

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضی تجربی

فصل اول :: تابع ::

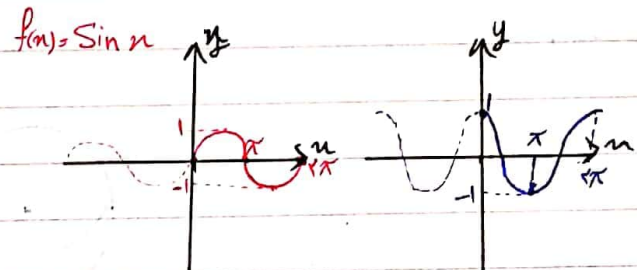
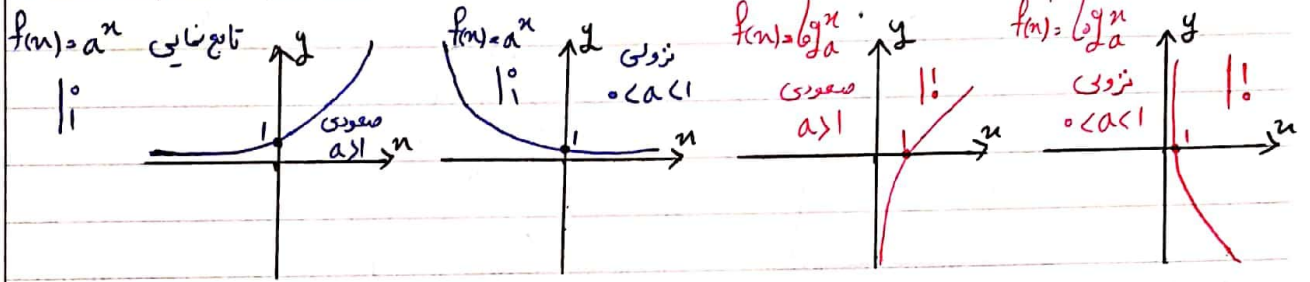
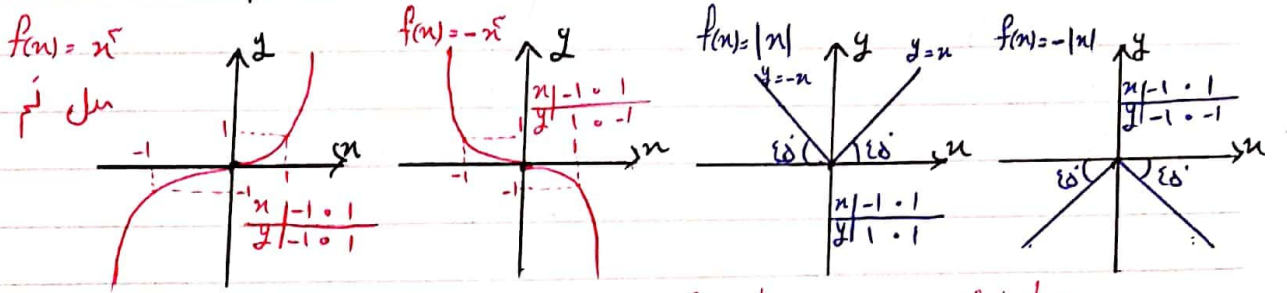
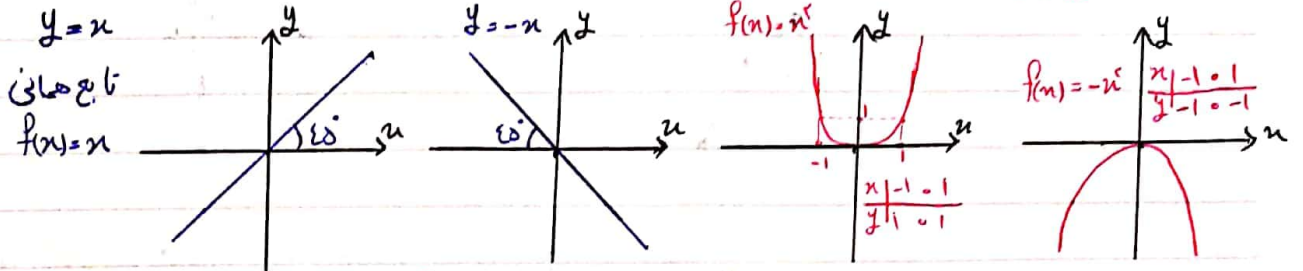
alaatv.com

آلاء

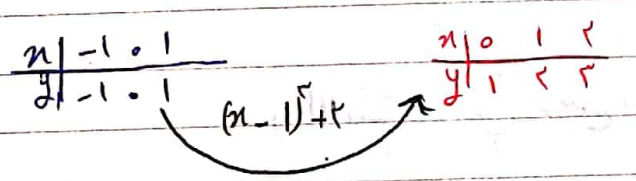
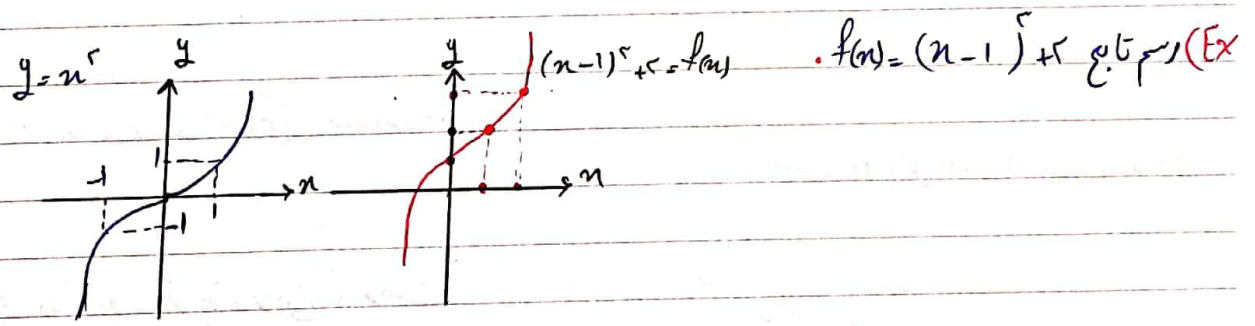
محمد دده پیگی

فصل اول : تابع

* نمودار توابع پایه :



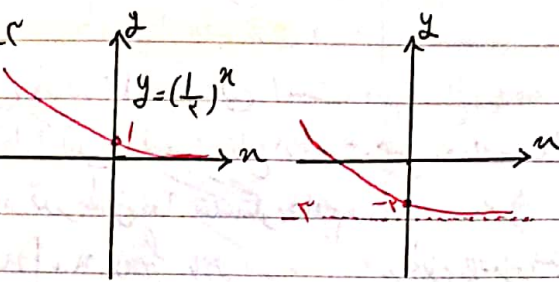
* رسم نمودار با استفاده از انتقال :
1. کار با x مخالف x
2. کار با y موافق y



Subject:

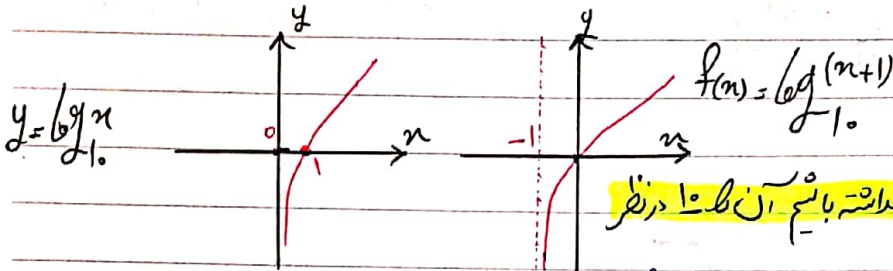
Year: Month: Day: ()

