$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{BCED}} = \frac{\frac{9}{14}\cancel{S_{BCED}} + \frac{3}{8}\cancel{S_{BCED}}}{\cancel{S_{BCED}}} = \frac{15}{14}$$

۱،۴،۹۹

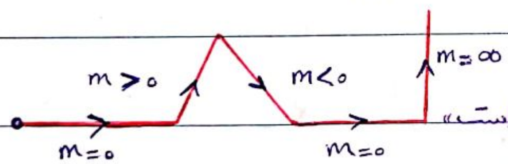
★ جمع بندی توابع کنکور: «دهم + ۳ یازدهم + دوازدهم»

۱ـ معادلهٔ خط: $y = ax + b$ , $ax + by + c = 0$ , $y = mx + h$

روی محور $y$ها = عدد تنها

$m =$ شیب $=$ تندی $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha = f'(x)$

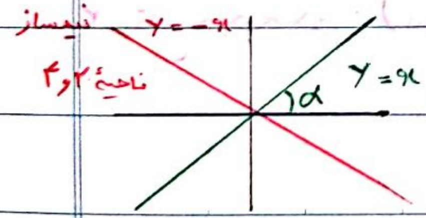
انواع شیب:

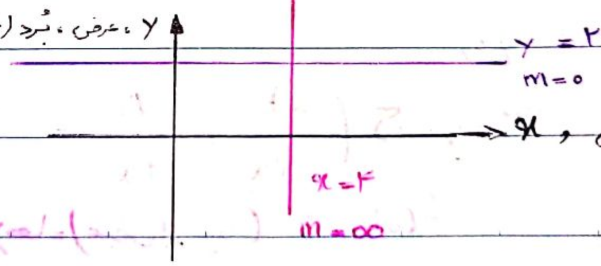



★«معیار: چپ به راست»

عرض از مبدأ $\longrightarrow$ $h \Rightarrow x = 0$

$-\dfrac{b}{a} =$ طول از مبدأ $\longrightarrow$ ریشه $\Rightarrow y = 0$




ERAM

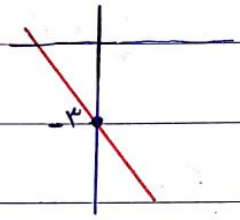
★ برای نوشتن معادلهٔ خطی که یک نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}x_A\\y_B\end{smallmatrix}\right.$ و m آن معلوم است از رابطهٔ ۱ استفاده می‌کنیم و اگر دو نقطه آن $\left(A\left|\begin{smallmatrix}x_A\\y_A\end{smallmatrix}\right., B\left|\begin{smallmatrix}x_B\\y_B\end{smallmatrix}\right.\right)$ مشخص باشد از رابطهٔ ۲ استفاده می‌کنیم:

رابطهٔ ۱: $y - y_A = m(x - x_A)$ رابطهٔ ۲: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

• به ازای هر عدد منفی m خط به معادلهٔ $y = mx + (m-2)$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

$m = -1 \longrightarrow y = -x - 3$

از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.




• خط $2y - 3x = 6$ محور مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند، طول پاره‌خط AB را بیابید.

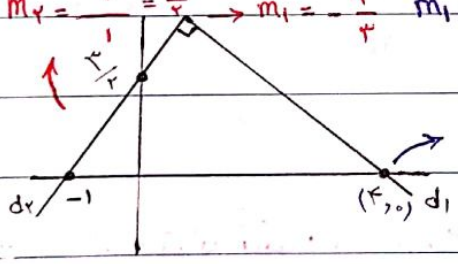
$y = \frac{3x}{2} + 3 \longrightarrow$ عازم: $+3$ $(0,3)$

طازم: $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{\frac{3}{2}} = -2$ $(-2,0)$ $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

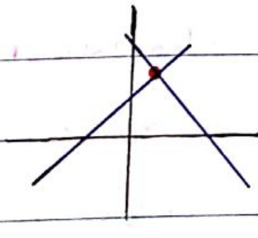
نکته: $m_1 = -\frac{1}{m_2} \longrightarrow L_1 \perp L_2$ , $m_1 = m_2 \longrightarrow L_1 \parallel L_2$

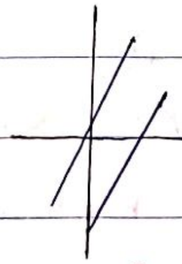
$m_2 = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2} \longrightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$

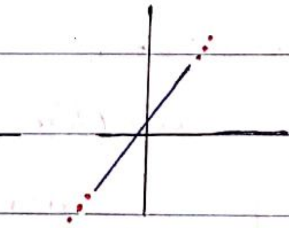



$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 4) \longrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

نکته: دستگاه دو معادله خط دو مجهول سه‌گونه جواب دارد:







$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

برخورد ۲ خط: ۱ جواب  ۲ خط موازی باهم: ۰ جواب  ۲ خط منطبق برهم: بی‌شمار جواب

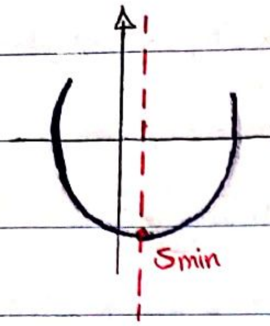
۲- تابع درجه دوم: (سهمی) $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$a > 0$ ∪ $S_{min}$ $\longrightarrow$ رأس $S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$

$a < 0$ ∩ $S_{max}$

روی محور yها (عرض از مبدأ): $f(0) = c$

محور تقارن $(x = -\frac{b}{2a})$




روی محور xها ← $y = 0$ ← ریشه

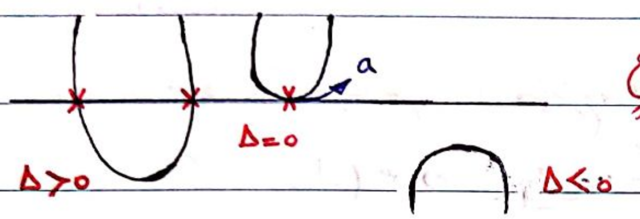
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  $\Delta > 0$ : ۲ ریشهٔ متمایز $(x_1 , x_2)$

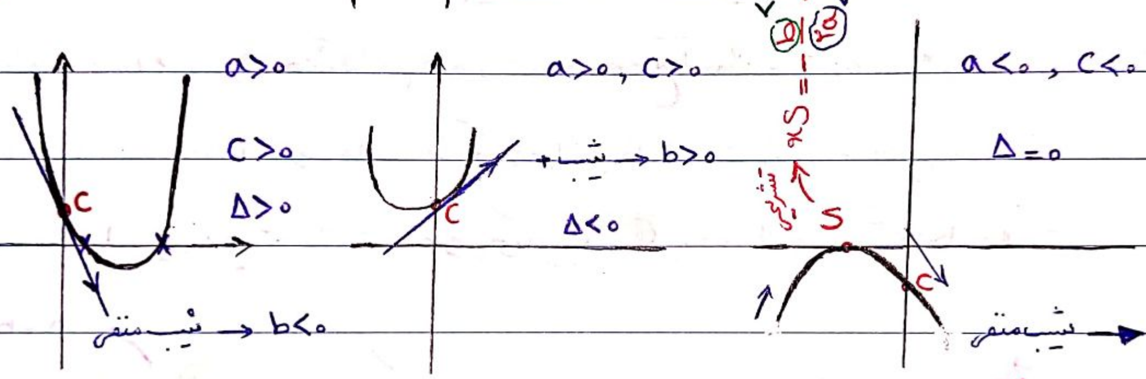
$\Delta = 0$ ← (ریشهٔ مکرر مرتبه دوم) | ریشهٔ مضاعف ← $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$ ← ریشه ندارد

اگر $\Delta > 0$ : $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

اگر $\Delta = 0$ : معادله سهمی به صورت $(x \pm a)^2$ مربع




خط تقارن : $x = h$

نکته: اگر ضابطهٔ سهمی به صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد، نقطهٔ رأس سهمی $S(h,k)$ خواهد بود.

• نقطهٔ تلاقی نمودار $y_1 = x^2 - 9x + 21$ با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را بیابید.

$y_2 = x$  $y_1 = y_2$

$\to x = x^2 - 9x + 21 \to x = x^2 - 10x + 21 \to x = 3 , \; x = 7$

• توابع زیر را رسم کنید. «روش نقطه‌یابی»

الف: $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$

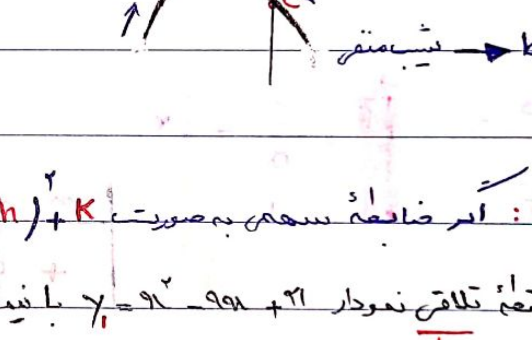
$a > 0$  $S(+1,-1)$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| +1 | -1 | +1 |

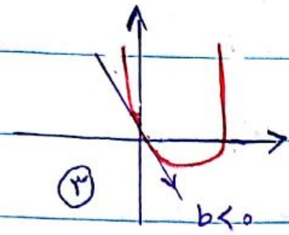
ب: $f(x) = -(x+2)^2 + 3$

$a < 0$  $S(-2,3)$

| | | |
|---|---|---|
| -3 | -2 | -1 |
| 2 | 3 | 2 |



$a>0 , b<0 , c=1$




• نمودار سهمی $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیهٔ مختصاتی نمی‌گذرد؟ سوم

• راس سهمی به معادلهٔ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ را ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم، معادلهٔ آن پس از انتقال را بیابید.

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 + 1 = -\frac{x^2}{2} - 2x - 2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$$

■ تعیین علامت:

۱- پیدا کردن ریشه‌ها (در کسرها هم صورت هم مخرج) ۲- مشخص کردن ریشه‌های مرتبهٔ زوج با ★ (ریشه‌هائی که دو، چهار و ... بار تکرار شده‌اند) (مخصوص تعیین علامت کسری) ۳- ریشه‌های صورت = ۰ در تعیین علامت ریشه‌های مخرج = ت ن و ریشه‌هائی که هم در صورت و هم در مخرج آمده‌اند = ت ن ۴- علامت بزرگترین توان x در صورت و مخرج یافته و حاصل ضرب علامت‌های آنها را در اولین خانهٔ سمت راست می‌گذاریم ۵- از راست به چپ حرکت می‌کنیم و با تغییر ریشه علامت را عوض می‌کنیم. ⊛ با عبور از ریشه‌های ★دار علامت عوض نمی‌شود

• نامعادلهٔ $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \leq 0$ را حل کنید.

