

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی تجربی

فصل سوم :: تابع نمایی و لگاریتم ::

alaatv.com

آلاء

I

محمد دده بیگی

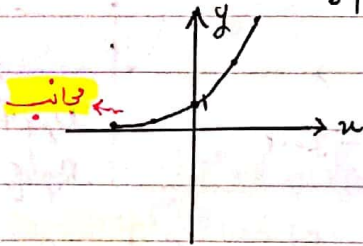
Subject: تابع نمایی و لگاریتم
Year: Month: Day: ()

فصل سوم: تابع نمایی و لگاریتم

تابع نمایی $f(x) = a^x$

Ex) $y = 2^x$

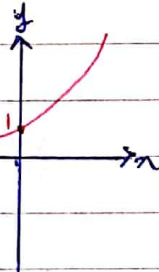
x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



نرم صعودی $a > 1$

Ex) $y = 2^x$

Ex) $y = 5^x$

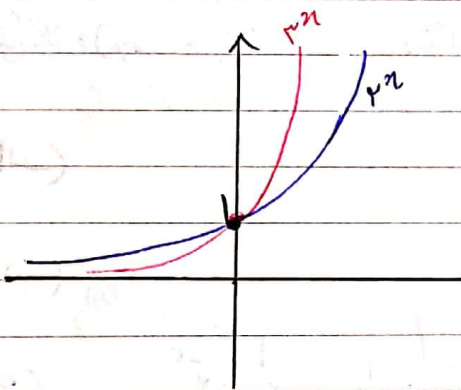


نرم نزولی $0 < a < 1$

Ex) $y = (\frac{1}{2})^x$

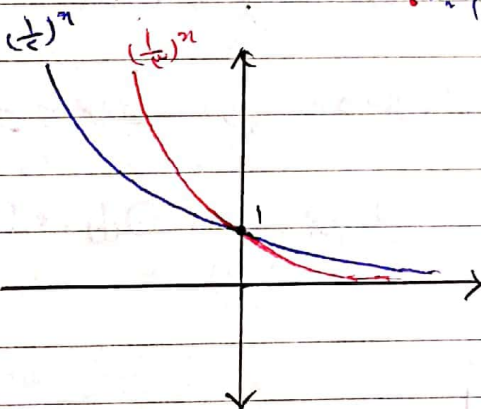
Ex) $y = (\frac{1}{5})^x$

Ex) نمودارها $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید.



x	-1	0	1
f(x)	$\frac{1}{2}$	1	2
g(x)	$\frac{1}{3}$	1	3

Ex) نمودار تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ و $g(x) = 2^{-x}$ را در یک دستگاه رسم کنید.

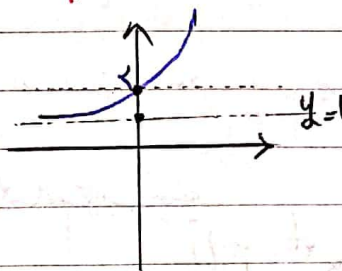
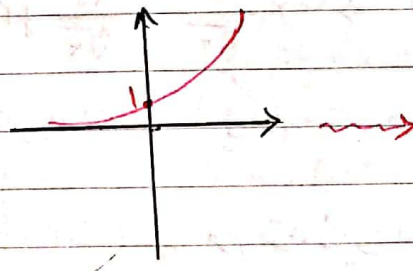


$2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$

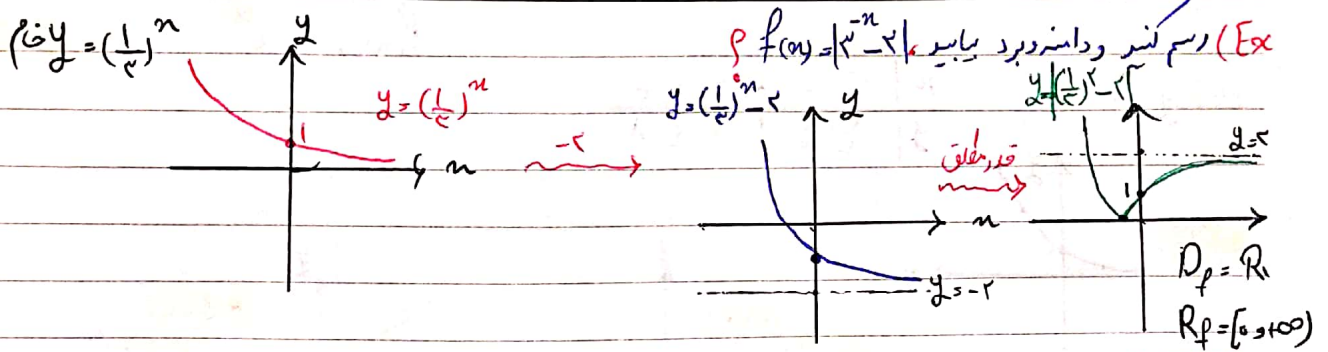
x	-1	0	1
f(x)	2	1	$\frac{1}{2}$
g(x)	2	1	$\frac{1}{2}$

Ex) رسم کنید دامنه و برد $f(x) = 2^x + 1$ را.