$f(n) = (\frac{1}{2})^n - 2$



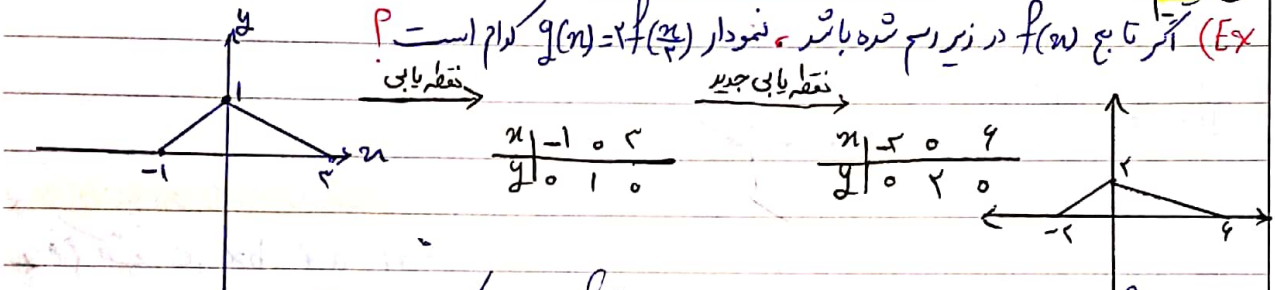
Ex رسم تابع $f(n) = 2^{-n} - 2$ ؟

Ex رسم تابع $f(n) = \log(n+1)$

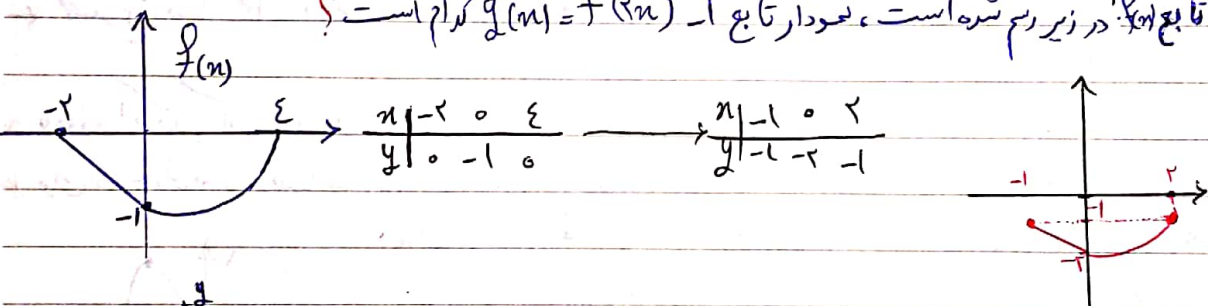


نکته: در تابع نگارستی هرگاه منحنی نداشته باشیم آن گاه در نظر نمی گیریم.

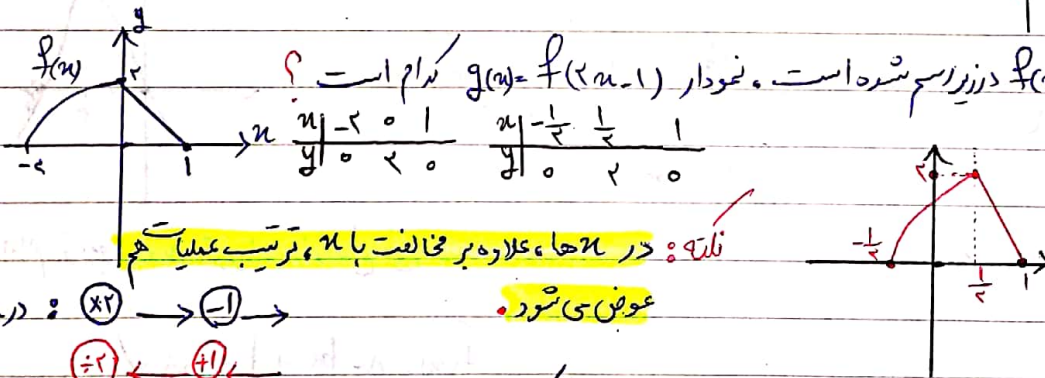
Ex اگر تابع $f(n)$ در زیر رسم شده باشد، نمودار $g(n) = f(\frac{n}{2})$ کدام است؟



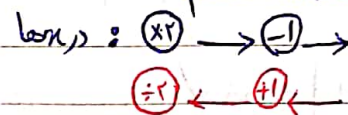
Ex تابع $f(n)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $g(n) = f(2n)$ کدام است؟



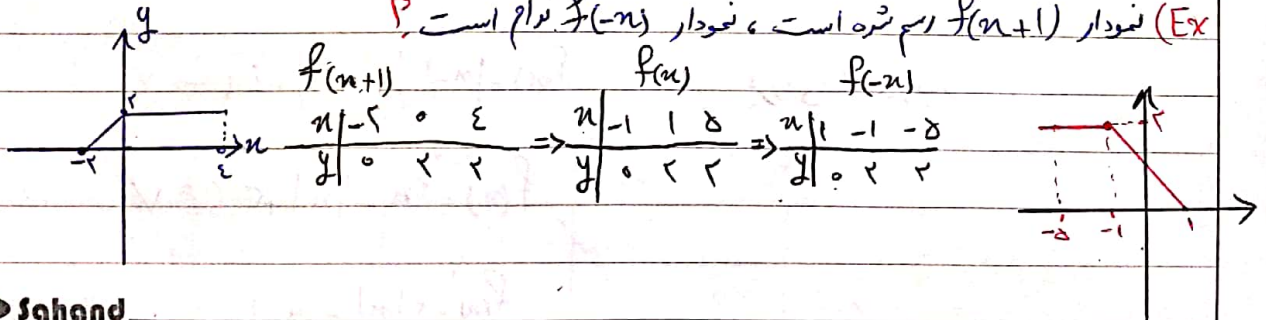
Ex تابع $f(n)$ در زیر رسم شده است، نمودار $g(n) = f(2n-1)$ کدام است؟



نکته: در n ها، علاوه بر مخالفت با n ، ترتیب عملیات هم عوض می شود.

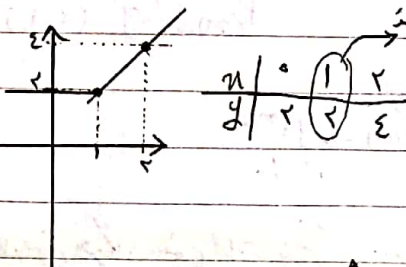


Ex نمودار $f(n+1)$ رسم شده است، نمودار $f(-n)$ کدام است؟



*** نمودار تابع قدر مطلق دار درجه یک :**

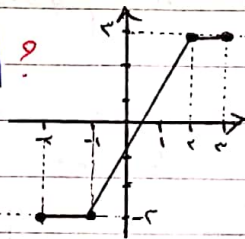
- ← کمترین نقطه محل شکستگی است.
- ← با دو نقطه گنگی وضعیت تابع درست چپ و راست مشخص می شود.
- ← به تعداد قدر مطلق ها شکستگی داریم.



Ex) $f(x) = x + |x - 1| + 1$ را رسم کن. قدر مطلق را صفر می کنی.

Ex) $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ ؟

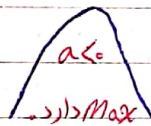
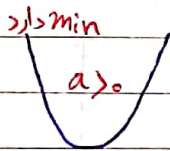
x	-2	-1	2
y	-3	3	3



*** نمودار تابع درجه 2 در حالت کلی :**

فرم کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$

← کمترین نقطه محل رأس $x = -\frac{b}{2a}$ یا با جایگذاری $y = \frac{-\Delta}{4a}$

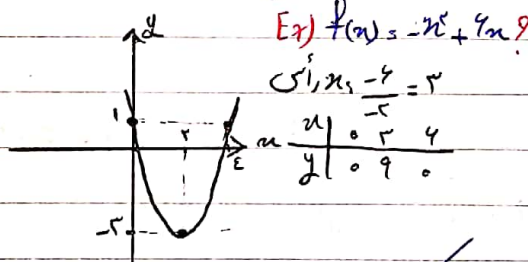


- * با دو نقطه گنگی تکلیف نمودار مشخص می شود.
- * برای نقاط دلخواه و درجه 2 بتارن دارد، از آن استفاده می کنیم.