$a+b+c=0$

$x^2 - 1 \to (x+1)(x-1)$

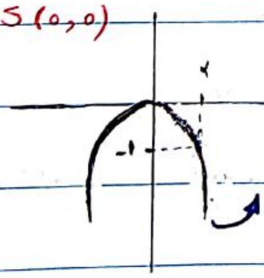
ریشه‌های صورت: $1 , \frac{c}{a} = -2$

ریشه‌های مخرج: $1 , -1$

| $-\infty$ | $-2$ | | ★ $-1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | 0 | − | ت ن | − | ت ن | + | |

جواب $\to [-2,-1) \cup (-1,+1)$

$S(0,0)$

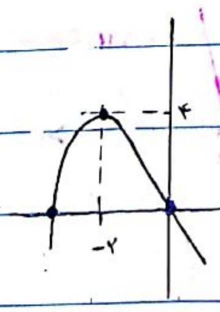



• اگر راس سهمی نمودار مقابل را به نقطهٔ $(-2, 3)$ انتقال دهیم، معادلهٔ آن به چه شکل در می‌آید؟

$y = ax^2 \xrightarrow{(2,-1)} -1 = 4a \to a = -\frac{1}{4}$

$y = a(x-k)^2 + h \to y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3 = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$

• با توجه به نمودار $f = a(x - x_1)(x - x_2)$ مقدار a را بیابید.




$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow -4 = 0 + x_2 \to x_2 = -4$

$f = a(x-0)(x+4) \xrightarrow{(-2,4)} 4 = a(-2-0)(-2+4)$

$4 = -4a \to a = -1$

| عنوان | فرم ضابطه | شکل ها |
| --- | --- | --- |
| ریشهٔ ساده | $(x-a).f(x)$ | |
| ریشهٔ مضاعف | $(x-a)^{2k}.f(x)$ | |
| ریشهٔ مکرر فرد | $(x-a)^{2k+1}.f(x)$ | |
| نقطهٔ دوشاخه | $\lvert x-a\rvert.f(x)$ | |
| عطف قائم | $\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)^{\text{فرد}}}.f(x)$ | |
| نقطهٔ بازگشت | $\sqrt[\text{زوج}]{(x-a)^{\text{زوج}}}.f(x)$ | |

خط $x-2$

۸،۷ $|x-2|$

سهمی U $(x-2)^2$

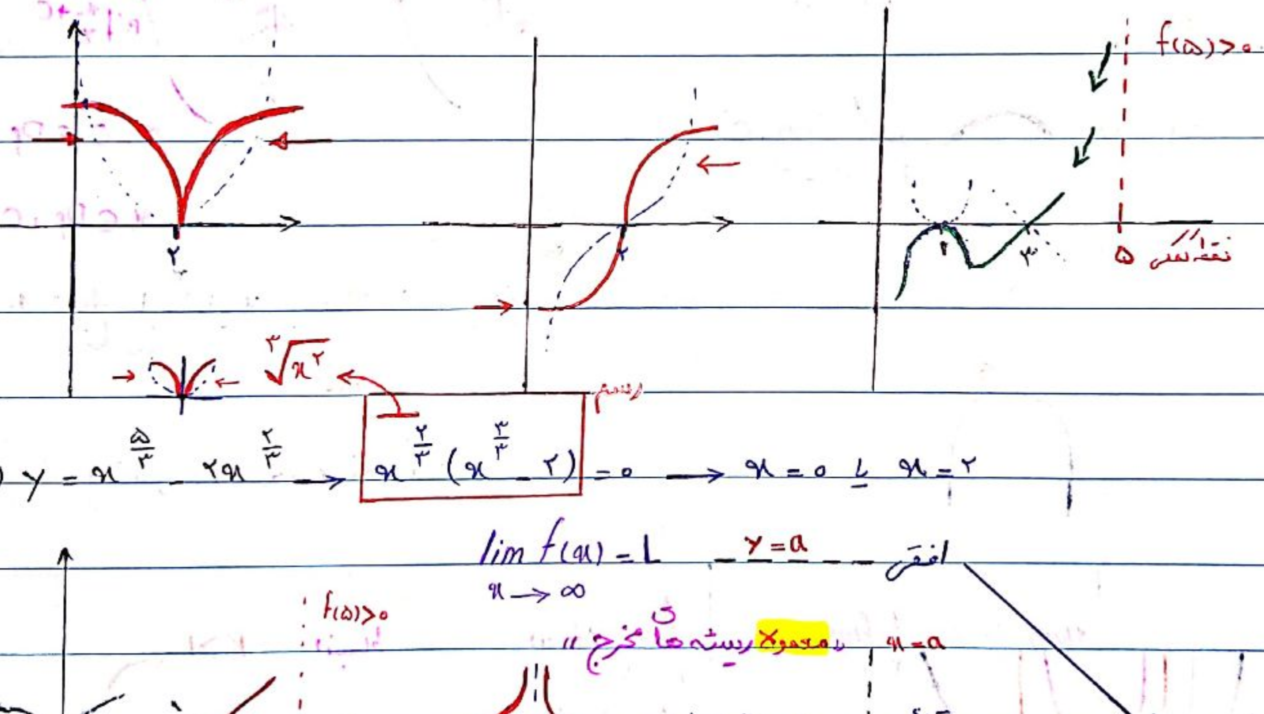
تُر $(x-2)^3$

ابروئی $\sqrt[2]{x-2}$

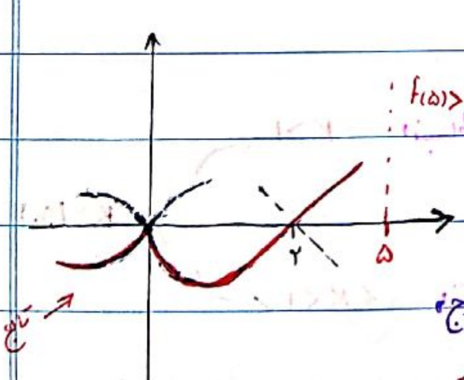
ابروئی دوبل $\sqrt[3]{x-2}$

• توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt[4]{(x-2)^2}$ ب) $y=\sqrt[5]{(x-2)^4}$ پ) $y=(x-1)^2(x-3)$




ت) $y=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \boxed{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{3}{3}}-2)}=0 \longrightarrow x=0$ یا $x=2$




مجانب ها:

افقی $y=a$ — $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

قائم $x=a$ «معمولاً ریشه‌ها مخرج»

حالت اول: $\frac{\bigcirc}{(x-a)^{2k}}$ «متصل زوج»

حالت دوم: $\frac{\bigcirc}{(x-a)^{2k-1}}$ «متصل فرد»

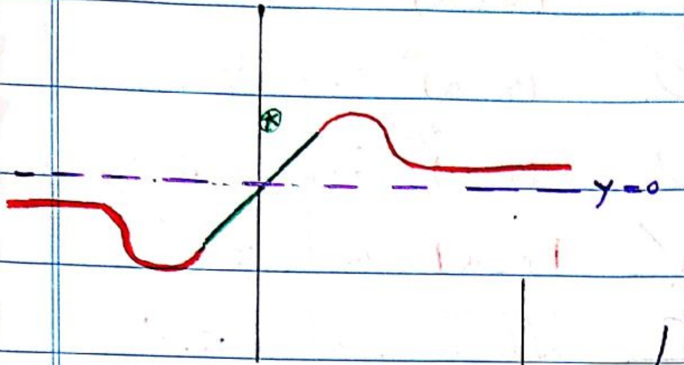
مایل $y=mx+h$

ERAM

• تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ را رسم کنید. $x=0$

پرتوان $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$

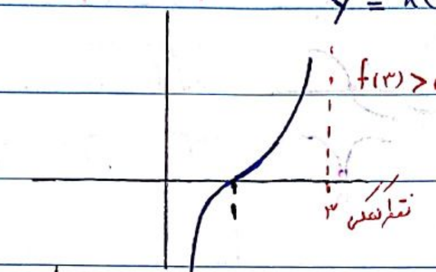
$x^2=-1$ ✗ جا مجانب قائم نداریم — $y=0$ جا مجانب افقی



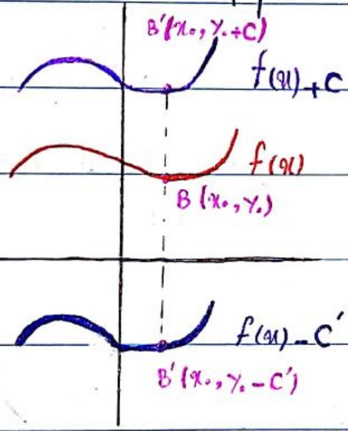

• نمودار $y=x^4-3x^3+3x^2-x$ در نقطهٔ $x=1$ را رسم کنید. (۸۹)

اطراف ریشه

$y=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3$ ریشه فرد ← $x=1$



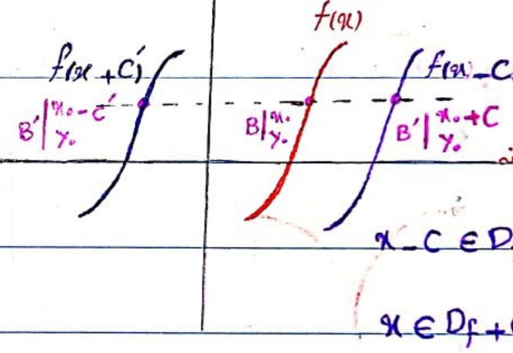

★ تبدیل نمودار تابع به ۲ روش ۱) انتقال عمودی و افقی ۲) انبساط و انقباض انجام می‌شود.




انتقال‌های عمودی

تغییرات در برد:

انتقال‌های افقی




تغییرات در دامنه:

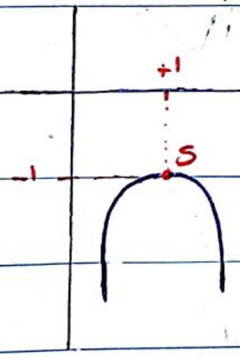
$x-c\in D_f$

$x\in D_f+c$

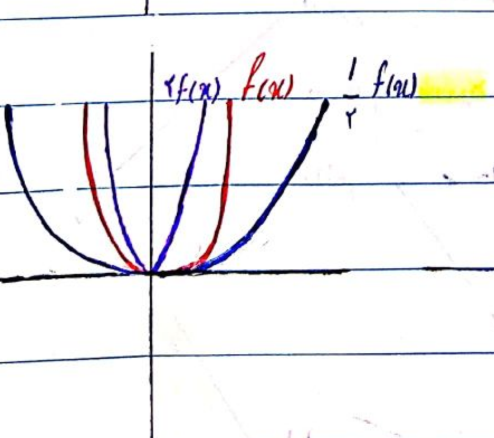
• نمودار تابع $y=-(x-1)^2+1$ را رسم کنید.