خام $y = 2^x$
معدنی $(2, \infty)$



$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = (1, \infty)$



حل مسائل در توابع نمایی

Ex) دمای یک لیوان چای پس از مدت t ساعت قرار گرفتن در یک محیط از رابطه $f(t) = 30 + 40x^{2-t}$ به دست می آید، (بر حسب سانی براد)؛ الف) دمای اولیه چای؟ ب) دمای این چای بعد از 3 ساعت؟ ج) پس از چه مدتی دما 35° می شود؟

الف) $t=0 \Rightarrow f(0) = 30 + 40 \times 1 \Rightarrow f(0) = 70^\circ$

ب) $t = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 30 + 40 \times 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 30 + 20\sqrt{2}$

ج) $30 + 40x^{2-t} = 35 \Rightarrow 40x^{2-t} = 5 \Rightarrow 8x^{2-t} = 1 \Rightarrow x^{2-t} = \frac{1}{8} \Rightarrow x^{2-t} = 2^{-3} \Rightarrow 2^{-t} = 2^{-3} \Rightarrow -t = -3 \Rightarrow t = 3$ ساعت

Ex) فرض کنید نیمه عمر کربن 14 برابر 5800 سال باشد و مقدار این کربن پس از t سال از رابطه زیر پیدا شود:

$Q(t) = 30 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5800}}$ الف) جرم اولیه؟ ب) جرم کربن پس از 725 سال؟

الف) $t=0 \Rightarrow Q(0) = 30 \times 1 = 30 \text{ gr}$

ب) $t = 725 \Rightarrow Q(725) = 30 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{725}{5800}} \Rightarrow 30 \times \frac{1}{\sqrt[5800]{2}} \Rightarrow \frac{30}{\sqrt[5800]{2}} \text{ gr}$

Ex) جرم یک توده بالتری در ابتدا ... اصلی گرم است و در هر ساعت دو برابر می شود؛ الف) جرم توده را به صورت تابع نمایی بنویسید (پس از t ساعت) ب) جرم توده را پس از 20 ساعت بنویسید.

الف) $P(t) = P_0 \times 2^t \Rightarrow 100 \times 2^t = P(t)$

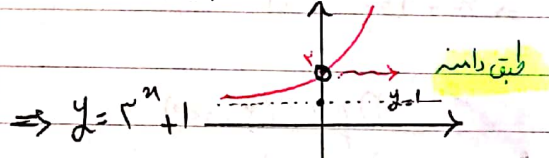
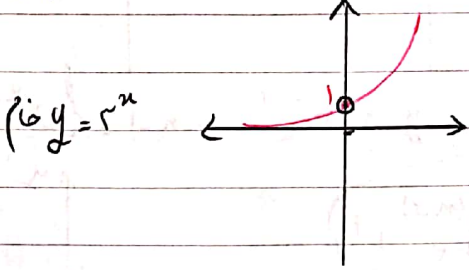
ب) $t = 20 \Rightarrow P(20) = 100 \times 2^{20} \text{ mg}$

$P(t) = P_0 \times O^t$

فرمول کلی در مسائل رشد و زوال :
 میزان رشد \rightarrow برابر شدن \rightarrow $O = 1$
 جهت اولیه \rightarrow جهت ثانویه

Ex) تابع زیر را رسم کنید و دامنه و بردار را بیابید.
 $f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x - 1}$

$f(x) = \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{3^x - 1} \Rightarrow f(x) = 3^x + 1$



$3^x + 1 = 0 \Rightarrow 3^x = -1 \Rightarrow x = \text{undefined}$

$D_f = R - \{0\}$ $R_f = (1, +\infty) - \{2\}$

لگاریتم

معرفی لگاریتم : $\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$

Ex) $2^{(x)} = 16 \Rightarrow x = 4$

Ex) $2^{(x)} = 18 \Rightarrow x = \log_2 18$

Ex) $3^{(x)} = 27 \Rightarrow x = \log_3 27$

Ex) $\log_5 125 = ? \Rightarrow ? = 3$

Ex) $2^{(x)} = 16 \Rightarrow x = \log_2 16$

Ex) $\log_2 32 = n \Rightarrow n = 5$

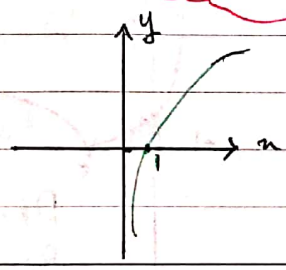
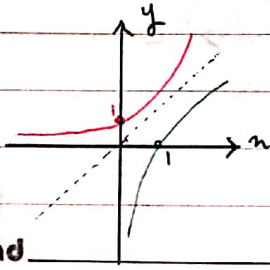
Ex) $\log_2 \frac{1}{8} = n \Rightarrow n = -3$