Ex) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ؟

رأس $x = 2$

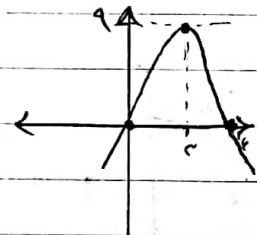
x	0	2	4
y	1	-3	1



Ex) $f(x) = -x^2 + 4x$ ؟

رأس $x = 2$

x	0	2	4
y	0	4	0



Ex) کدام توابع دوبار محور x ها را قطع نمی کند ؟

$f(x) = x - |x - 1|$ (الف) ✓

بررسی صفحه بعد

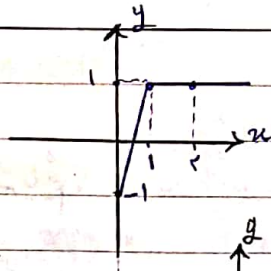
$f(x) = |x - 1| + |x - 2| - 4$ (ب) ✗

$f(x) = 2x - |x| + 3$ (ج) ✓

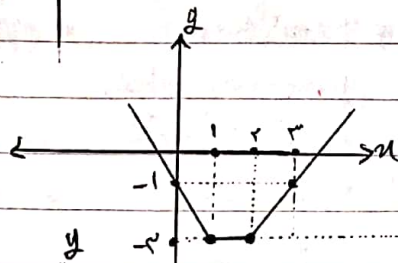
$f(x) = 2|x| - x - 1$ (د) ✗

Subject:

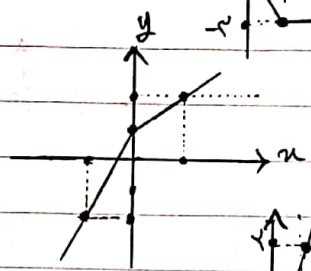
Year: Month: Day: ()



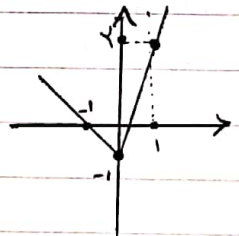
$$\begin{array}{l|l} x & 2 \\ y & -1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \quad (1\checkmark)$$



$$\begin{array}{l|l} x & 1 & 2 \\ y & -1 & -1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \quad (2\checkmark)$$



$$\begin{array}{l|l} x & 1 \\ y & -2 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \quad (3\checkmark)$$

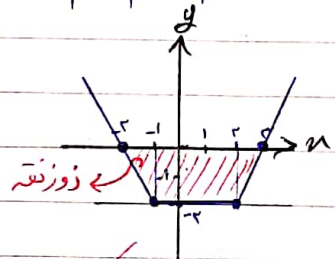


$$\begin{array}{l|l} x & -1 \\ y & 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array} \quad (4\checkmark)$$

Exe) مساحت محدود به نمودار $f(x) = |x+1| + |x-2| - 5$ و محور x چقدر است؟

$$\begin{array}{l|l} x & -2 & -1 & 2 & 2 \\ y & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$S = \frac{(2+5) \times 2}{2} = 7$$

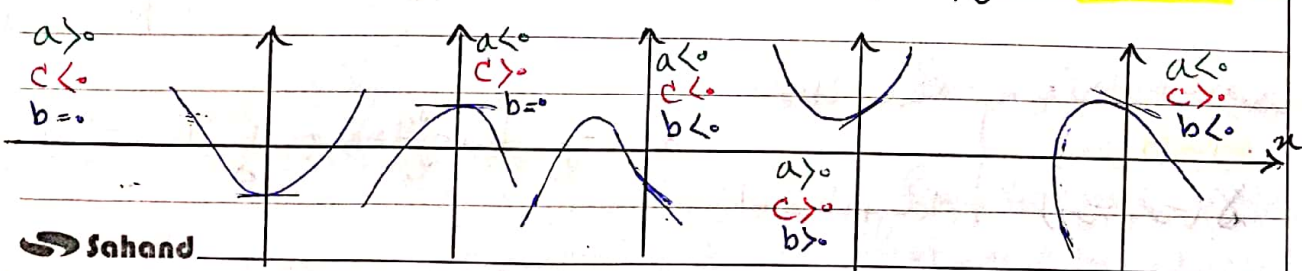


* چگونه در تابع درجه 2 علامت a , b و c با دیدن از روی نمودار؟؟

علامت a \leftarrow رو به بالا $\Leftarrow a < 0$ رو به پایین $\Leftarrow a > 0$

علامت b : شیب در تقاطع با محور y ها

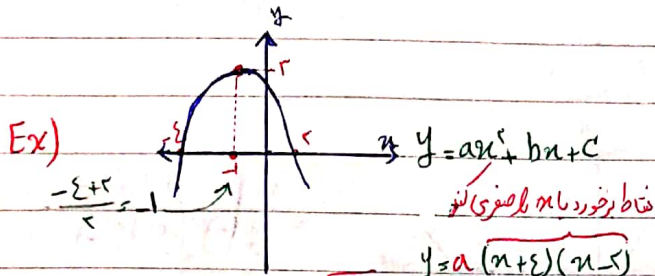
علامت c : تقاطع با محور y ها



غیر مدرسه آ

* نحوه یافتن ضرایب تابع درجه دوم از روی نمودار :

الف) زمانی که نقاط با محور x هم‌اندازه باشیم :

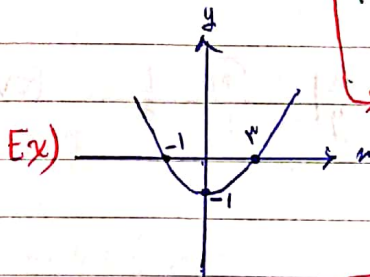


$$y = a(n+2)(n-3)$$

$$1 = a(2)(-3)$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$y = -\frac{1}{6}(n^2 + 2n - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

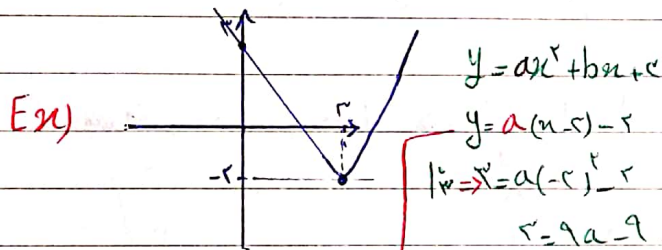


$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(n+1)(n-5) = -1 \Rightarrow -1 = a(1)(-5) \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}(n^2 - 4n - 5) \Rightarrow y = \frac{1}{5}n^2 - \frac{4}{5}n - 1$$

ب) اطلاعات رأس داده شده باشیم :



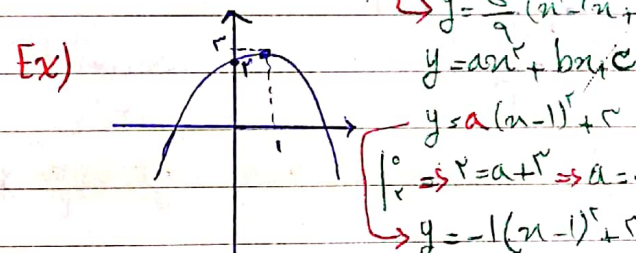
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(n-2)^2 - 2$$

$$-1 = a(-2)^2 - 2$$

$$-1 = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(n^2 - 4n + 4) - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}n^2 - n - 1$$