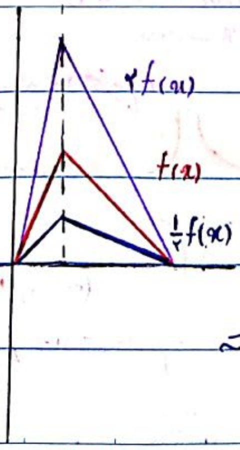
پایین، راست

$a<0$




★ انبساط و انقباض: (عمودی) تغییرات در برد




$y=kf(x)$

انبساط $k>1$

انقباض $0<k<1$

مهم ★ انبساط = باز / انقباض = بسته

روی R عدم تأثیر

• اگر بُرد تابع f در بازهٔ $[-\sqrt{5}, 1]$ باشد، آنگاه بُرد $g(x) = -\sqrt{2}f(x+1) - 3$ را بیابید.

$-\sqrt{5} \le f(x+1) \le 1 \xrightarrow{-\sqrt{2}} -\sqrt{2} \le -\sqrt{2}f(x+1) \le \sqrt{10} \xrightarrow{-3} -\sqrt{2}-3 \le g(x) \le \sqrt{10}-3$

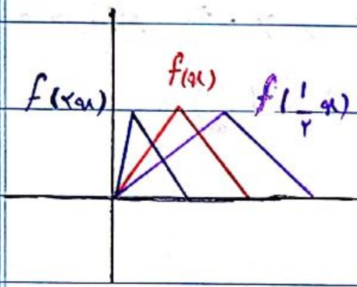
★ انبساط و انقباض «افقی» تغییرات در دامنه

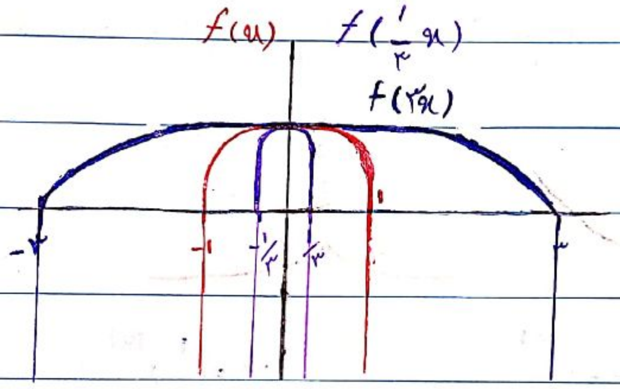
$f(2x):\ 2x \in D_f \longrightarrow x \in \frac{1}{2}D_f$

$f(x):\ x \in D_f$

$f(\frac{1}{2}x):\ \frac{1}{2}x \in D_f \longrightarrow x \in 2D_f$

$y = f(kx)$ ← $k>1$ انقباض ، $0<k<1$ انبساط



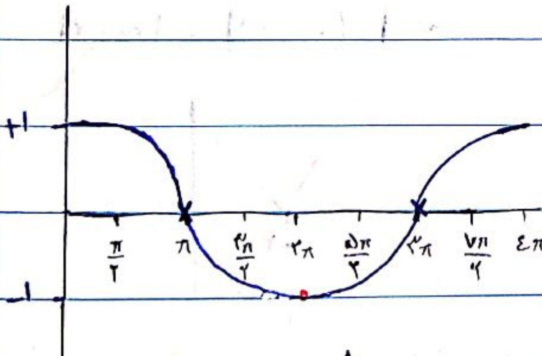

★ مهم ریشه: در $kf(x)$ ، عرض نقاط $k$ برابر و در $f(kx)$ ، طول نقاط $\frac{1}{k}$ برابر

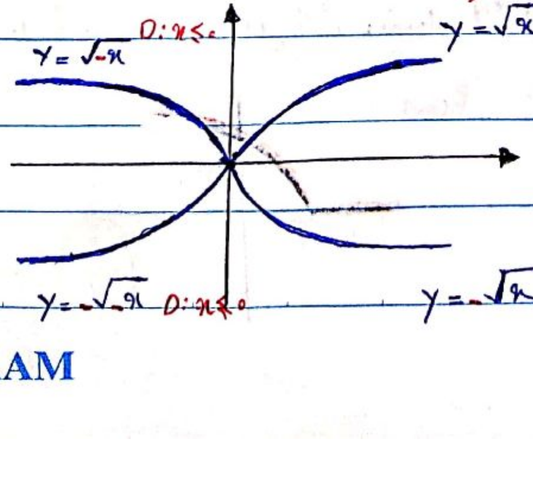
↲ برای توابع مثلثاتی حواست باشه به سؤال ریشه‌ها را در $k$ یا $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم.

• یک تناوب تابع $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

ریشه‌های $f(x) = \cos x$ در یک تناوب: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ریشه‌های $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ : $\pi, 3\pi$ ↲ $\times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \times 2$



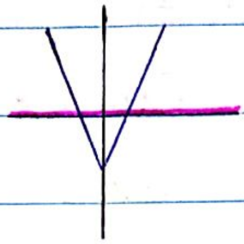

$\ge 0$ ، $y = \sqrt{x}$

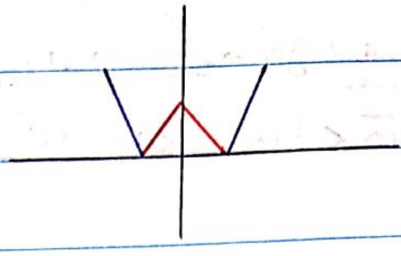
نکته: $f(x)$ ← $-f(x)$ قرینه نسبت به محور xها

$f(-x)$ قرینه نسبت به محور yها

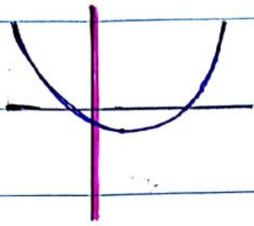
**ERAM**

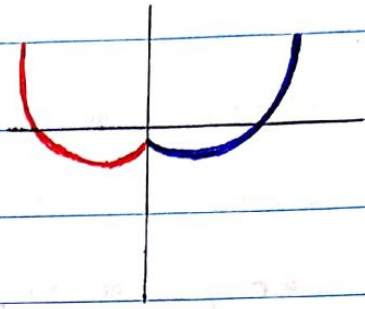
$$|f(x)| \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$





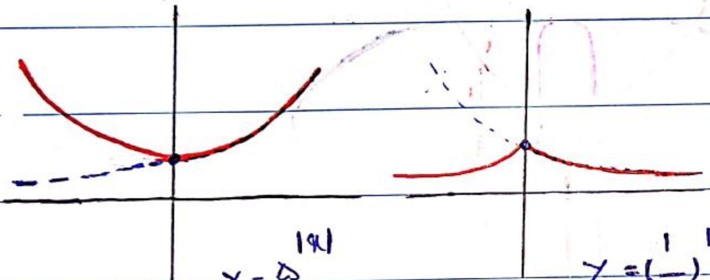
$$f(|x|) \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$





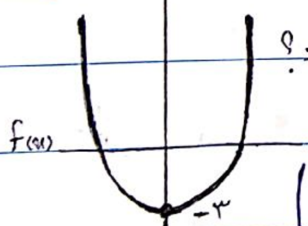
• دو تابع $y=5^{|x|}$ و $y=5^{-|x|}$ را رسم کنید. (توابع نمائی و لگا مرتبط با فصل ۵ یازدهم - اولین جزوه‌ی این دفتر خوانده شود.)

$(5^{-1})^{|x|} = (\frac{1}{5})^{|x|}$

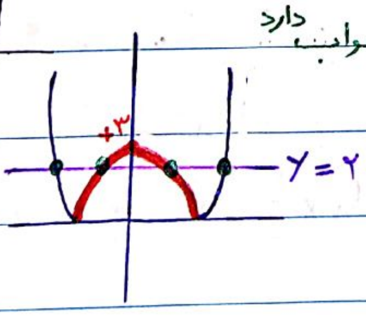


$y=5^{|x|}$ $\qquad$ $y=(\frac{1}{5})^{|x|}$

• اگر نمودار f به این صورت باشد، $|f(x)|=2$ چند جواب دارد؟



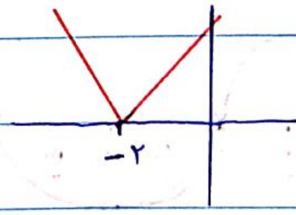
٭ ۴ جواب دارد



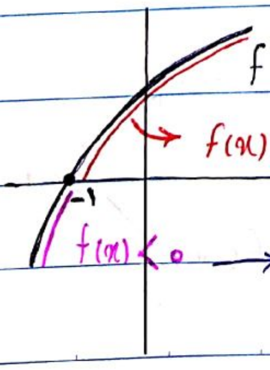
• نمودار $y=|-x-2|$ را رسم کنید.

$|-a|=|a|$ ★

$y=|-(x+2)|=|x+2|$

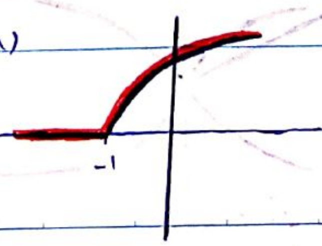


• اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار $y=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ چگونه است؟



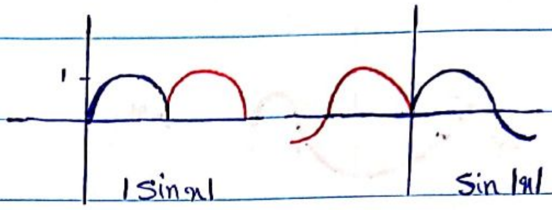
$f(x) \geq 0 \longrightarrow y=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

$f(x) < 0 \longrightarrow y=\frac{f(x)-f(x)}{2} \Rightarrow y=0$

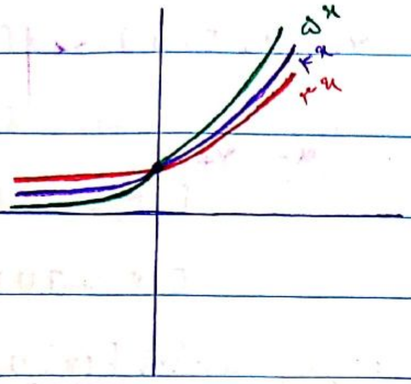


«همه صعودی»

• نمودارهای $|\sin x|$ و $\sin|x|$ را رسم کنید.