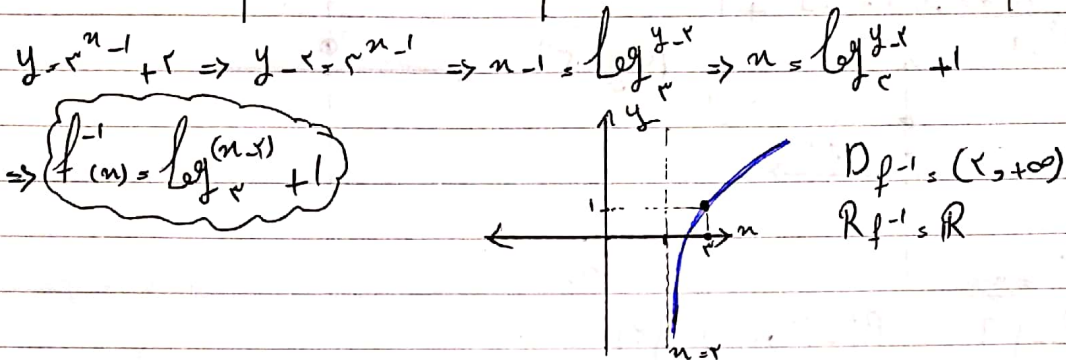
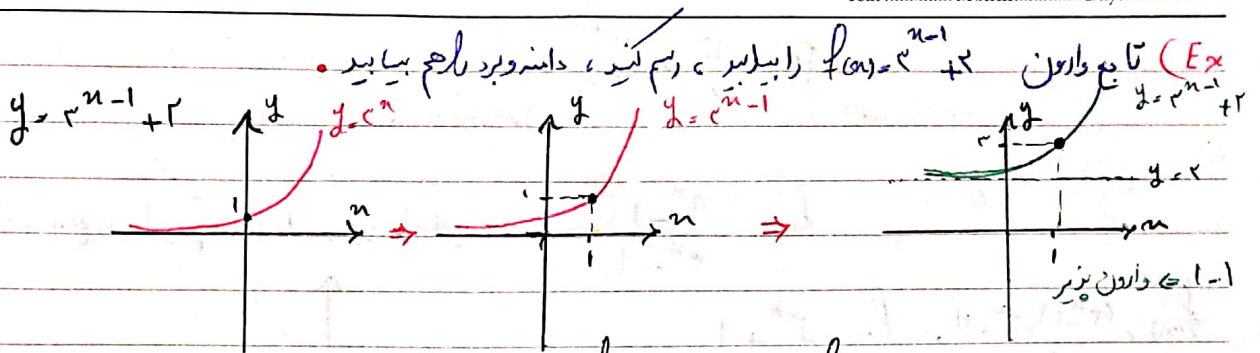
Ex) $\log_5 25 = n \Rightarrow n = 2$



نکته: تابع نمایی معمولاً تابعی وارون به صورت لگاریتم دارد.

Ex) $y = 2^x$ یا $f(x) = 2^x \Rightarrow x = \log_2 y = n \Rightarrow f^{-1}(n) = \log_2 n$

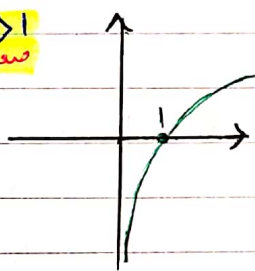




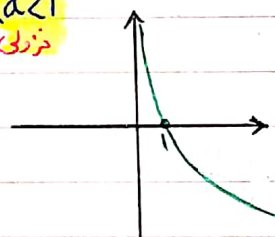
\log_a^n

لمودارها کفکارستی یابید

$a > 1$ صعودی
 Ex) \log_2^n
 Ex) $\log_{1/2}^n$

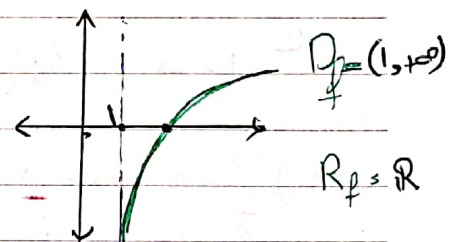
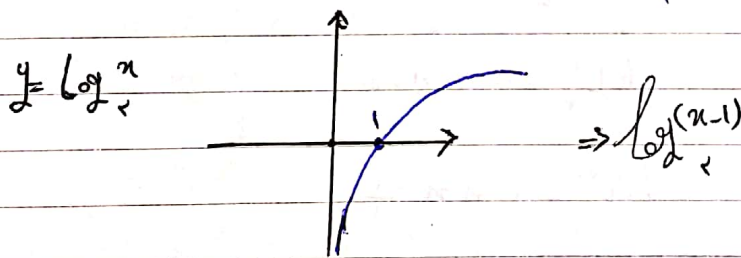


$0 < a < 1$ نزولی

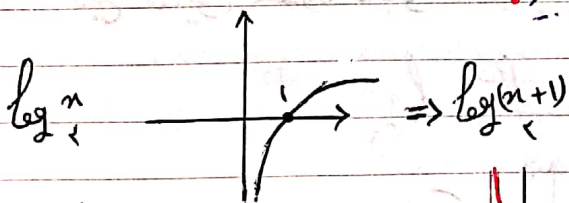


Ex) $\log_{1/2}^n$
 Ex) \log_2^n

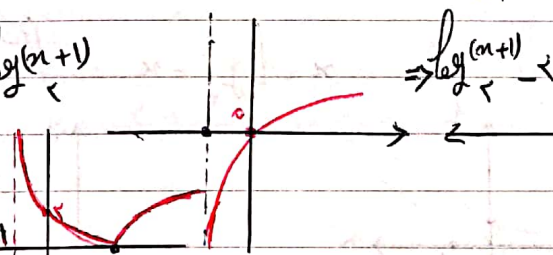
• رسم کنید و دامنه و برد را هم بیابید (Ex) $f(x) = \log_2(n-1)$ ؟