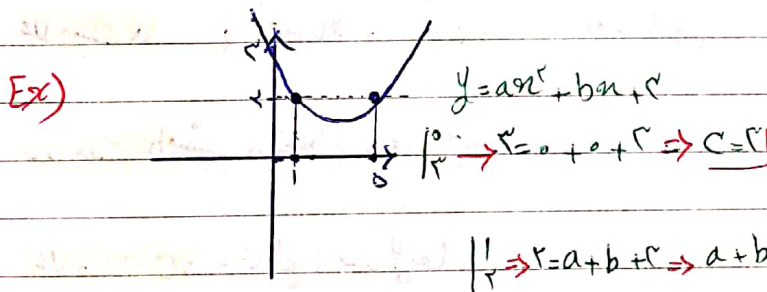
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(n-1)^2 + 3$$

$$0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$$

$$y = -3(n-1)^2 + 3 \Rightarrow y = -3n^2 + 6n$$

ج) اطلاعات خاصی نداشته باشیم :



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a + b + c \Rightarrow c = -3$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{-1} \right| \Rightarrow 2 = a + b + c \Rightarrow a + b = -1 \\ \left| \frac{0}{1} \right| \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + b &= -1 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}$$

روش حل معادله؟ محدودی

باروشی در میان
 ضرب - ضرب (-)

$$\left. \begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ a + b &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$$a = -\frac{-4}{2} = 2, b = -\frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow a = 2, b = -2$$

*** یکنوازی تابع :**

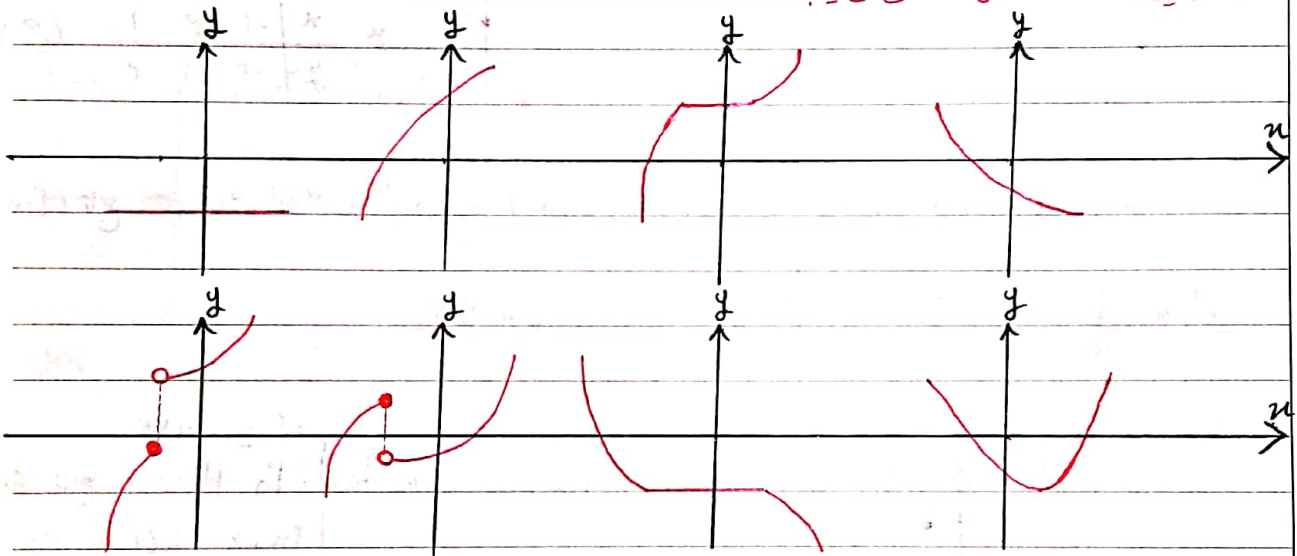
تابعی یکنواست که یا نزول کامل باشد یا صعود کامل باشد.

← تابع صعودی : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
 ← تابع ابتداً صعودی : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

با افزایش x ، مقدار y افزایش می یابد.

← تابع نزولی : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
 ← تابع ابتداً نزولی : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

با افزایش x ، مقدار y گاهستی می یابد.



شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
صعودی نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	نه صعودی نه نزولی	هم صعودی هم نزولی	صعودی	نه صعودی نه نزولی
یکنوازی	یکنوا	یکنوا	یکنوا	یکنوا	غیر یکنوا	یکنوا	یکنوا	غیر یکنوا
قدرت آسید	OK	No	OK	No			OK	

نکته: قسمت افقی در صعود یا نزول تأثیری ندارد. ولی اگر افقی باشد یکنوا را نمی توان به کار برد.

(Ex) کدام توابع یکنوا اند؟

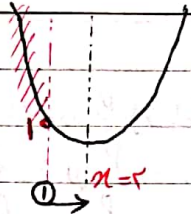
(الف) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $(x \geq 1)$

(ب) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$; $(x < 1)$

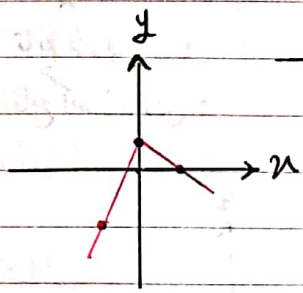
* بررسی گزینتها صفحه بعد...

(ج) $f(x) = 2|x| - |x| + 1$

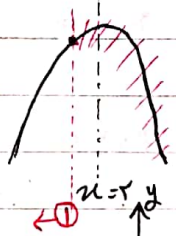
(د) $f(x) = x - 2|x| + 1$



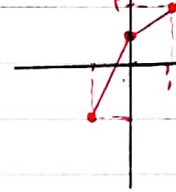
X الف) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = 2$ غير يلىنوا



x	-1	0	1
y	-2	1	0



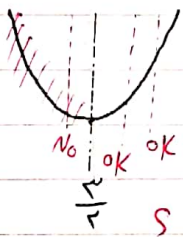
ب) $x = \frac{-4}{-2} = 2$ يلىنوا



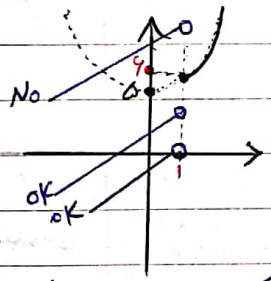
x	-1	0	1
y	-2	1	2

Ex) تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ يلىنواست. حدود k لىستفن سيز.

رأى $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{4}{4} = 1$



$\Rightarrow k \geq \frac{5}{2}$



Ex) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & x \geq 1 \\ 2x + k & x < 1 \end{cases}$ يلىنواست. حدود k ؟

$2+k \leq 6 \Rightarrow k \leq 4$

* بررسى يلىنوايى تابع در زوج مرتب: اول بر حسب x مرتب يى كنم سپس لاها لىبررسى يى كنم.

Ex) $f(x) = \{(-2, 5), (0, 3), (2, 2), (4, 1), (5, 0)\}$

اليداً نزولى - اسيراً يلىنواجه كاهش لاها $\Rightarrow f(x) = \{(5, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3), (-2, 5)\}$

Ex) $f = \{(2, 5), (4, 4), (1, 0), (3, 0)\}$

$f = \{(4, 0), (3, 0), (2, 5), (1, 0)\} \Rightarrow$ نه صعود - نه نزول - غير يلىنوا

Ex) تابع f يلىنواست، حدود m و k كدام است؟! $f = \{(5, 0), (0, 3), (2, m), (1, k), (-1, 0)\}$

$f = \{(5, 0), (0, 3), (2, m), (1, k), (-1, 0)\} \Rightarrow 3 \leq k \leq 5$ و $1 \leq m \leq 3$

(Ex) مشخص کنید کدام تابع ابتدا بلند است؟

$f(n) = \sqrt[n]{n+1}$ ابتدا صعودی - ابتدا بلند است

تستی: اگر پایه < اجود، ابتدا صعودی و بلند می شود، بدون توجه به مرتبه یا تقریب شده.