• نمودارهای $3^x$ ، $4^x$ ، $5^x$ را رسم کنید.




$x>0 : 5^x > 4^x > 3^x$

$x<0 : 3^x > 4^x > 5^x$

• نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

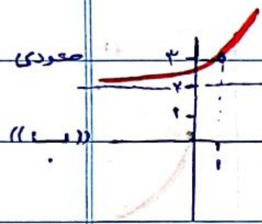
الف) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$

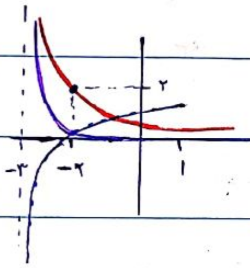
ب) $g(x) = 2^{x-1} + 2$

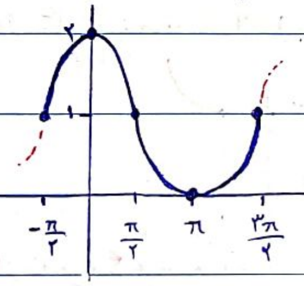
پ) $h(x) = -\log_{10}^{x+3} + 2$

اول

دوم



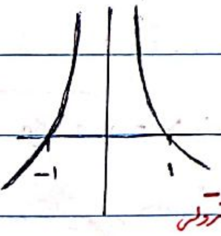



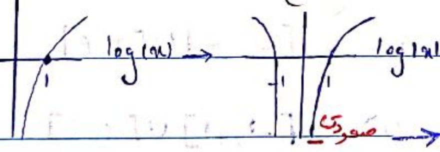

• اگر $f(x) = \log_{2} x + 2$ آنگاه چه تابعی از آن از مبدأ مختصات عبور می‌کند؟


$(1,2) \xrightarrow{-1,\ -2} (0,0)$

$f(x+1) - 2$

• ضابطهٔ تابع مقابل را بنویسید.



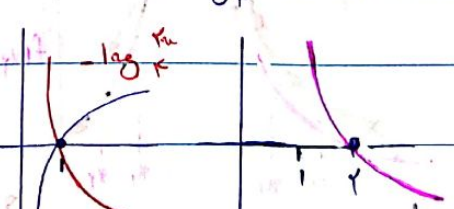




$\rightarrow f(x) = -\log|x|$

• نمودار تابع $f(x) = \pm 1 - \log_4 2x$ را رسم کنید.

$f(x) = 0 \rightarrow \log_4^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$ ریشه

$-\log_4^{2x}$

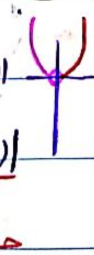



• اگر نمودار تابع $f$ به این صورت باشد، آنگاه تابع $y = \frac{|x|}{x} f(x)$ با چه تابعی برابر است؟

$x<0 \rightarrow y = -f(x)$

$x>0 \rightarrow y = f(x)$

$|f(x)|$



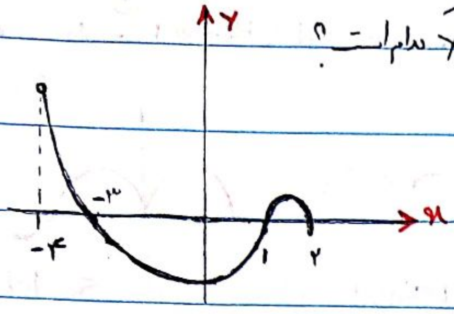
قرینه $-|f(x)|$

جواب

۹۹/۴/۲

$x \cdot f(x) \geq 0$ ⟵ $x$ و $y$ هم‌علامت

• شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است، دامنهٔ $y=\sqrt{x\cdot f(x)}$ کدام است؟



1) $[0,2]$ — در $[0,1]$ ← $x+$ و $y-$

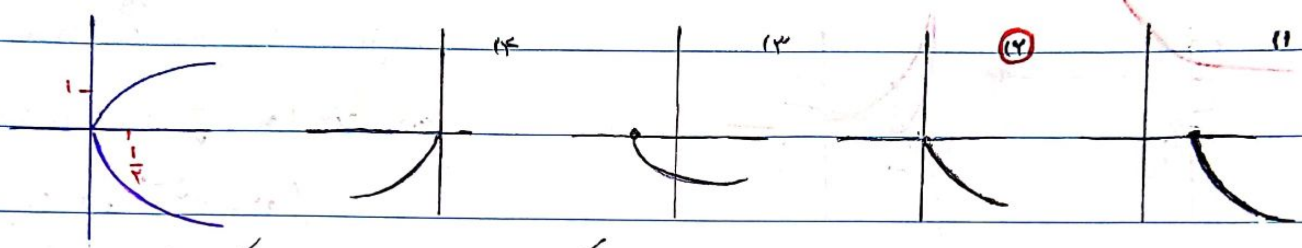
2) $[-3,2]$ — $x-$ , $y+$ ←

3) $[-4,-3]\cup[1,2]$

4) ✓ $[-3,0]\cup[1,2]$

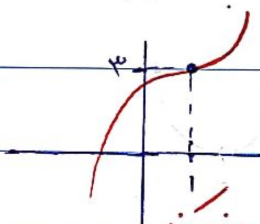
⟵ طول $\frac{1}{2}$ برابر

• اگر $\sqrt{x} = f(x+1)$ ، آنگاه نمودار تابع $g(x) = -2f(-2x+1)$ به کدام صورت است؟ «به صورت نسبی»



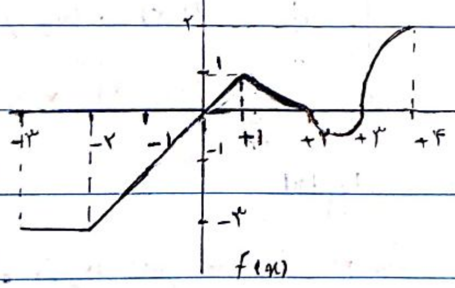
• نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3(x^2-x)+2$ از کدام ناحیهٔ مختصاتی عبور نمی‌کند؟

$f(x) = x^3-3x^2+3x-1+3 = (x-1)^3+3$



از ناحیهٔ ۴ عبور نمی‌کند

• اگر نمودار تابع f به صورت شکل مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(2x+1)}$ را بیابید.

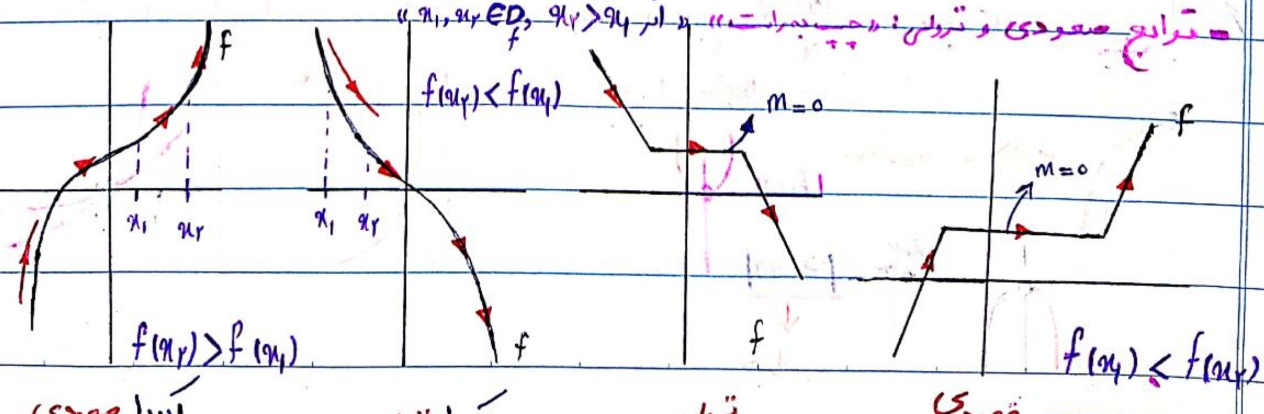


$f(x)\geq 0 \to [0,+2]\cup[3,4]$

$f(x+1)\geq 0 \to [-1,+1]\cup[2,3]$ — هر دو تاثیر بر دامنهٔ f

$f(2x+1)\geq 0 \to [-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]\cup[1,\frac{3}{2}]$ جواب

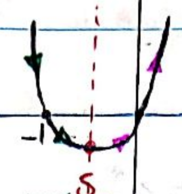
• توابع صعودی و نزولی: «چپ به راست» اگر $x_1,x_2\in D_f$ , $x_2>x_1$




اکیدا صعودی — اکیدا نزولی — نزولی $f(x_1)\geq f(x_2)$ — صعودی

نکته ۱: اگر تابعی در دامنهٔ خود صعودی یا نزولی باشد، آنگاه به آن یکنوا گویند و اگر در دامنهٔ خود صعودی یا نزولی نباشد، به آن غیریکنوا گویند.

$y = x^2 + x = x(x+1) \to x=0 \,,\, x=-1$



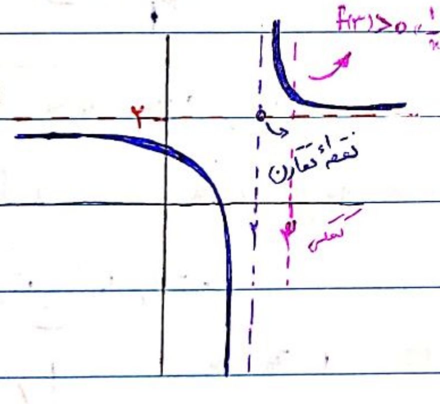
★ تابع غیریکنواست.

نکته ۱: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در $R$ (نزولی ← نسبت S → صعودی) غیریکنواست و در بازه‌ای که $x_S$ نقطهٔ درونی آن بازه نباشد یکنواست. «برای $f(x)=|x|$ نیز صدق می‌کند.»