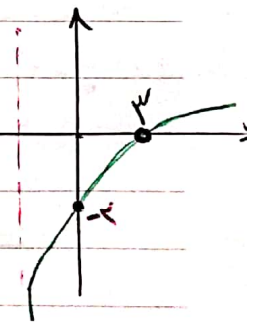
• تابع $f(x) = |\log_2(n+1) - 2|$ را رسم و دامنه و برد را هم بیابید (Ex)



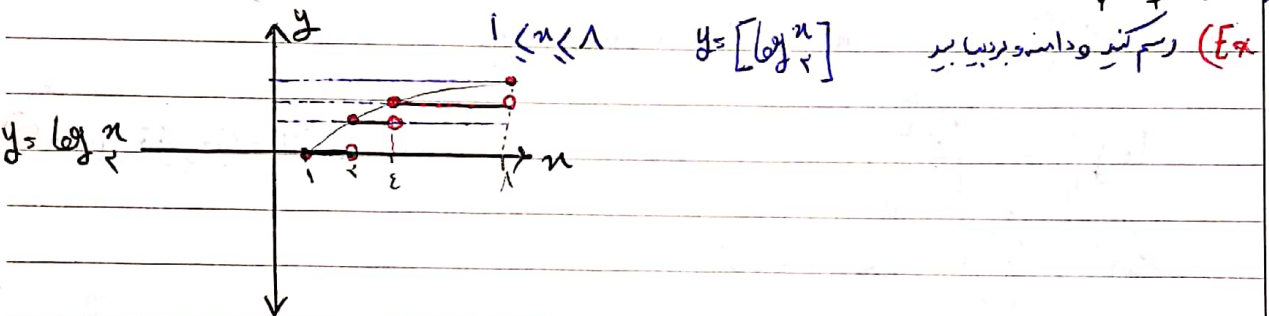
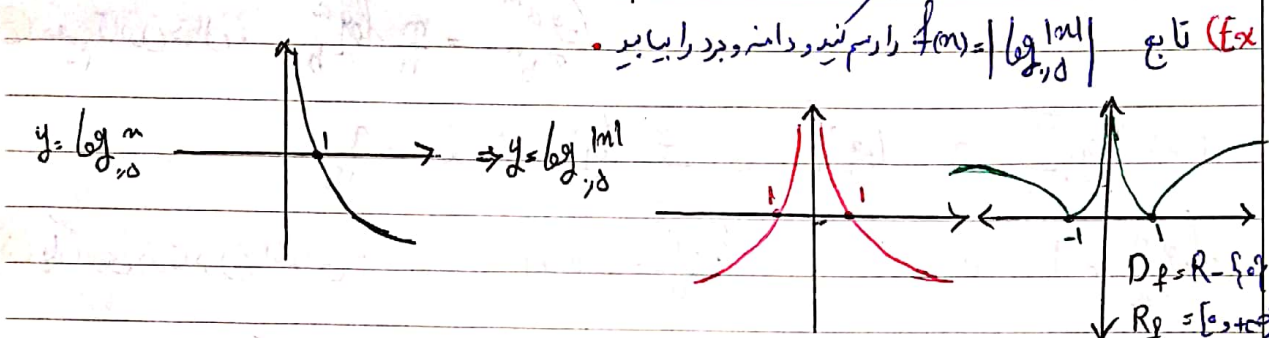
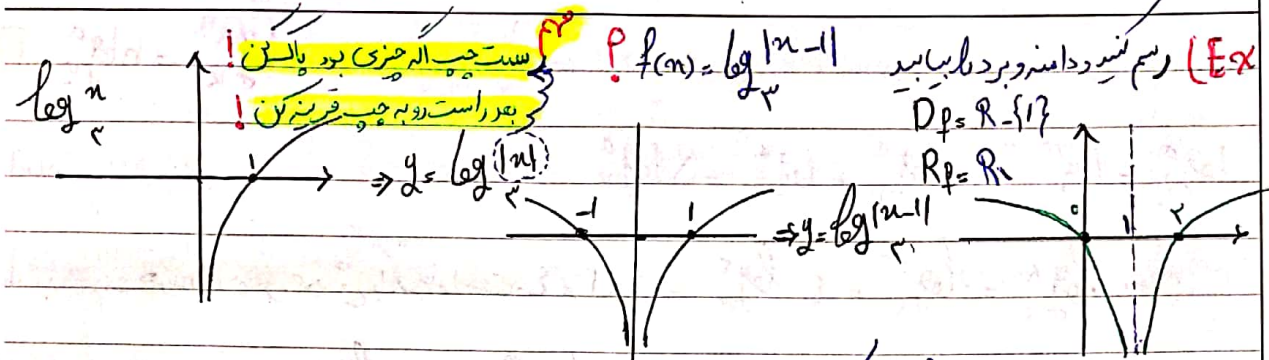
$0 = \log_2(n+1) - 2$
 $2 = \log_2(n+1) \Rightarrow 2^2 = n+1$
 $\Rightarrow n = 3$