$f(n) = \log_r n$

$f(n) = \log_r(n-1)$ ابتدا صعودی - ابتدا بلند است

تستی: اگر مبدا < باشد ابتدا صعودی و بلند است بدون توجه به مرتبه یا تقریب شده با n.

(2) $f(n) = n^2 |n|$ غیر یکفوا

نه صعودی - نه نزولی

$n > 0 \rightarrow y = n^2(n) = n^3$

$n < 0 \rightarrow y = n^2(-n) = -n^3$

نسبت ها مورد نظر را مشخص کنید

(3) $f(n) = n/|n|$

ابتدا صعودی - ابتدا بلند است

$n > 0 \rightarrow y = n^2$

$n < 0 \rightarrow y = -n^2$

(Ex) تابع $f(n) = \sin n$ در کدام بازه ابتدا صعودی است؟

$[0, \pi]$ (1x) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (1x)

$[\pi, 2\pi]$ (2x) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (2x)

(Ex) تابع $f(n) = |n^2 - 4|$ در کدام بازه بلند است؟

$y = n^2 - 4$ $\begin{cases} n_1 = +2 \\ n_2 = -2 \end{cases}$

(1) $[-2, +\infty)$

(2) $(-\infty, 2]$

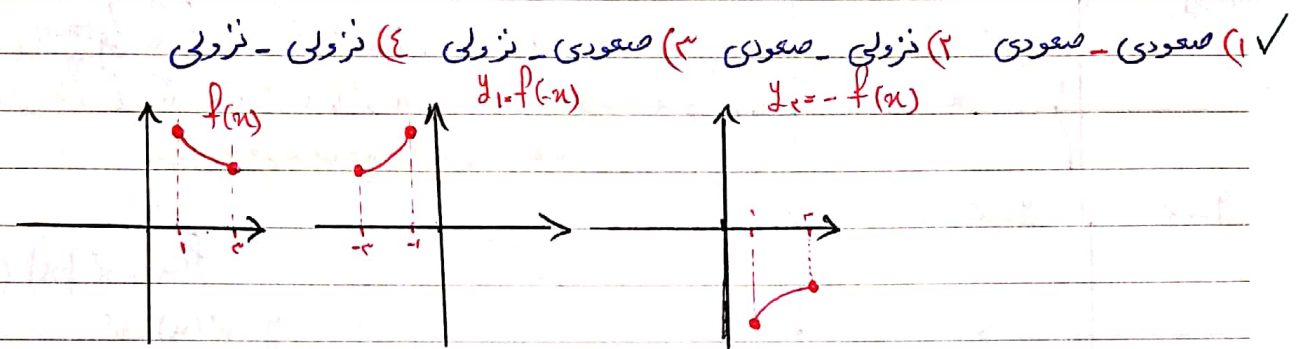
(3) $(2, +\infty)$

(4) $(-\infty, -2]$

نکته: برای رسم آنهایی که قدر مطلق آنه خام را رسم کرده، قسمت ها نسبت را برزنگ و قسمت منفی را به سمت بالا قرینه می کنیم.

Ex) تابع f با دامنه R هم صعودی و هم نزولی است و از نقطه $(1, 2)$ عبوری است. حاصل $\frac{2f(x) + f(x)}{2}$ کدام است؟
 تابع ثابت $f(x) = 2$
 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) صفر

Ex) تابع $f(x)$ با دامنه $[3, 1]$ اکیدا نزولی است. تابع $g = f(-x)$ و $h = f(x)$ در دامنه خود چگونه اند؟



✓ (1) صعودی - صعودی (2) نزولی - صعودی (3) صعودی - نزولی (4) نزولی - نزولی
 * اعمال جبری روی توابع:
 در چهار عمل اصلی تکیه بر روی اشتراک دامنه هاست. نکته: در تقسیم، مخرج صفر نباشد.

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g=0\}$$

نکته: حتی در زوج مرتب ها هم محاسبه روی عناصر مشترک دامنه هاست.

Ex) $f = \{(0, -1), (2, 2), (4, 2), (5, 3)\}$ و $g = \{(0, 3), (2, -2), (5, -1)\}$ ؟

$$f-g = \{(0, -5), (2, -4), (4, -2), (5, 2)\}$$

$$f \cdot g = \{(0, 0), (2, -4), (4, -6), (5, 0)\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(0, \frac{3}{-1}), (2, \frac{-2}{2}), (5, \frac{-1}{2})\}$$

نکته: مخرج ها صفر نشود، حذف می کنیم.

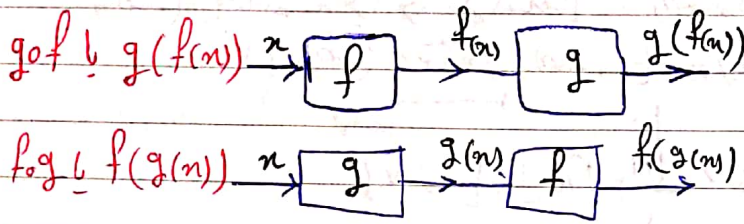
$$\frac{f+g}{f} = \{(0, \frac{1}{-1}), (2, \frac{0}{2}), (5, \frac{1}{2})\}$$

Subject:

Year: Month: Day: ()

ترکیب توابع:

← خروجی تابع اول، ورودی تابع دوم است.



ورودی ۱ = خروجی ۱

Ex $f = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, 2), (2, 5), (-1, 2), (0, 2)\}$

$f \circ g = \{(-1, 2)\} = f(g(x))$ $g \circ f = \{(2, 2), (2, 5), (-1, 2)\}$

* دامنه ترکیب توابع

$D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g, g(x) \in D_f\}$ $D_{g \circ f} = \{x/x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

Ex $D_{f \circ g} = \{x/x \in (-\infty, 2], \sqrt{2-x} \in [2, +\infty)\}$ و $D_{g \circ f} = \{x/x \in [2, +\infty), \sqrt{x-2} \in (-\infty, 2]\}$

$D_f = x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$

$D_g = 2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow D_g = x \leq 2 \Rightarrow D_g = (-\infty, 2]$

$D_{f \circ g} = \{x/x \in (-\infty, 2], \sqrt{2-x} \in [2, +\infty)\}$

محاسبه
 $\sqrt{2-x} \geq 2$
 $2-x \geq 4$
 $-x \geq 2$
 $x \leq -2$

$D_{f \circ g} = (-\infty, -2]$

Ex در توابع $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ دامنه و ضابطه $(f \circ g)(x)$ را بیابید.

$f: x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $g: x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathbb{R} - \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$ $\frac{x+1}{x+2} \neq 1 \Rightarrow x+1 \neq x+2 \Rightarrow 1 \neq 2$

$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ (رابطه برقرار است)
 $\mathbb{R} - \{-2\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-2\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{2(\frac{x+1}{x+2}) - 1}{(\frac{x+1}{x+2}) - 1} = \frac{2x+2-x-2}{x+1-x-2} = \frac{x-1}{-1} = 1-x$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R}$ از نظر تابع گسسته زیرا در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌شود.
 اما دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ است و باید دامنه را حساب کنیم.

(Ex) در مورد توابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ دامنه و فاصله $(g \circ f)(x)$ بیابید.

$f: x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$ $g: 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_g = (-\infty, 3]$
 $D_{f \circ g} = \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} \Rightarrow \{x/x \in [-2, +\infty) \text{ و } \sqrt{x+2} \in (-\infty, 3]\}$

$\sqrt{x+2} \leq 3 \Rightarrow x+2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7$ $\xrightarrow{\text{محاسبه}} D_{f \circ g} = [-2, 7]$
 فاصله: $(g \circ f)(x) = \sqrt{3 - (\sqrt{x+2})} = \sqrt{3 - \sqrt{x+2}}$

(Ex) در مورد توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = 2x-1$ دامنه و فاصله $f \circ g$ بیابید.