★ تابع هموگرافیک: تابع کسری‌ای به صورت که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای از درجهٔ ۱ داشته باشند را گویند که هم مجانب افقی دارد هم مجانب قائم.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$$

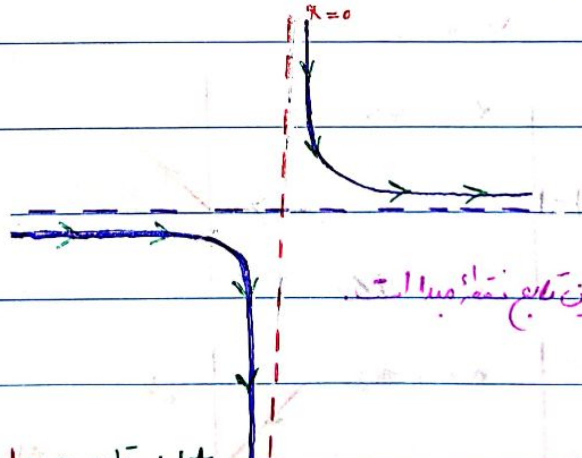
$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ , $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2 \to y=2$ مجانب افقی و $x=2$ مجانب قائم (ریشهٔ مخرج)



★ تابع هموگرافیک: $f(x)=\frac{1}{x}$ : بهترین حالت است ... $f(1)>0$

ریشهٔ مخرج قائم $x=0$ و مجانب افقی $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \to y=0$

منفصل فرد



$D = \mathbb{R} - \{0\}$ , $R = \mathbb{R} - \{0\}$

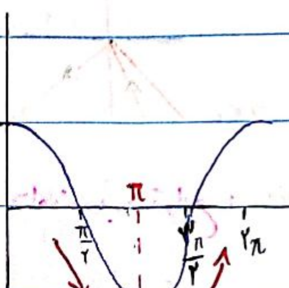
° نقطهٔ تقارن این تابع نقطهٔ مبدأ است.

° ضابطهٔ این تابع وارون خودش است.

° این تابع، تابعی یک به یک است.

★ این تابع در دامنهٔ خود نزولی است.

° صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x) = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ مشخص کنید.

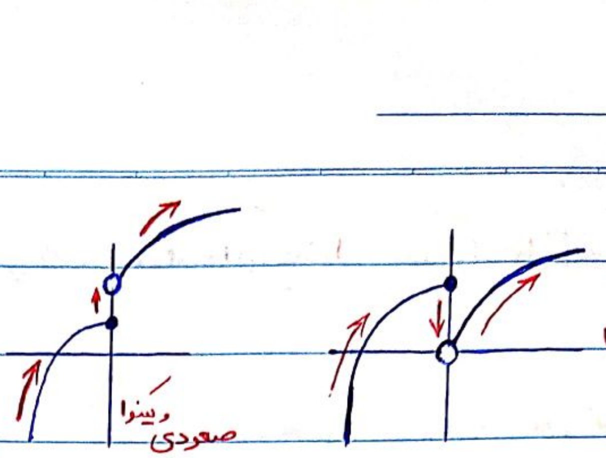


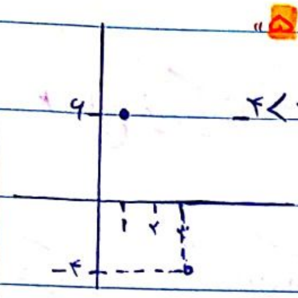
نزولی $[0, \pi]$ ، صعودی $[\pi, 2\pi]$ → $[0, 2\pi]$ غیریکنوا

★۱ برای انتخاب شکل (مانند $\frac{1}{x}$ یا قرینهٔ آن) باید مشتق تابع را بگیریم اگر + شد نمودار ★ و برعکس یا $f(0)$ را حساب می‌کنیم یا از نقطهٔ $(1,1)$ استفاده می‌کنیم.

ERAM

° اگر $f=\{(2,2m+3),(1,6),(3,-4)\}$ یک تابع نزولی اکید باشد، آنگاه در محدودهٔ m چند عدد صحیح وجود دارد؟ «۵»



$-4<2m+3<6$

$-\frac{7}{2}<m<\frac{3}{2}$

$m=\{-3,-2,-1,0,1\}$

° تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x : |x+1|<2\}$ همواره چگونه است؟

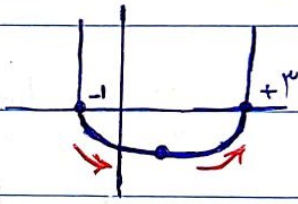
$*\ |x|<a \to -a<x<a$

$*\ |x|>a \to x>a \,,\, x<-a$

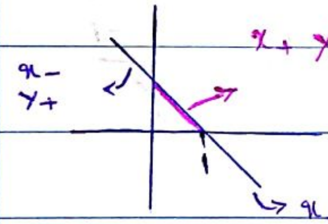
$|x-1|<2 \to -2<x-1<2 \to -1<x<3$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \to x=-1 \,,\, x=3$

در دامنهٔ سؤال $f(x)<0$ همواره منفی



° تابع $f:\underset{\text{دامنه}}{R}\to\underset{\text{بُرد}}{R}$ یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی است که محور x ها را با طول یک قطع می‌کند، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x\,.\,f(x)}$ را بیابید.



$x+\ y+ \to D_g: [0,1]$

$x\,.\,f(x)\geq 0 \to$ x و y هم علامت است

° کدام تابع نزولی است؟

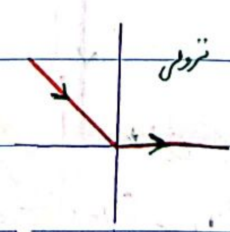
1) $y=x+|x|$ $\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

صعودی

2) $y=2x+|x|$ $\begin{cases} 3x & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$

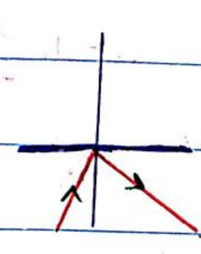
صعودی

3) $y=|x|-x$ $\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$ ✓



نزولی

4) $y=x-2|x|$ $\begin{cases} -x & x\geq 0 \\ 3x & x<0 \end{cases}$



غیرپیوسته

■ دامنه و بُرد توابع: D: Domain دامنه مولفهٔ اول

R: Range بُرد مولفهٔ دوم

۱۱- تابع خطی: $y=ax^{n}+bx^{n-1}+\dots+c$ $\quad D=\mathbb{R}$

۱۲- تابع کسری: $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D=\mathbb{R}-\{g(x)=0\}$ به صورت کلی ← $D_f\cap D_g \ , \ g\neq 0$

۱۳- تابع رادیکالی: $y=\sqrt[\text{فرد}]{f(x)} \ , \ D:D_f$ $\quad y=\sqrt[\text{زوج}]{f(x)} \ \ f(x)\geq 0$

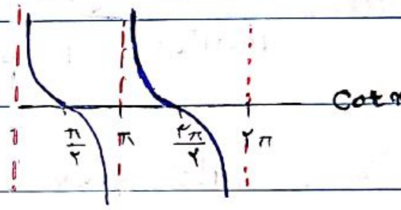
$\frac{1}{\sqrt[\text{فرد}]{f(x)}} \ \ f(x)\neq 0 \ , \ D:D_f \ , \ \frac{1}{\sqrt[\text{زوج}]{f(x)}} \ \ f(x)>0$

۱۴) $\log_{\text{مبنا}}^{\text{صورت}}$ (صورت $>0$) $\cap$ (مبنا $>0$ , مبنا $\neq 1$)

۵) $\sin x \ , \ \cos x \quad D:\mathbb{R}$ و $\sin f(x) \ , \ \cos f(x) \quad D:D_f$

$y=\tan x \ , \ \cos x\neq 0 \ , \ \{x \mid x\in\mathbb{R}, \ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

$y=\cot x \ , \ \sin x\neq 0 \ , \ \{x \mid x\in\mathbb{R}, \ x\neq k\pi\}$




• دامنهٔ توابع زیر را حساب کنید. ✪ در به دست آوردن دامنه حق ساده کردن توابع کسری را نداریم.

۱) $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ $\ \mathbb{R}$ $\qquad$ ۲) $y=\cos\frac{1}{x}$ $\ \mathbb{R}-\{0\}$

۳) $y=\cancel{2}\tan(x-\frac{\pi}{4})+\cancel{1}$ $\qquad x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4}$

عدم تاثیر بر دامنه

۴) $y=\begin{cases} x^2+1 & 0\leq x<1 \quad [0,1) \\ 3x+2 & 1\leq x\leq 3 \quad [1,3] \end{cases}$ $\ \cup$ ← چندضابطه‌ای‌ها $\quad D:[0,3]$

۵) $y=\sqrt{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0}-\underbrace{\sqrt{x+3}}_{\geq 0}} \rightarrow D:\varnothing$ $\quad$ فقط $x=-1$ $\quad$ فقط $x=-3$

۶- $y=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$ $\ \Big| \ 1-2x\geq 0 \rightarrow \frac{1}{2}\geq x$

$4-\sqrt{1-2x}\geq 0 \xrightarrow{\square^2} 16\geq 1-2x \rightarrow 15\geq -2x \rightarrow -\frac{15}{2}\leq x$

$*D:[-7.5 \ , \ 0.5]$

۷- $\sqrt{x-|x|+1} \rightarrow x-|x|+1\geq 0 \rightarrow x+1\geq |x| \rightarrow -x-1\leq x\leq x+1 \xrightarrow{-x} -2x-1\leq 0\leq 1$

$* \ 2x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

۸) $y=\sqrt{|x-1|-4} \rightarrow |x-1|\geq 4 \rightarrow x-1\geq 4$

$\rightarrow x\geq 5$ یا $x-1\leq -4 \rightarrow x\leq -3$

روش ۲: $\xrightarrow{\square^2}$ یا $x^2-2x+1\geq 16 \rightarrow x^2-2x-15\geq 0$ $\quad -5 \ \ +3$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $+5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\rightarrow D:(-\infty,-3]\cup[+5,+\infty)$

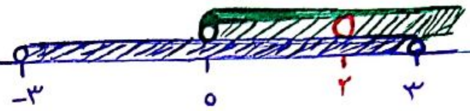
9) $y=\sqrt{1-\log(x-1)}$ | $1\geq \log_{10}(x-1) \longrightarrow 10^{1}\geq x-1 \longrightarrow 11\geq x$

D: (1,11] | $x-1>0 \longrightarrow x>1$

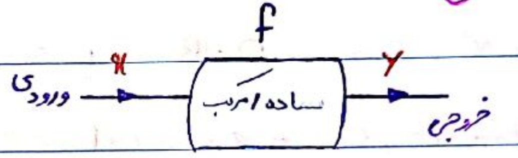
10) $y=\log_{\frac{x}{2}}(9-x^2)$ | $9-x^2\geq 0 \longrightarrow x^2<9 \longrightarrow -3<x<3$

D: $(0,3)-\{2\}$ | $\frac{x}{2}>0 \longrightarrow x>0$

$\frac{x}{2}\neq 1 \longrightarrow x\neq 2$ (1)



■ مقدار تابع: دستگاهی به اسم تابع ←




ه اگر $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{3}-2)$ را بیابید.

$$f(x)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2+3} \longrightarrow \frac{(\sqrt{3}-2+2)^2+1}{(\sqrt{3}-2+2)^2+3}=\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

ه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع می‌کند و از نقطهٔ $(-2,-6)$ می‌گذرد، $f(-1)$ را بیابید.