$D_f = (-1, +\infty)$
 $R_f = [0, +\infty)$



Sahand



قوانین لگاریتم:

شرط: $k \neq 1, k > 0, b > 0, a > 0$ $\log_{\frac{a}{k}}(ab) = \log_{\frac{a}{k}} a + \log_{\frac{a}{k}} b$ (1)

اثبات: $\log_{\frac{a}{k}} a = n, \log_{\frac{a}{k}} b = y \Rightarrow a = k^n, b = k^y \Rightarrow ab = k^{n+y}$

$\Rightarrow \log_{\frac{a}{k}} ab = n+y \Rightarrow \log_{\frac{a}{k}}(ab) = \log_{\frac{a}{k}} a + \log_{\frac{a}{k}} b$ مثال: $\log_{\frac{2}{11}} 22 = \log_{\frac{2}{11}} 2 + \log_{\frac{2}{11}} 11$

شرط: $k \neq 1, k > 0, b > 0, a > 0$ $\log_{\frac{a}{k}} \frac{a}{b} = \log_{\frac{a}{k}} a - \log_{\frac{a}{k}} b$ (2)

اثبات: $\log_{\frac{a}{k}} a = n, \log_{\frac{a}{k}} b = y \Rightarrow a = k^n, b = k^y \Rightarrow \frac{a}{b} = k^{n-y}$

$\Rightarrow \log_{\frac{a}{k}} \frac{a}{b} = n-y \Rightarrow \log_{\frac{a}{k}} \frac{a}{b} = \log_{\frac{a}{k}} a - \log_{\frac{a}{k}} b$ مثال: $\log_{\frac{2}{11}} \frac{2}{11} = \log_{\frac{2}{11}} 2 - \log_{\frac{2}{11}} 11$

$$\log_k a^n = n \log_k a \quad (3)$$

$$\log_k a^2 = \log_k (a \times a) = \log_k a + \log_k a = 2 \log_k a$$

اثبات با مثال توان < :

نکته مهم: هر عدد در مبنای خودش باید برابر است. $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1 \times 1 = 1$

$$\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a \quad (4)$$

Ex) $\log_{\sqrt{12}} \sqrt[4]{12} = ?$ $\log_{\sqrt{12}} \sqrt[4]{12} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{12}} 12 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$$\log_a a = 1 \quad (a > 0) \quad , \quad \log_a 1 = 0 \quad (a \neq 1) \quad (5)$$

یادآوری دو قانون ابتدایی:

Ex) $\log_{\sqrt{2}} (2^{n-1}) = 1$ $n?$ $2^{n-1} = 2^1 \Rightarrow n = 2$

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b} \quad k = \text{دلتخواه}$$

قانون تغییر مبنای از تقسیم استفاده کن!

Ex) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{2}} \Rightarrow 2 = \text{دلتخواه}$

Ex) حاصل $\log(n + \sqrt{n^2 - 1}) + \log(n - \sqrt{n^2 - 1})$ برابر است؟

$$\log_{10} (n + \sqrt{n^2 - 1})(n - \sqrt{n^2 - 1}) \Rightarrow \log_{10} (n^2 - (n^2 - 1)) \Rightarrow \log_{10} 1 \Rightarrow 0$$

Ex) حاصل $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}$ برابر است؟

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-2}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{2}} 2 + \frac{1}{-1} \log_{\sqrt{2}} 2 \Rightarrow -4 + -1 = -5$$

Ex) حاصل $\log_2^2 \times \log_2^3 \times \log_2^4 \times \dots \times \log_2^{200}$ برابر است؟

$$\frac{\log_2^2}{\log_2^2} \times \frac{\log_2^3}{\log_2^2} \times \frac{\log_2^4}{\log_2^2} \times \dots \times \frac{\log_2^{200}}{\log_2^2} \Rightarrow \frac{\log_2^{200}}{\log_2^2} = \frac{\log_2^{200}}{\log_2^2} = \frac{200 \log_2}{2 \log_2} = 100$$

Ex حاصل $\log_{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}^{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}$ براب است ؟ $\Rightarrow \frac{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{2}}^{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}}{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2$

Ex اگر $\log^2 = k$ حاصل عبارت $\log(4-\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$ براب است ؟

$\log(4-\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2 \Rightarrow \log(4-\sqrt{5}) + \log(4+\sqrt{5}) \Rightarrow \log(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5}) = \log(16-5)$

$\Rightarrow \log 11 \Rightarrow \log^{11} \Rightarrow \frac{1}{11} \log^{11} \Rightarrow \frac{1}{11} k$

Ex اگر $a = \log^2$ و $b = \log^3$ حاصل \log_{11}^{11} براب است ؟

$\frac{\log \sqrt{11}}{\log 11} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \log^{11}}{\log^{11}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\log^2 + \log^3)}{\log^2 + \log^3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(a+b)}{b+a}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2b+a}$

قانون توان لگاریتم: $a^{\log_a b} = b$

نکته: هرگاه مبنا و پایه یکسان باشند، آنرا ۱۰ در نظری میگیریم.
 مثال: $5^{\log_5 7} = 7$ یا $10^{\log 3} = 3$

Ex حاصل $P = \frac{(\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2})}{(\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2})} = 1$ براب است آورد.