$f: 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$

$g: D_g = \mathbb{R}$ $D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathbb{R}, 2x-1 \in [-2, 2]\}$

فاصله: $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - (2x-1)^2}$ $-2 \leq 2x-1 \leq 2$
 $= \sqrt{4 - 4x^2 + 4x - 1} = \sqrt{3 - 4x^2 + 4x}$ $-1 \leq 2x \leq 3$
 $= \sqrt{4x^2 + 4x + 3}$ $\textcircled{B} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_{f \circ g} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

نکته: اگر در سوالی درست است A و B در سوال بالا مشخص شده است اشتراک آنها یعنی شود، آنگاه

فاصله $f \circ g$ و یا $g \circ f$ قابل تشخیص نیست.

(Ex) اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$ دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (مراسمی خ 17)

$x=1 \rightarrow g(f(x)) = g(1) = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$ $\checkmark (1, +\infty) \cup (1, 0)$ (1)
 $x=-1 \rightarrow g(f(x)) = g(0) = \frac{1}{0-4} = -\frac{1}{4}$ $\times \mathbb{R} = \{0, 1\}$ (2)
 منفی نمی پذیرد $\times \mathbb{R} = \{0\}$ (3)
 خارج صفر شد $\times (0, +\infty)$ (4)
 دامنه 8 نمی پذیرد

(Ex) اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2+2x)$ دامنه $f \circ g$ کدام است؟

$x=0 \Rightarrow f(g(x)) = f(\log_2(0)) \times \rightarrow$ صفر را نمی خوانیم $\times [0, 3]$ (1)
 $x=-4 \Rightarrow f(g(x)) = f(2) = \sqrt{3-2} = 1 \rightarrow$ ندارد ولی مای خطیم $\times [0, -4]$ (2)
 $x=-1 \Rightarrow f(g(x)) = f(\log_2(-1)) \times \rightarrow$ 1 را نمی خوانیم $\times [-4, -1] \cup (1, 3]$ (3)
 $\checkmark [2, 0) \cup [-4, -2]$ (4)

نکته: لگاریتم باید همیشه داخلش مثبت باشد. (نه منفی و نه صفر)

Ex) اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و دامنه تابع g برابر است با $g(x) = (\frac{1}{x})^x$ ؟

$\rightarrow f(g(+\infty)) = f(0) = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$ برای خواهر \checkmark $(-\frac{1}{x}, +\infty)$ (1)
 $\rightarrow f(g(0)) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ برای خواهر \times $(\frac{1}{x}, +\infty)$ (2)
 \times $(-2, 0)$ (3)
 \times $(-\frac{1}{x}, -1)$ (4)

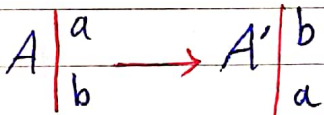
$+\infty = a^{+\infty} \iff 1 < a$
 $0 = a^{+\infty} \iff 0 < a < 1$
 نکته:

Ex) اگر $g(x) = 2x - 1$ و مقدار $f(g(x)) = \frac{x}{x-2}$ ، مقدار $f(x)$ برابر است با ؟

$g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g+1 = 2x \Rightarrow x = \frac{g+1}{2}$
 $f(g(x)) = \frac{x}{x-2} \rightarrow f(g) = \frac{\frac{g+1}{2}}{\frac{g+1}{2} - 2} \times 2 \rightarrow \frac{g+1}{g-3}$ (1)
 \checkmark $-\frac{2}{2}$ (2)
 $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow f(2) = \frac{2+1}{2-5} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{-3} = -1$ (3)
 \times $\frac{2}{2}$ (4)

روش تستی: $f(2x-1) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{2}{2-2} = \frac{2}{-1} = -2$
 $2x-1=2 \rightarrow x=1.5$
 صورت سوال $x=2 \Rightarrow f(2) = -2$

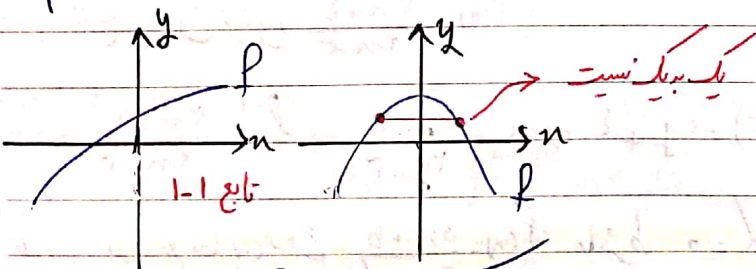
* تابع وارون: جای طول و عرض را عوض می کنند.



f^{-1} روی تابع وارون f روی تابع f

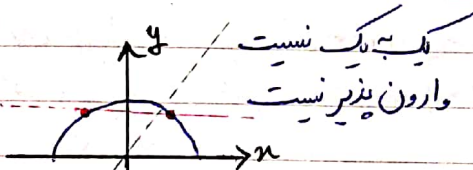
Ex) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (5, -2)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (4, 4), (1, 4)\}$

نکته: شرط وارون پذیری، یک به یک بودن تابع است. نکته: یک به یک: خطها افقی و قائم



* چگونه ثابت کنیم تابع وارون را می یابیم؟؟ کافی است x را انتخاب کنیم، سپس ببینیم y ، x قرار بده !!

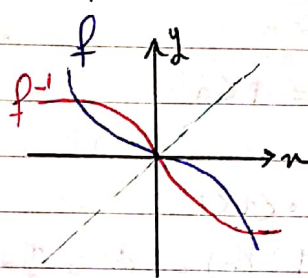
Ex) $f(x) = 2x^2 - 8 \Rightarrow y = 2x^2 - 8 \Rightarrow y + 8 = 2x^2 \Rightarrow \frac{y+8}{2} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y+8}{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y+8}{2}}$



یک به یک نیست
 وارون پذیر نیست

* نمودار تابع وارون:

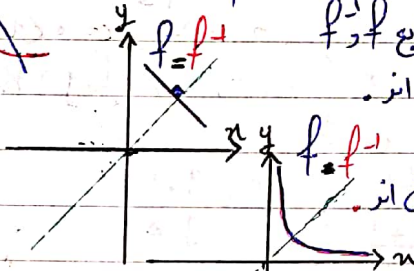
- قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$



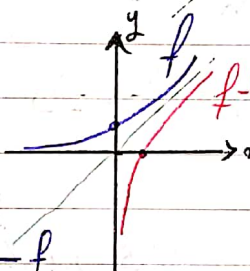
برخی مواقع تقاطع f و f^{-1} خارج از نیمه اول است

اول دوم است

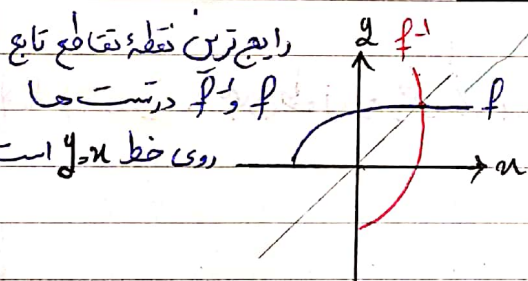
برخی مواقع تابع f و f^{-1} بر هم منطبق اند.



f و f^{-1} بر هم منطبق اند.



دار f مجانب افقی دارد،
 f^{-1} مجانب قائم دارد و بالعکس.



رایج ترین نقطه تقاطع تابع f و f^{-1} درست‌ها روی خط $y=x$ است.