$A(0,-6) \to f(0)=-6 \to c=-6$

$B(1,0) \to a+b-6=0$

$C(-2,-6) \to 4a-2b-6=-6 \to 4a-2b=0$

$\to a+b-6=4a-2b \to -6=3a-3b$

$\to a=b-2 \to b-2+b-6=0$

$\to 2b=8 \to b=4 \to a+4-6=0 \to a=+2$

$\to f(x)=2x^2+4x-6 \to f(-1)=2-4-6=-8$

ه اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ باشد، ضابطهٔ $f(1-x)$ را بیابید.

$$f(x-3)=(x-2)^2+1 \xrightarrow{+3} f(x)=(x+3-2)^2+1=x^2+2x+2$$

$$f(-x+1)=(-x+1)^2+2(-x+1)+2=x^2-2x+1-2x+2+2=x^2-4x+5$$

ه اگر $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$، ضابطهٔ $f(x^2)-2f(x)+1$ را بیابید.

به xها در $f(x)$ توان ۲ برسانید کل $f(x)$!

$$\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}+1=\frac{x^2-2x(x+1)+x^2-1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{2x^2}-2x+\cancel{x^2}-1}{x^2-1}=\frac{-2x-1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$$

$(x+1)(x-1)$ $\quad x(x+1)(x-1)$

• در با ضابطهٔ $f(x)=x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ را بیابید.

$$\Rightarrow \underbrace{(1+x)^2(2-1-x)^2}_{[(1+x)(1-x)]^2} - [\underbrace{(1-x)^2(2-1+x)^2}_{[(1-x)(1+x)]^2}] = (1-x^2)^2-(1-x^2)^2=0$$

روش ۲: عدد دادن $x=1 \to f(2)-f(0)=0-0=0$

■ تابع یک به یک:

در زوج مرتب‌ها ۱) عدم تکرار مولفه‌های اول شرط تابع بودن یا اگر هم تکرار شد مولفه‌های دوم نیز برابر باشد

۲) عدم تکرار مولفه‌های دوم شرط یک به یک بودن یا اگر هم تکرار شد مولفه‌های اول نیز برابر باشد.

ضابطه) $y_1=y_2 \to x_1=x_2$

شکل) هر خط موازی محور xها حداکثر در ۱ نقطه قطع کند. • هر خط موازی yها حداکثر قطع ۱ نقطه شرط تابع بودن است.

★ تابع‌های معروف که یک به یک نیستند: ★ $f(x)=|x|$ , $f(x)=x^2$ , $f(x)=x^4$ , ...

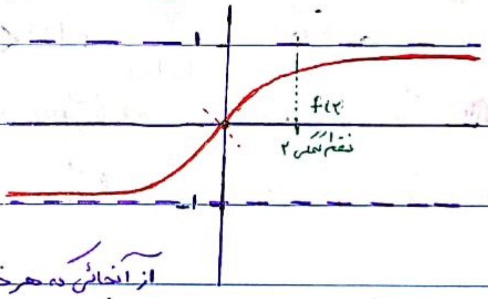
• یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید. «پرتوان‌ترین»

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}1}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}1}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}1}}$$

ریشه ندارد → x مجانب قائم ✗

→ $+\infty$ : $\frac{\infty}{\infty}=1$ → $y=1$ مجانب افقی

→ $-\infty$ : $\frac{-\infty}{\infty}=-1$ → $y=-1$ مجانب افقی



از آنجائی که هر خط موازی محور xها را حداکثر در ۱ نقطه قطع می‌کند یک به یک است.

• اگر رابطهٔ زیر یک تابع یک به یک باشد زوج مرتب $(a,b)$ را بنویسید.

$f:\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ اگر $a=-1$ شرط تابع بودن f به هم می‌خورد

$a^2-a=2 \to a^2-a-2=0 \to a=+2$ ✓ یا $a=-1$

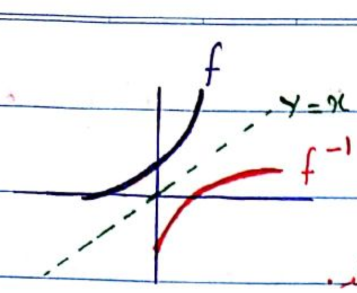
$\to f:\{(3,2),(2,5),(3,2),(b,2),(-1,4)\} \to b=3 \Rightarrow (2,3)$ جواب

■ تابع معکوس (وارون): در تابع f جای مولفه‌های اول را با مولفه‌های دوم عوض کردن و با $f^{-1}$ نشان دادن

شرط وارون پذیری تابع: یک به یک بودن تابع

نمودار $f^{-1}$ : قرینهٔ نمودار $f$ نسبت به $y=x$ $\qquad D_{f^{-1}} = R_f$

ضابطهٔ $f^{-1}$ : عوض کردن $x$ و $y$ در ضابطهٔ $f$ به $y$ و $x$ $\qquad R_{f^{-1}} = D_f$

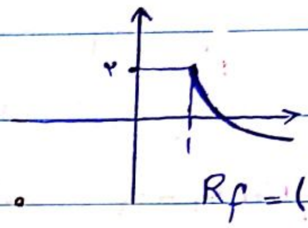



★ همهٔ توابع درجه ۱ به جز $y=k$ تابع وارون پذیرند چون همگی یک به یک هستند.

• ضابطهٔ وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ را بنویسید.

$x = 2-\sqrt{y-1} \Rightarrow x-2 = -\sqrt{y-1} \xrightarrow{\square^2} x^2-4x+4 = y-1$

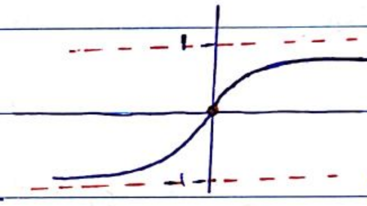
$\longrightarrow f'(x) = x^2-4x+5 \quad x \le 2$



$R_f = (-\infty, +2]$

• ضابطهٔ وارون $y = \frac{x}{1+|x|}$ را بیابید. تحقیق : $1+|x|=0 \to |x|=-1$ غ‌ق‌ق

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+|x|}$ $\begin{cases} +\infty \to y=+1 \\ -\infty \to y=-1 \end{cases}$ مجانب‌های افقی



$\to x = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow x + x|y| = y \to x|y| = y-x \to |y| = \frac{y-x}{x}$ $\qquad R_f : |x|<1$

$\xrightarrow[\text{فرض}]{y>0} y = y/x - 1 \to yx - y = -x \to y(x-1) = -x \to y = -\frac{x}{x-1}$

$\xrightarrow[\text{فرض}]{y<0} y = -\frac{y}{x}+1 \to yx+y = x \to y(x+1) = x \to y = \frac{x}{x+1}$

$\longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} : |x|<1$

• تابع معکوس تابع $y = x^2 - 4x$ با شرط $x<2$ کدام است؟

1) $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x+4}$ $\qquad$ 2) $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{x+4}$

3) $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x-4}$ $\qquad$ 4) $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{x-4}$

عددگذاری روش تستی) $f|_{-3}^{1}$ , $f^{-1}|_{1}^{-3}$

باید صدق کند.

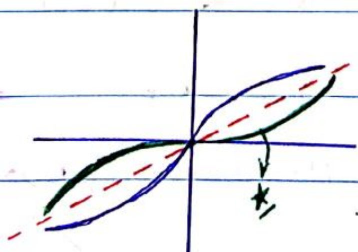
• ضابطهٔ وارون $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ را بنویسید. «راه حل تشریحی»

$x = \frac{2^y-1}{2^y+1} \to 2^y x + x = 2^y - 1 \to x+1 = 2^y - 2^y x \to x+1 = 2^y(1-x) \to \frac{x+1}{1-x} = 2^y$

$\xrightarrow{\text{log گیری}} \log_2 \frac{x+1}{1-x} = \log_2 2^y \to f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x+1}{1-x}$

• ضابطهٔ وارون تابع زیر کدام گزینه است؟

$y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \ge 0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$



$\begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ $\qquad f(x) = x|x| , x \in \mathbb{R}$ ✓

«اشتراک روی دامنه»

اعمال جبری روی تابع:

$f=\{(1,2),(0,3),(-1,5),\cancel{(7,6)}\}$ , $g=\{(1,0),(0,2),(-1,1),\cancel{(2,6)}\}$

$f+g=\{(1,2),(0,5),(-1,6)\}$ , $f-g=\{(1,2),(0,1),(-1,4)\}$

$f+3g=\{(1,2),(0,9),(-1,8)\}$ , $2f\times g=\{(1,0),(0,12),(-1,10)\}$

$\frac{f}{2g}=\{\cancel{(1,\frac{2}{0})},(0,\frac{3}{4}),(-1,\frac{5}{2})\}$

• اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ , $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ دامنهٔ $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$D_f: x+3>0 \rightarrow x>-3$

$D_g: x+2>0 \rightarrow x>-2$

$f\neq 0 \rightarrow x\neq 0$

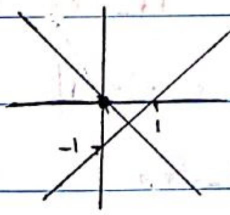
$\xrightarrow{\cap} D_{\frac{g}{f}}: (-2,+\infty)-\{0\}$

• اگر $g=\{\cancel{(-1,2)},(1,3),(2,2),(5,1)\}$ , $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، دامنهٔ تابع $\frac{f}{2f-g}$ چند عضو دارد؟

$D_f: x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$

$x=1 \rightarrow \frac{0}{0-3}=0$ ✓ $x=2 \rightarrow \frac{1}{2-2}=$ ت.ن ✗ $x=5 \rightarrow \frac{2}{4-1}=\frac{2}{3}$ ✓ ۲ عضو

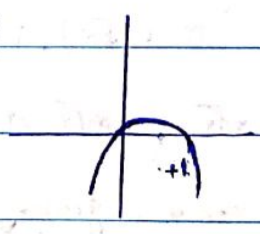
• اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند نمودار f×g را بکشید.




