2}{9}$

ب) $B=\{(2,2),(4,2),(6,2),(2,4),(2,6)\} \longrightarrow P(B|S_{new}) = \frac{5}{9}$

ERAM

★ پیشامدهای مستقل: هرگاه وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد:

$$P(A|B) = P(A|B') = P(A)$$

★ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \longrightarrow P(A)\times P(B) = P(A\cap B)$

$$\longrightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\times P(B)$$

نتیجه ۱: دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$

نتیجه ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه پیشامدهای (A', B')، (B, A')، (B', A) نیز مستقل از هم می‌باشند و قانون ضرب احتمالات برای آنها نیز صدق می‌کند.

• اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$، چقدر احتمال دارد که هیچ‌یک از دو پیشامد A و B رخ ندهد؟

مستقل هستند

$$P(A\cup B)' = P(A'\cap B') = P(A')\times P(B') = (1-\frac{3}{4})(1-\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$$

• دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آنکه در پرتاب اولین تاس ۲ ظاهر شود، با کدامیک از دو پیشامد زیر، مستقل است؟ الف) پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۵ شود. ب) پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ شود.

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$B = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \longrightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$C = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \longrightarrow P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

الف) $P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6} \longrightarrow P(B|A) \neq P(B)$ ← وابسته‌اند

ب) $P(C|A) = \frac{n(C\cap A)}{n(A)} = \frac{1}{6} \longrightarrow P(C|A) = P(C)$ ← مستقل‌اند

ERAM