Ex) تابع وارون بیاید $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$? $\Rightarrow xy + 4y = 2x - 3$

$\Rightarrow xy - 2x = -4y - 3 \Rightarrow x(y-2) = -4y - 3 \Rightarrow x = \frac{-4y-3}{y-2} \Rightarrow x = \frac{4y+3}{2-y} \Rightarrow f^{-1} = \frac{4x+3}{2-x}$

Ex) تابع وارون بیاید $f(x) = \frac{2x+4}{2x-3}$? $\Rightarrow 2xy - 3y = 2x + 4$

$\Rightarrow 2xy - 2x = 2y + 4 \Rightarrow x(2y-2) = 2y + 4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{2y-2} \Rightarrow f^{-1} = \frac{2x+4}{2x-2} \Rightarrow f^{-1} = f^{-1}$

نکته: در تابع‌هایی به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد $a+d=0$ حتی f و f^{-1} برابرند.

$$y = \frac{r^n - 1}{r^n + 1} \Rightarrow r^n y + y = r^n - 1$$

Ex) تابع وارون بیابید $f(x) = \frac{r^x - 1}{r^x + 1}$ ؟

$$\Rightarrow r^n(y-1) = -y-1 \Rightarrow r^n = \frac{-y-1}{y-1} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow n = \log_r \left(\frac{y+1}{1-y} \right) \Rightarrow f^{-1} = \log_r \left(\frac{y+1}{1-y} \right)$$

* جزیی مواقع توابع به ظاهر غیر یک به یک یا محدود کردن دامنه یک به یک می شوند و راجع به وارون پذیری صحبت می شود.

جهت مثبت محاسب است

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y} \quad (x \geq 0) \text{ رسم کنید}$$

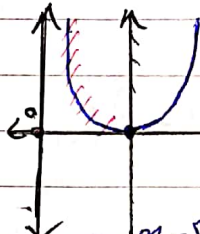
$$x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1} = \sqrt{y} \quad (x \geq 0)$$

جهت منفی محاسب است

1- اقصیت، وارون پذیر است

نکته: $Df = R_{f^{-1}}$ و $Df^{-1} = R_f$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2$$



Ex) $f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2)$ ؟

$$y = -4 \quad y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 - y = 0$$

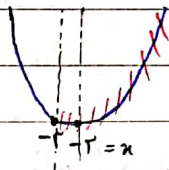
$$\Delta = 16 - 4(1)(5-y) = 4(4+y)$$

$$x = 2 \quad \Delta = 16 - 20 + 4y \Rightarrow \Delta = 4 - 4y \Rightarrow \Delta = 4(1-y)$$

$$2 + \sqrt{4(1-y)} \leq x = 2 \pm \sqrt{4(1-y)} \leq x = \frac{4 \pm 2\sqrt{4(1-y)}}{2}$$

$$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{1-y} \quad (y \leq -4) \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}}$$

Ex) $f(x) = x^2 + 4x + 3 \quad (x \leq -2)$ ؟



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 - y = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(3-y) \Rightarrow \Delta = 16 - 4(3-y) = 4(1+y)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(1+y) \Rightarrow \Delta = 4(1+y) \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4(1+y)}}{2} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{1+y}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = -2 - \sqrt{1+y} \quad (y \geq -1)$$

Ex) اگر $f = \{(2,3), (0,-4), (2,2), (0,2)\}$ و $g = \{(1,3), (2,-2), (0,2), (2,0)\}$ باشد توابع زیر را بیابید.

$$f \circ g^{-1} = \{(2,4), (2,-2), (0,2)\}$$

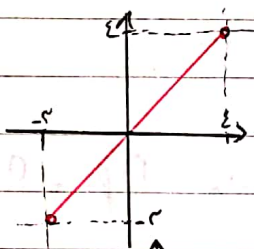
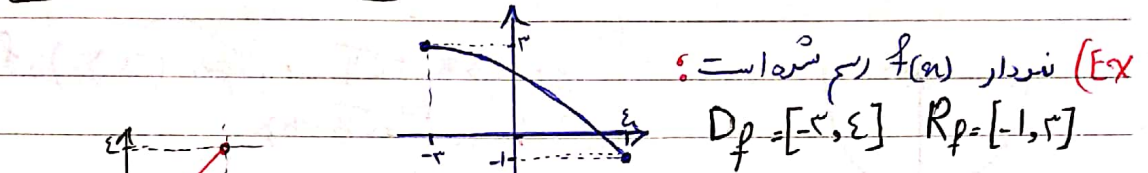
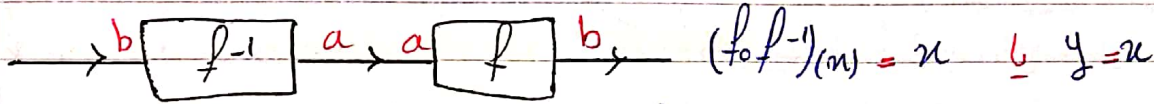
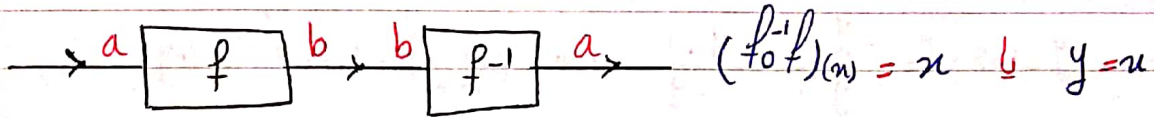
$$g \circ f^{-1} = \{(2,-1), (3,0), (-2,2)\}$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

اینگونه می خندد دیوانه به دیوانه /

من خنده زنده بودم 😊 دل خنده زنده بر من ❤️

*** ترکیب تابع و تابع وارون، تابع همانی است.**



(الف) نمودار $y = f \circ f^{-1}$ را رسم کنید. $x \in D_f \Rightarrow x \in [-2, 4]$
 به موجوده و دامنه ها در این سوالات خیلی توجه شود.

(ب) نمودار $y = f^{-1} \circ f$ را رسم کنید. $x \in R_f \Rightarrow x \in [-1, 3]$
 $x \in D_{f^{-1}}$

(Ex) در تابع مقدار $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ در x نام است؟ سرسری M
 $x = -x + \sqrt{-2x}$
 (1) $x = -1 + 4$
 (2) $x = -5 + 10$
 (3) $x = -2 + 2$ ✓

**** فتوای اگوی ثابتی: تابع درجه یک هر کجا دیدی رسم کن !!** **و من الله التوفیق**

سرسری ریاضی ۹۲

(Ex) تابع $f(x) = 2x - 1$ در بازه ای وارون پذیر است، فاصله $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

x	1/2	2	3
y	-1/2	3	5

(1) $x \geq 1/2$ و $x \leq 3$
 (2) $x \leq 1/2$ و $x \geq 3$
 (3) $x \geq 1/2$ و $x \leq 5$
 (4) $x \leq 1/2$ و $x \geq 5$ ✓

$1/2 \rightarrow 1/2$
 $3 \rightarrow 5$
 $y \leq 1/2 \Rightarrow x \leq 3$ در تابع دایره

استیاقی که بنه دیدار تو دارد دل من

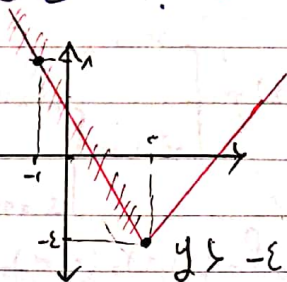
دل من دانه صحن دانه و دل دانه و من

خاک من گل شود و گل شکفت از گل من

تا ابد هر تو بیرون نبرد از دل من

Ex ۹۳ تابع $f(x) = |x-2| - |x+1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟ **تجربی ۹۳**

x	-۲	-۱	۲	۴
y	۹	۸	-۴	-۳



- (۱) $-x+7, x > 1$
- (۲) $\frac{1}{2}x+2, x > 3$
- (۳) $x+7, x > -4$
- (۴) $\frac{1}{2}x-1, -4 < x < 1$