$f: y=-x$

$g: m=\frac{-1-0}{0-1}=1 \xrightarrow{(1,0)} y=x-1$

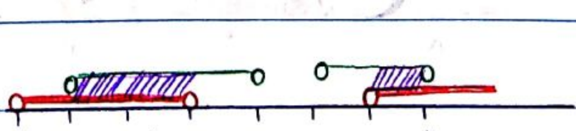
$f.g: -x^2+x=x(-x+1) < \begin{smallmatrix}0\\+1\end{smallmatrix}$




• با توجه به f و g ، تابع $(f.g)(x)$ را بنویسید.

$f(x)\begin{cases} x & x>2 \\ 2x+1 & -4<x<-1 \end{cases}$

$g(x)\begin{cases} 2x+1 & 1<x<3 \\ x & -3<x<0 \end{cases}$

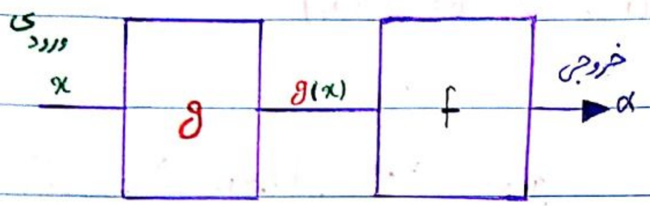



$D_f\cap D_g=(-3,-1)\cup(2,3)$

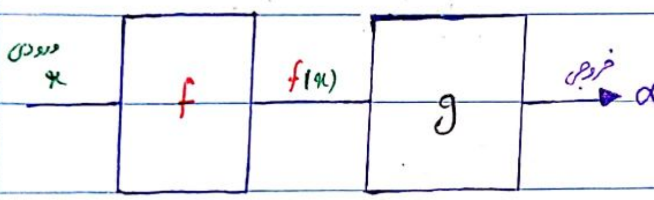
$$(f.g)(x)\begin{cases}(x)(2x+1)=2x^2+x & 2<x<3\\ (2x+1)(x)=2x^2+x & -3<x<-1\end{cases} \Rightarrow (f.g)(x)=2x^2+x \quad (x\in(-3,-1)\cup(2,3))$$

۹۹،۴،۳۰

## ترکیب توابع : «تابع مرکب»




$\alpha \qquad fog = f(g(x))$




$\alpha \qquad gof = g(f(x))$

- $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ , $f(x)=x+\sqrt{x}$ , $g(f(a))=5$ , $a=?$ $\qquad \underbrace{4+\sqrt{4}}_{6}$

$a \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{6} \boxed{g} \longrightarrow 5 \qquad f(a)=6 \longrightarrow a=4$

- $g(x)=x^2+2x+1$ , $f(x)=|x|$ , $\overset{f(g(x))}{fog}(1-\sqrt{2})-\overset{g(f(x))}{gof}(1-\sqrt{2})=?$ $\qquad |1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

$|(1-\sqrt{2})^2+2(1-\sqrt{2})+1|-[(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)+1]=|1-2\sqrt{2}+2+2-2\sqrt{2}+1|$

$-[\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{2}}+1+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2}+1]=|6-4\sqrt{2}|-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$

- $f(x)=\tan x$ , $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}$ , $gof(\dfrac{\pi}{8})=?$

$\rightarrow =\sqrt{\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}=\sqrt{\sin 2x}$

$x=\dfrac{\pi}{8} \rightarrow \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

• $f=\{(1,2),(2,3),(4,5),(3,4)\}$ , $g=\{(2,1),(3,2),(5,4)\}$ , $g^{-1}of^{-1}(x)=?$

*معکوس ←

ورودی $\overrightarrow{x}$ — $|f^{-1}|$ — $|g^{-1}|$ — خروجی

خروجی — $|f|$ — $|g|$ — $\overleftarrow{\ \ }$ ورودی

$2 — |f| — 1 — |g| — 2$

$3 — |f| — 2 — |g| — 3$

$4 — |f| — 4 — |g| — 5$

$g^{-1}of^{-1}=\{(5,5),(3,3),(2,2)\}$

• $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ , $g(x)=f(3x-4)$ , $g^{-1}(14)=?$

$\overrightarrow{14}$ — $|g^{-1}|$ — خروجی $(\alpha)$

$14$ — $|g|$ — $\overleftarrow{\ \ }$ ورودی $(\alpha)$

$14 — |f| — 20 — |3x-4| — \alpha \longrightarrow 3x-4=20 \longrightarrow x=8 \longrightarrow \alpha=8$

$\overrightarrow{14} — |f^{-1}| — 20 \ldots$

• $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ , $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ , $g^{-1}(6)=?$

ترکیب $x+\sqrt{x}\ ,\ f(x)$

$6 — |g^{-1}| \rightarrow a$

$6 \leftarrow |g| — a$

$6 \leftarrow |x+\sqrt{x}|\ 4\ |f(x)| — a$

با حدس

$4 — |f^{-1}(x)| — a \longrightarrow a=2$

• $f=\{(-1,2),(3,4)\}$ , $f^{-1}of=?$ , $fof^{-1}=?$ $\quad f'=\{(2,-1),(4,3)\}$

$f'(f(x)):\ x — |f| — |f'| — \alpha$ , $f(f'(x)):\ x — |f'| — |f| — \alpha$

$-1 \rightarrow 2 \rightarrow -1$ $\qquad$ $2 \rightarrow -1 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ $\qquad$ $4 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

**نتیجه: $f^{-1}of(x)=x$ همانی $\qquad$ $fof^{-1}(x)=x$ همانی

نکته: اگر $f$ و $g$ توابعی وارون پذیر بر $R$ باشند:

$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

$(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ , $(fog^{-1})^{-1}=gof^{-1}$

۸۱) $f(g(x)) = x \quad x>0$ , $g(x) = -\sqrt{x}$ , $f(-f(-3)) = ?$ ۹

$f^{-1}(x)$ همانی

$x = -\sqrt{y} \to y = x^2 : f(x)$

$g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ , $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ , $g(f(x)) = ?$

۱) $x-1$ ۲) $x+1$

۳) $x$ ۴) $2x$ ✓

[راه ۱ تشریحی]

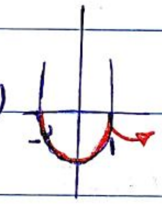
$$\frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{\cancel{x+1}}}{\frac{\cancel{2x}+2-\cancel{2x}+1}{\cancel{x+1}}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

[راه ۲ تستی] فرض $x=2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 4$ امتحان گزینه ها برای $x=2 \to 4$

اگر $f(x)=x^2+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی $fog$ که در زیر محور $x$ها قرار می‌گیرند برابر چه بازه‌ای است؟ «خارج ۹۱»

$f(g(x))<0$

$f(x) = (g(x)-1)(g(x)+2)$



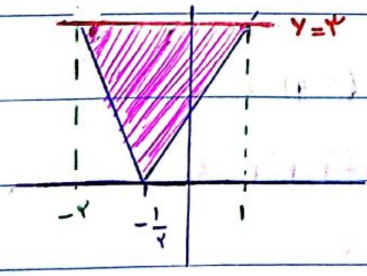
$-2<\frac{1}{2}(x-3)<1 \to x\in(1,5)$

اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$ باشند مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $gof$ و خط $y=3$ را بیابید. «۹۵»

$g(f(x)) = \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$

$|2x+1|=0 \to x=-\frac{1}{2}$ نقطه شکستگی , $|2x+1|=3$ → $2x+1=3 \to x=1$

$2x+1=-3 \to x=-2$



$h=3$ , قاعده $=3$

$S=\frac{3\times 3}{2}=4.5$

اگر $g(x)=2x-1$ , $fog(x)=\frac{x}{x-3}$ مقدار $f(3)$ را بیابید.

$f(2x-1)=\frac{x}{x-3} \to x=2 \to f(3)=\frac{2}{2-3}=-2$ تستی

$2x-1=3 \to x=2$

$gof(x)=\frac{1}{2}x$ , $f(x)=\frac{x}{2-x}$ , $g(x)=?$

۱) $\frac{x}{x+1}$ ✓ ۲) $\frac{x+1}{x}$

۳) $\frac{x}{x-1}$ ۴) $\frac{x+1}{x}$

تستی: $g\left(\frac{x}{2-x}\right)=\frac{1}{2}x$

فرض $x=1 \to \boxed{g(1)=\frac{1}{2}}$ → این رابطه تنها در گزینه ۱ صدق می‌کند

$gof: x \to f \to g \to$ $\quad D_{gof(x)} = \{ \overbrace{x \mid x \in D_f}^{\text{بررسی}} , \overbrace{f(x) \in D_g}^{\text{حل}} \}$

٥ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ , $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ باشد، دامنهٔ gof را بیابید. «۸۷ خارج»

۱) $(0,8)\cup(8,+\infty)$ ✓

۲) $\mathbb{R}-\{0,8\}$

۳) $\mathbb{R}-\{0\}$

۴) $(0,+\infty)$

(تشریحی) $D_f: x+|x| \geq 0 \to x^2 \geq x^2 \to D_f=\mathbb{R}$

$D_g: x^2-4x \neq 0 \to x(x-4)\neq 0 \to x\neq 0 , x\neq 4$

$D_{gof(x)} = \{ x \mid \cancel{x\in D_f}_{\mathbb{R}} , f(x) \in D_g \}$ *

$*\sqrt{x+|x|}$ $\neq 0 \quad x>0$ ; $\neq 4 \xrightarrow{\square^2} x+|x|=16 \quad \mathbb{R}-\{8\}$

$\xrightarrow{\cap} (0,8)\cup(8,+\infty)$

(تستی) فرض $x<0$ ← $g(f(-1)) = g(0) = \frac{1}{0}$ : تعریف نشده ← گزینه ۲ و ۳ حذف

فرض $x=8$ ← $g(f(8)) = g(4) = \frac{1}{0}$ : تعریف نشده ← گزینه ۴ حذف ← جواب گزینهٔ ۱

٥ $f(x)=\sqrt{2-x}$ , $g(x)=\log_{10}(x^2-15x)$ , $D_{fog}=?$ خارج ۹۸ ریاضی - «راه حل تشریحی»