$P = (\frac{1}{2}) (\log \sqrt{10}) \Rightarrow \frac{1}{2} \log^{10} = 1$

Ex حاصل عبارت $A = \frac{(\log \sqrt{5} + \log \sqrt{5})}{(\log \sqrt{5} + \log \sqrt{5})}$ براب است ؟ $A = 14$

$A = (\frac{1}{2}) \log^9 + \log^{\frac{5}{2}} \Rightarrow A = (\frac{1}{2}) (\log^9 \times 5^{\frac{5}{2}}) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \log^9 \times 5^{\frac{5}{2}} = 9^2 \times 5^{\frac{5}{2}}$

جدول جیبانی لگاریتم (۸)

n	$\log n$	n	$\log n$
۵	۰٫۶۹۹	۰٫۱	-۳
۱۰	۱	۰٫۱	-۲
۱۰۰	۲	۰٫۱	-۱
۱۰۰۰	۳	۱	۰
۱۰۰۰۰	۴	۲	۰٫۳۰۱
		۳	۰٫۴۷۷

نکته: $\log^1 = 1$
 $\log^1 = \log^5 = 1$
 $\log^2 + \log^5 = 1$

Ex اگر $\log^2 = 0٫۳۰۱$ و $\log^2 = 0٫۴۷۷$ حاصل $\log^{\sqrt{2}}$ کدام است؟

$$\frac{\log^{\sqrt{2}}}{\log^2} = \frac{\frac{1}{2} \log^2}{\log^2} = \frac{\frac{1}{2} (\log^2 + \log^2)}{2 \log^2} = \frac{\frac{1}{2} (0٫۳۰۱ + 1)}{2 \times 0٫۴۷۷}$$

Ex عدد 2^{50} چند رقمی است؟
 عدد (۱۲) رقمی است $\Rightarrow 5 \times 0٫۳۰۱ = 1٫۵۰۵$
 $\log^2 = 5 \log^2 \Rightarrow 5 \times 0٫۳۰۱ = 1٫۵۰۵$

نکته: وقتی لگاریتم عددی n خورد باشد، آن عدد $n+1$ رقمی است.

$$\log_u v \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \\ v \neq 1 \end{cases} \Rightarrow n$$

اصول تعیین دامنه لگاریتمی

Ex تابع $f(x) = \log_{n-1}(x-2^x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} x-2^x > 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ n-1 > 0 \Rightarrow n > 1 \\ n-1 \neq 1 \Rightarrow n \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, \sqrt{2})$$

Ex دامنه تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 4)$ کدام است؟

$$x^2 + 2x - 4 > 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$$

از دید $\log \rightarrow -x + 4 > 0 \Rightarrow x < 4$

(Ex) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_4(4-x)}$ کدام است؟

$\sqrt{\log_4(4-x)} \geq 0 \Rightarrow 4-x \geq 1 \Rightarrow 4-x \geq 1 \Rightarrow 3 \geq x$. $D_f = (-\infty, 3]$

از دید $\log ; 4-x > 0 \Rightarrow x < 4$

(Ex) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_4(4-x)}$ کدام است؟

$\sqrt{\log_4(4-x)} \geq 0 \Rightarrow 4-x \leq (1, 5) \Rightarrow 4-x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq x$.
 $D_f = [3, 4)$
 جهت معضی شود

نکته: هرگاه اعداد کمتر از یک مبنای لگاریتم مابودند و ما از لگاریتم خلاصی شویم باید جهت نامساوی را معضی کنیم.

$[x] - 2 > 0$

(Ex) دامنه تابع $f(x) = \log_4([x] - 2)$ کدام است؟

$[x] > 2 \Rightarrow [x] = 3, 4, 5, 6, \dots$

$x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$

* در حل معادلات لگاریتمی، حتی جوابها درست آمده باشند مسئله جای نزاری کنید تا مطمئن شوید داخل لگاریتم مثبت است!

داخل \log مثبتی نبوده \times
 $(Ex) \log_5(x^2 - 2) = \log_5 x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$
 $\begin{cases} x_1 = -1 \times \\ x_2 = 2 \checkmark \end{cases}$

(Ex) $\log_{\frac{1}{2}} m^2 - \log_{\frac{1}{2}} m - 2 = 0 \Rightarrow 2 \log_{\frac{1}{2}} m - \log_{\frac{1}{2}} m = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} m = 2 \Rightarrow m = 4^2 \Rightarrow m = 16 \checkmark$

(Ex) $\log_4(12b - 21) - \log_4(b^2 - 3) = 2 \Rightarrow \log_4 \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2 \Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 4$

$12b - 21 = 4b^2 - 12 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow (2b - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$
 داخل \log مثبتی کنده معادله جواب ندارد.