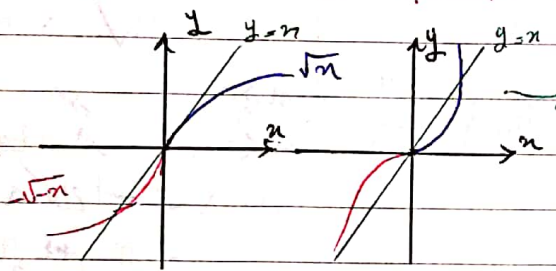
$y \leq -4 \rightarrow x \geq -4$
 $1 \leq y \leq 2 \rightarrow x \leq 2$

$y = 2 - \sqrt{x-1}$
 $\sqrt{x+1} = -y+2$
 $x+1 = (2-y)^2$
 $x = 4 - 4y + y^2 + 1$
 $x = y^2 - 4y + 5 \rightarrow f^{-1} = x^2 - 4x + 5$

Ex ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x+1}$ کدام است؟ **تجربی ۹۴**

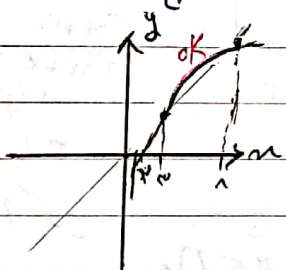
$y = x^2 - 4x + 5 \quad (x \leq 2)$ (۱)
 $y = -x^2 - 4x + 5 \quad (x \leq 2)$ (۲)
 $y = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 1)$ (۳)
 $y = -x^2 + 4x + 5 \quad (x \geq 1)$ (۴)

Ex ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ **تجربی ۹۱ خ**



- (۱) $y = |x|$
- (۲) $y = x^2, (x < 0)$
- (۳) $y = \sqrt{x}, (x \in \mathbb{R}_+)$
- (۴) $y = \sqrt{|x|}, (x \in \mathbb{R}_+)$

Ex نمودار تابع f و نیاز ربع اول و سوم در زیر رسم شده است دانسته تابع $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کدام است؟ **تجربی ۹۴**



- (۱) $[0, 2.5]$
- (۲) $[2.5, 3]$
- (۳) $[2, 1]$
- (۴) $[3, 1]$

Ex فاصله نقطه برخورد تابع $f(x) = x^3 + x - 1$ و f^{-1} تا مبدأ مختصات **تجربی ۹۴**

$y = n \Rightarrow x^3 + x - 1 = n \Rightarrow x^3 = 1 - n + 1 \Rightarrow x^3 = 2 - n \Rightarrow x = \sqrt[3]{2-n}$
 $AO = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Ex) اگر $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$) باشد، نمودارها، توابع f^{-1} و f با کدام طول متقاطع اند؟ **ریاضی ۸۸**

$y = x \Rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ✗
 $\Rightarrow x = 3$ ✓
 $\Rightarrow x^2 - 3x = 0$ ✗
 $\Rightarrow x = 0$ ✗
 $\Rightarrow x = 3$ ✓

گزینه‌ها: ۱) $\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) 3 ۴) غیر متقاطع

Ex) اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$ باشد، تابع $f \circ g^{-1}$ کدام است؟ **ریاضی ۹۰**

$f \circ g^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$

گزینه‌ها: ۱) $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ ۲) $\{(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ ۳) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ ۴) $\{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$

Ex) دو تابع $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$ باشد، اگر $(f \circ g)(a) = 4$ کدام است؟ **ریاضی ۹۳**

$f = 2x - 5$

$f^{-1}(g(a)) = 4 \Rightarrow g(a) = f(4) \Rightarrow g(a) = 3 \Rightarrow a = 2$

گزینه‌ها: ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Ex) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ باشد، $g^{-1}(f(a)) = 2$ و $g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ کدام است؟ **ریاضی ۹۳**

گزینه‌ها: ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

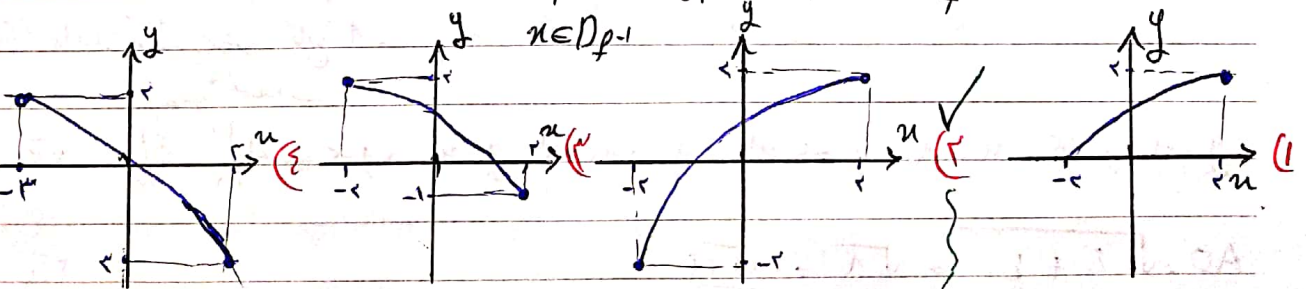
Ex) اگر $f(x) = \frac{2x+5}{2x+k}$ و $(f \circ f)(x) = x$ در این صورت k کدام است؟

$(f \circ f^{-1})(x) = x \Rightarrow f \circ f^{-1} \Rightarrow 2+k=0 \Rightarrow k = -2$

گزینه‌ها: ۱) -2 ۲) 2 ۳) 5 ۴) -5

Ex) در کدام گزینه تساوی توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برقرار است؟

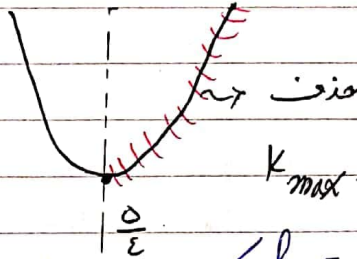
$y_f = x$ و $y_{f^{-1}} = x \rightarrow x \in D_f$



دانش و برد برابر

Ex) اگر تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ در بازه $[k, \infty)$ یک به یک باشد، حداکثر k کدام است؟

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$

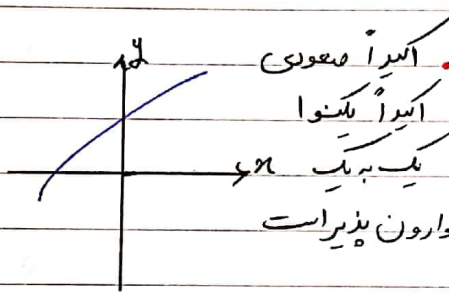
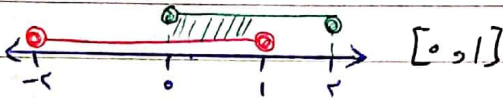


$k_{max} = \frac{5}{4}$

- (1) $\frac{5}{4}$
- (2) $\frac{5}{2}$
- (3) $\frac{5}{4}$
- (4) $\frac{5}{2}$

Ex) اگر $[0, 2] \rightarrow [1, 2]$ یک تابع وارون پذیر باشد، دامنه $f(x) + f'(x)$ کدام است؟
 $Df = [1, 2] \rightarrow Rf = [0, 2]$
 $Df = [1, 2] \rightarrow Rf = [0, 2]$
 اشتراک \cap

- (1) $[0, 2]$
- (2) $[1, 2]$
- (3) $[0, 1]$
- (4) $[1, 2]$



Ex) تابعی مثال بزنید که وارون پذیر و یک تنوا باشد. ابتدا صعودی، ابتدا نزولی، یک به یک، وارون پذیر است.

Ex) تابعی را مثال بزنید که وارون پذیر باشد، اما یک تنوا نباشد.

$f = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$

۱- اگه هست \rightarrow وارون پذیر است
 \rightarrow هیچ نیست
 \rightarrow ها افزایشی اند

نکته: قضیه یک تنوا و وارون پذیر بودن رفت و برگشتی نیست.

😊 پایان فصل اول... محمد دده بیگی