$D_f: -x+2 \geq 0 \to 2 \geq x$

$x^2-15x>0 \to x(x-15)>0 \to x\neq 0 , x\neq 15 \to D_g: (-\infty,0)\cup(15,+\infty)$

$D_{fog}(x) = \{ x \mid x\in D_g , g(x) \in D_f \} = \{ x<0 , x>15 , \log_{10} x^2-15x \leq 2 \}$

$x^2-15x \leq 10^2 \to x^2-15x-100 \leq 0 \to (x-20)(x+5)\leq 0 \to [-5,20]$


$\to [-5,0)\cup(15,20]$

٥ $f(x)=\sqrt{3-x}$ , $g(x)=\log_2 x^2+2x$ , $D_{fog}=?$ -۹۴- «راه حل تستی»

۱) $[-4,2]$

۲) $[-2,0]$

۳) $[-4,-1]\cup(1,2]$

۴) $[-4,-2)\cup(0,2]$ ✓

$x=0 \to f(g(x))$ : $g(0)$ تعریف نشده (صورت $>0$) ← گزینهٔ ۱ و ۲ حذف

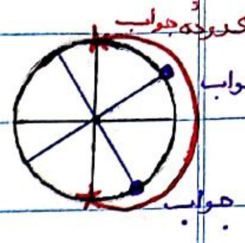
$x=-2 \to g(-2)$ تعریف نشده (صورت $\neq 0$) ← گزینهٔ ۳ حذف

$x=-1 \to g(-1)$ تعریف نشده (صورت $>0$) ← گزینهٔ ۱، ۲، ۳ حذف

- $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\ ,\ g(x) = \sin x\ ,\ D_{fog} = ?\ \ \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ★

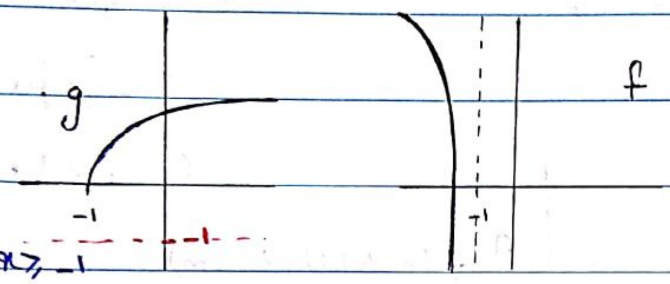
$D_{fog} : \{x \mid x \in D_g ,\ g(x) \in D_f\}$ R

جواب سؤال




$D_f : \frac{1}{4} - x^2 \geq 0 \longrightarrow \frac{1}{4} \geq x^2 \longrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{6}\right]$

- هرگاه توابع f و g به صورت زیر باشند دامنهٔ fog را بیابید.




$D_{fog} : \{x \mid x \in D_g ,\ g(x) \in D_f\}$

$g(x) < -1 = \varnothing$

$x \in \mathbb{R} ,\ n \in \mathbb{Z}$

- براکت و جزء صحیح:

$n \leq x < n+1 \longleftrightarrow [x] = n$ «عدد صحیح پست چپ» بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر یا مساوی

$(-2)^-\ (-2)^+\ \ 2^-\ 2^+$ $\quad [2^+] = 2\ ,\ [2^-] = 1\ ,\ [(-2)^+] = -2\ ,\ [(-2)^-] = -3$

$-2 \qquad 2$

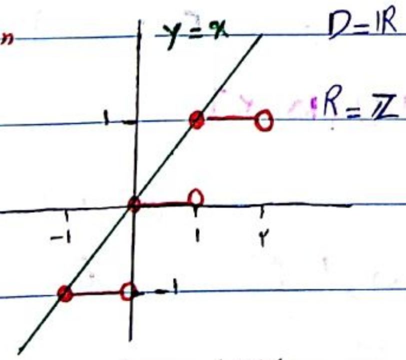
$[-\pi] = -4\ ,\ [\pi] = 3\ ,\ [\sin 30^\circ] = 0\ ,\ [-\sqrt{3}] = -2\ ,\ [\sqrt{3}] = 1\ ,\ \left[\frac{10}{2}\right] = 5$

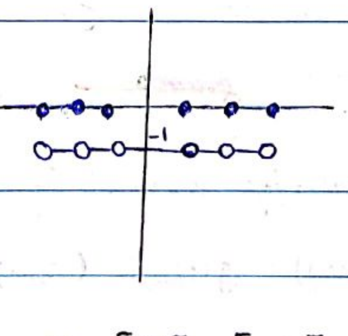
1) $[x \pm k] \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} [x] \pm k \longrightarrow [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$

2) $x - 1 < [x] \leq x \longrightarrow$ نقطه دارای جواب صحیح $x^2 + [x] = 6$ ، بدون جواب $[x] = \frac{1}{2}$ ★

3) $x$ جزء اعشار $= x - [x] \rightarrow 0.4 = -1.6 - (-2)\ ,\ 0.5 = 2.5 - 2$

«صعودی»




$D = \mathbb{R}$

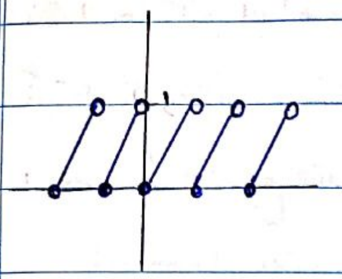
$R = \{0 , -1\}$

$T = 1$

$y = [x] + [-x]$

$y = [x] = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ +1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



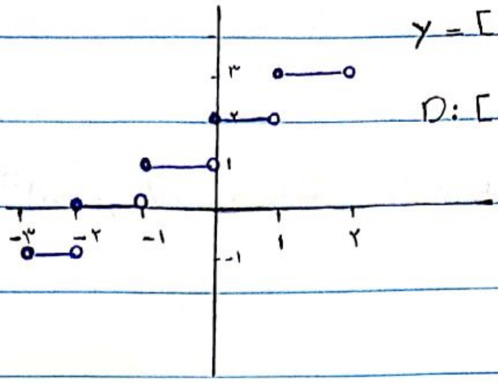
$y = x - [x]$

$D = \mathbb{R}$

$R = [0,1)$

$T = 1$

★ طول هر پاره خط = $\sqrt{2}$ ،،



$y = [x] + 2$

$D: [-3, 2)$

• معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x - 2 = [x] + [-x]$

$x \in \mathbb{Z} \to 2x-2=0 \to x=1$ ، $x \notin \mathbb{Z} \to 2x-2=-1 \to x=\frac{1}{2}$ → $\{1, \frac{1}{2}\}$

ب) $\frac{2x^2-x}{[x]+[-x]} = 0$ $(x \notin \mathbb{Z})$ $2x^2-x=0 \to x(2x-1)=0$

↳ $x=0$ غ ق ق ، $x=\frac{1}{2}$ ق ق

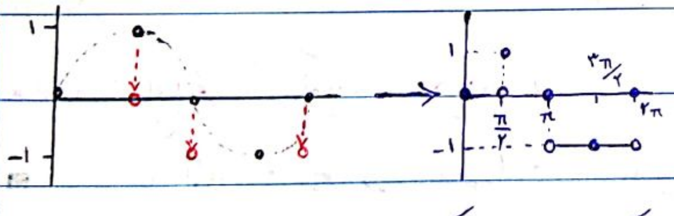
پ) $\frac{1}{[x]-5} = 0$ $[x]-5 \neq 0 \to [x] \neq 5 \to x \notin [5,6) \to \mathbb{R} - [5,6)$

ت) $[x-[x]] + [x+[x+1]] = 5 \to \cancel{[x]} - \cancel{[x]} + [x] + [x+1] = 5$

$\to [x] + [x] + 1 = 5 \to 2[x] = 4 \to [x] = 2 \to 2 \leq x < 3$

★ نکته: در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، $a$ میزان بازشدن تابع را نشان می دهد «رابطهٔ عکس دارد»

• تابع $f(x) = [\sin x]$ را رسم کنید.



★ نکته: شرط آنکه سهمی از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور کند آن است که $ac < 0$ «$\Delta > 0$» باشد

★ نکته: اگر مجموع ۲ متغیر مثبت a و b ثابت باشد حاصل ضرب آن دو وقتی max می شود که دو متغیر با هم برابر باشند

و اگر تفاضل دو مقدار a و b ثابت باشد، حاصل ضرب آن دو وقتی min می شود که دو متغیر قرینهٔ یکدیگر باشند.

تابع خطی: $f(x) = ax + b$ ← $x = k$ تابع نیست      تابع ثابت: $f(x) = c$ «$R_f = \{c\}$»

تابع همانی: $f(x) = x$      تابع تک جمله‌ای: $f = \{(x,y)\}$      تابع درجه ۲: $f(x) = ax^2 + bx + c$

نکته| هر تابع اکیداً صعودی، صعودی نیز است.

نکته| شروط آنکه رابطه‌ای چندضابطه‌ای تابع باشد:

۱- هر ضابطهٔ آن تابع باشد ۲- اشتراک دامنهٔ دو به دوی آنها تهی باشد ۳- به ازای عضو مشترک دامنهٔ مقدار هر یک از روابط باهم برابر باشند.

نکته| تابع $f$ و $g$ را برابر می‌دانیم وقتی:

$1-\ D_f = D_g$ $\quad$ $2-\ \overset{\text{هر}}{\forall} x \in D$ « $f(x) = g(x)$ : برای هر $x$ از این دامنه یکسان داشته باشیم »

نکته| می‌توانیم برای حساب کردن برد کسر را ساده کنیم (ضابطه گویا)

نکته| $[Kx] \neq K[x]$ , $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

نکته| جمع و تفریق دو تابع خطی، تابع خطی دیگری است.

نکته| اعمال جبری روی تابع الزاماً تابع به وجود نمی‌آورد.

نکته| برای حساب کردن برد یک تابع کافی است دامنهٔ وارون آن را حساب کنیم.

نکته| وارون وارون یک تابع خود تابع است.

نکته| نقاطی از تابع و وارون آن باهم برابرند که $x$ و $y$ یکسانی داشته باشند «روی خط $y=x$ قرار گرفته باشند»

نکته| اگر $f$ صعودی باشد $f^{-1}$ نیز صعودی است و اگر $f$ نزولی باشد $f^{-1}$ نیز نزولی است.

نکته: $D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$ , $D_{f^{-1}of} = D_f$

۹۹,٤,١٤

★ جمع‌بندی آمارنگور (۷ دهم - ۷ یازدهم)