(Ex) $\log_4(2n+2) - \log_4(n+2) = 1 \Rightarrow \log_4 \frac{2n+2}{n+2} = 1 \Rightarrow \frac{2n+2}{n+2} = 4$

$\Rightarrow 2n+2 = 4n+8 \Rightarrow n = -3 \checkmark$

نکته: مبنای لگاریتم 1 باشد \times

(Ex) $\log_n(2n+1) = \log_n(n^2+2) \Rightarrow 2n+1 = n^2+2 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0$
 $\begin{cases} n_1 = 1 \times \\ n_2 = 1 \checkmark \end{cases}$

Ex) $\log_{\sqrt{5}} n^5 - \log_{\sqrt{n}} 5 = \log_{\frac{\sqrt{5}}{1}} \Rightarrow \frac{5}{1} \log_{\sqrt{5}} n - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \log_{\sqrt{5}} 5 = \frac{1}{-1} \log_{\sqrt{5}} 5$

$\frac{5}{1} \log_{\sqrt{5}} n - 3 \log_{\sqrt{5}} 5 = -1 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} n = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5}{1} \frac{1}{5} - 3 \times \frac{1}{5} = -1$

$\Rightarrow 5t^2 - 3 = -1 \Rightarrow 5t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{5}} n = 1 \Rightarrow n=5 \\ \log_{\sqrt{5}} n = -\frac{3}{5} \Rightarrow n=5^{-\frac{3}{5}} \end{cases}$

Ex) از تساوی $\log_{\frac{n}{2}} (2n-1) + \frac{1}{2} \log_{\frac{n}{2}} n^2 = \log_{\frac{n}{2}} 2$ مقدار $\log_{\frac{n}{2}} n$ کدام است؟

$\log_{\frac{n}{2}} (2n-1) + \log |n| = \log 2 \Rightarrow \log_{\frac{n}{2}} (2n-1) |n| = \log 2 \Rightarrow (2n-1) |n| = 2$

$\Rightarrow 2n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = \frac{2}{2} \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{2}{2}} \frac{2}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \log_{\frac{1}{2}} 2 \Rightarrow -\frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Ex) جواب نامعادله زیر کدام است؟ $\log_{\frac{n+1}{1}} < -1$

قبل از حل: $\frac{n+1}{1} > 0 \Rightarrow n+1 > 0 \Rightarrow n > -1$

$\frac{n+1}{1} > 1^{-1} \Rightarrow \frac{n+1}{1} > \frac{1}{1} \Rightarrow n+1 > 1 \Rightarrow n > 0 \Rightarrow n \in (0, +\infty)$

Ex) جواب نامعادله زیر کدام است؟ $\log_{\frac{n-1}{1}} < -1$

قبل از حل: $\frac{n-1}{1} > 0 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow n > 1$

$\log_{\frac{n-1}{1}} < -1 \Rightarrow \frac{n-1}{1} > \left(\frac{1}{1}\right)^1 \Rightarrow \frac{n-1}{1} > 1 \Rightarrow n-1 > 1 \Rightarrow n > 2$

$\Rightarrow n \in (2, +\infty)$

Ex) از تساوی $\log (y-n) + \log (2n+y) = 2$ و $\log (y+2) = 1$ مقدار n کدام است؟

$y+2 = 10^1 \Rightarrow y = 1$

$\log (y-n)(2n+y) = 2 \Rightarrow (y-n)(2n+y) = 10^2 \Rightarrow (1-n) \times 2(n+1) = 100$
 $-2n^2 + 2n + 12 = 100 \Rightarrow (n-5)^2 = 0 \Rightarrow n = 5$

(Ex) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 2x)}$ کدام است؟
 $\log(x^2 - 2x) > 0 \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow \frac{x}{x} > \frac{2}{x} > 0$

$\log(x^2 - 2x) < 1 \Rightarrow x^2 - 2x < 10 \Rightarrow x^2 - 2x - 10 < 0$
 $(x-5)(x+2) < 0$

$D_f = [-2, 0) \cup (2, 5]$

(Ex) از معادله $\log(2x^2 + 1) - \log(x+2) = 1$ مقدار $\log(x-1)$ در پایه 8 کدام است؟

$\log\left(\frac{2x^2 + 1}{x + 2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 8 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 15 = 0$

$\left. \begin{matrix} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{matrix} \right\}$

$\log_8(x-1)$
 $\rightarrow x = -1$ *بازدهی منفی نمی شود*
 $\rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_8 \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \log_8 \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

* کاربرد لگاریتم در مباحث علمی:

قدرت زلزله بر حسب ریشتر M

E انرژی آزاد شده

E_0 انرژی مبنا ($10^{4.7}$)

$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$

(قدرت زلزله)

(Ex) زلزله ۶٫۸ در مقیاس ریشتر گزارش شده است، میزان انرژی آزاد شده چند ژول است؟

$6.8 = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.7}} \Rightarrow \frac{6.8 \times 3}{2} = \log \frac{E}{10^{4.7}} \Rightarrow 10.2 = \log \frac{E}{10^{4.7}} \Rightarrow 10^{10.2} = \frac{E}{10^{4.7}} \Rightarrow E = 10^{10.2} \times 10^{4.7} = 10^{14.9}$

(Ex) در یک زلزله حدود 5.96×10^{16} انرژی آزاد شده، قدرت زلزله چند ریشتری باشد؟ ($0.775 = \log 5.96$)

$M = \frac{2}{3} \log \frac{5.96 \times 10^{16}}{10^{4.7}} \Rightarrow M = \frac{2}{3} \log 5.96 \times 10^{11.3} \Rightarrow M = \frac{2}{3} (\log 5.96 + 11.3 \log 10)$

$M = \frac{2}{3} (0.775 + 11.3 \times 1) = 8.25$ ریشتر

(Ex) اگر مقدار انرژی آزاد شده در زلزله در منطقه A هزار برابر مقدار انرژی آزاد شده در زلزله در منطقه B باشد قدرت زلزله A چقدر

بیشتر از زلزله B است ؟
 منطقه A : $M_A = \frac{2}{3} \log \frac{E_A}{E_0}$ منطقه B : $M_B = \frac{2}{3} \log \frac{E_B}{E_0}$

$$M_A - M_B = \frac{2}{3} \left(\log \frac{E_A}{E_0} - \log \frac{E_B}{E_0} \right) \Rightarrow \frac{2}{3} \left(\log \frac{E_A}{E_0} - \log \frac{E_B}{E_0} \right) \Rightarrow \frac{2}{3} \log 1000 \Rightarrow \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

قدرت زلزله بر حسب ریشتر (د) قدرت زلزله بر حسب ریشتر
 $\log E = 11,8 + 1,5 M$ انرژی آزاد شده بر حسب ارج (Erg)

(Ex) میزان انرژی آزاد شده در یک زلزله به مقیاس ۶,۶ ریشتر، چقدر است ؟

$$\log E = 11,8 + 1,5 \times 6,6 = 2,7 \Rightarrow E = 10^{2,7} \text{ Erg}$$

سطح صوت بر حسب دسی بل (D)

$I =$ شدت صوت (وات بر متر مربع)

$I_0 = \frac{10^{-12}}{m^2}$ شدت صوت مبدا

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

(شدت صوت)

(Ex) شدت یک صوت یک $\frac{W}{m^2}$ است چقدر واحد دسی بل آن کدام است ؟

$$D = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} \Rightarrow D = 10 \log 10^{12} \Rightarrow 120 \log 10 \Rightarrow 120 \times 1 = 120 \text{ dB}$$

(Ex) در یک صوت ۷۰ dB شدت صوت بر حسب وات بر متر مربع کدام است ؟

$$70 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 7 = \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 10^7 = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

(Ex) شدت صوت A، بیست برابر شدت صوت B است، سطح صوت A چقدر بیشتر از سطح صوت B است ؟ (سهم \log)

$$D_A - D_B \Rightarrow 10 \log \frac{I_A}{I_0} - 10 \log \frac{I_B}{I_0} \Rightarrow 10 \left(\log \frac{I_A}{I_0} - \log \frac{I_B}{I_0} \right) \Rightarrow 10 \log \frac{I_A}{I_B}$$

$$10 \log 20 \Rightarrow 10 (\log 2 + \log 10) \Rightarrow 10 (0,3 + 1) \Rightarrow 10 \times 1,3 = 13 \text{ dB}$$

(مباحث نیمه عمر مواد رادیو اکتیو) نیمه مدت زمانی که پس از آن تعداد ماده به نصف کاهش یابد.

$$m = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

m_0 = جرم اولیه m = جرم باقیمانده
 T = نیمه عمر t = زمان سپری شده

Subject:

Year: Month: Day: ()

Ex) کربن ۱۲ اتخوان نسیل شده تنها شامل ۱۰٪ مقدار معمولی کربن ۱۲ است. عمر اتخوان را تخمین بزنید. (نیم عمر کربن ۵۷۰۰ سال و ۰.۰۰۱ سال)

$$m = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{10}{100} = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{5700}}} \Rightarrow 10 = 2^{\frac{t}{5700}} \Rightarrow \log_2 10 = \frac{t}{5700} \Rightarrow \frac{1}{5700} = \frac{t}{100000}$$

سال ۱۸۰۰۰۰ $t = \frac{5700}{0.001}$

Ex) یک نسیل مربوط به ۳۴۴ قرن پیش است. مقدار کربن ۱۲ باقی مانده در نسیل چقدر است؟ (نیم عمر کربن ۱۲، ۵۷۰۰ سال)

$$m = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^{\frac{344 \times 100}{5700}}} \Rightarrow m = \frac{1}{6} m_0$$

Ex) نیم عمر عنصری چهار روز دهم اولیه آن ۱ گرم است، طی چند روز جرم آن به ابره گرم کاهش پیدا می کند؟

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} \Rightarrow 100 = 2^{\frac{t}{4}} \Rightarrow \frac{t}{4} = \log_2 100 \Rightarrow \frac{t}{4} = 6.64 \Rightarrow \frac{1}{100}$$

روز ۲۶.۶ $t = 4 \times 6.64 = \frac{1}{0.01}$

Ex) نیم عمر پلاد رادیو اکتیوی ۳۰ سال است. نمونه ۱ از این ماده ۱۲۸ میلی گرم دارد جرم آن پس از ۳۰۰ سال چقدر است؟

$$m = \frac{128}{2^{\frac{300}{30}}} \Rightarrow m = \frac{128}{2^{10}} \Rightarrow m = \frac{128}{1024} \Rightarrow m = \frac{1}{8} \Rightarrow m = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ mg}$$

پایان فصل سوم... محمد دده بیگی 😊