

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی تجربی

فصل دوم :: مثلثات ::

[alaatv.com](http://alaatv.com)

آلاء

محمد دده بیگی

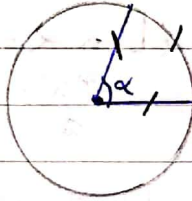
# فصل دوم... مثلثات

$$\begin{aligned} \pi &\rightarrow 180^\circ & \frac{\pi}{2} &\rightarrow 90^\circ \\ \frac{\pi}{3} &\rightarrow 60^\circ & \frac{\pi}{4} &\rightarrow 45^\circ \\ \frac{\pi}{6} &\rightarrow 30^\circ & \frac{\pi}{5} &\rightarrow 36^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

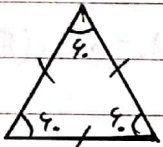
\* واحدهای اندازه گیری:

زاویه روبروی کمانی که با شعاع برابر باشد



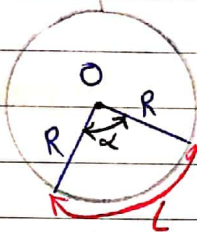
\* مفهوم یک رادیان:

$$\alpha = 1 \text{ rad} = 57^\circ$$



درجه ؟  $1 \text{ rad} = ?$

$$D = \frac{1}{180} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{3.14} \approx 57^\circ$$



دایره کامل  $\alpha = 2\pi$

$$L = R\alpha \rightarrow 2\pi R$$

حقیقتاً بر حسب رادیان

دایره کامل باشد  $\alpha = 2\pi$

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2 \rightarrow \pi R^2$$

\* نکات مرتبط با قطاع:

(Ex) متحرکی روی دایره ای به شعاع 2cm در جهت مثلثاتی حرکت می کند، اگر مسافت طی شده برابر-

4cm باشد، زاویه آن متحرک چرخیده است چقدر است؟

$$R = 2 \quad L = 4 \Rightarrow L = R\alpha$$

$$4 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 2 \text{ rad} \Rightarrow 2 \times \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi}$$

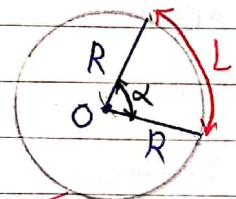
$$\begin{aligned} 1,5 & (1) \\ 2,7 & (2) \\ 5,4 & (3) \end{aligned}$$

(Ex) مساحت قطاعی از دایره به شعاع 4 برابر  $2\pi$  است. اندازه محیط قطاع کدام است؟

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2 = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{2} \times 16 \times \alpha = 2\pi$$

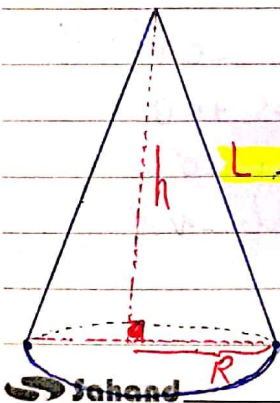
$$\Rightarrow 8\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow L = R\alpha \Rightarrow L = 4 \times \frac{\pi}{4}$$

$$P = L + 2R \Rightarrow \pi + 8$$



قانون پیتاگورس  $L^2 = h^2 + R^2$

\* یاد آوری چند نکته از مخروط:



مولد

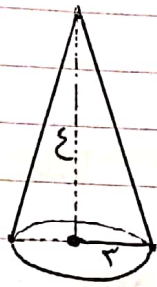
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

مساحت کل

①  $S_{\text{جانبی}} = \pi RL$

②  $S_{\text{قائده}} = \pi R^2$

Ex) مخروطی به شعاع قائمه 2 و ارتفاع 4 را از محل مولدش سوراخ، اندازه زاویه قطاع حاصل کدام است؟  
 R قطاع = مولد مخروطی

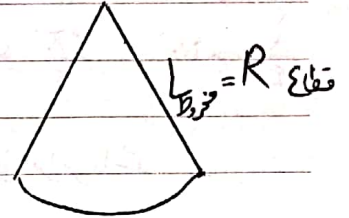


$$h=4, R=2 \Rightarrow L=5$$

$$S_{\text{جانبی}} = S_{\text{قطاع}} \Rightarrow \pi R L = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

$$\Rightarrow \pi R \cdot \frac{1}{2} \alpha L \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi \times 2}{5} \Rightarrow \frac{4\pi}{5}$$



Ex) مساحت و اندازه کمان قطاع از دایره برابر است با  $18\pi$  و  $2\pi$ ، اندازه شعاع کدام است؟

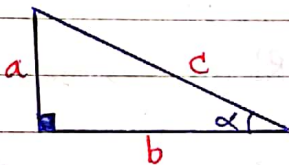
$$S = 18\pi \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha R^2 = 18\pi$$

$$L = 2\pi \Rightarrow \alpha R = 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \alpha R \cdot R = 18\pi \Rightarrow \pi R = 18\pi = R = 18$$

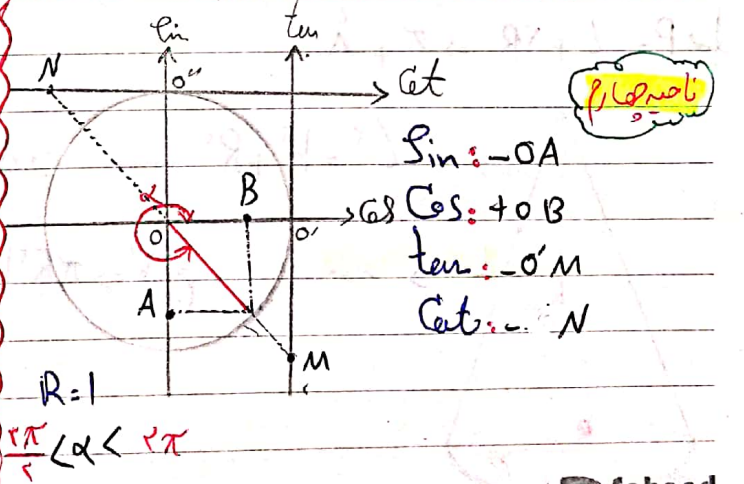
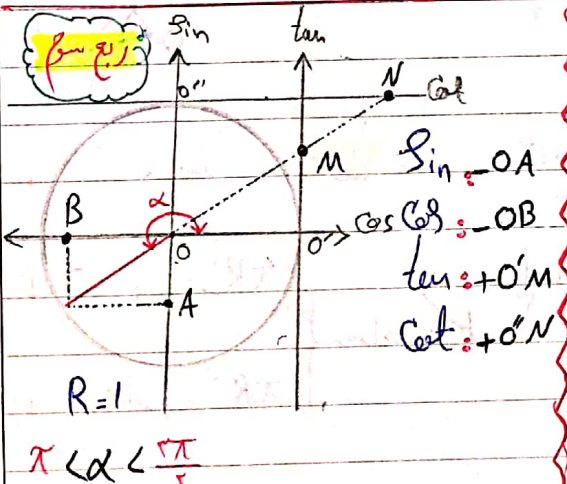
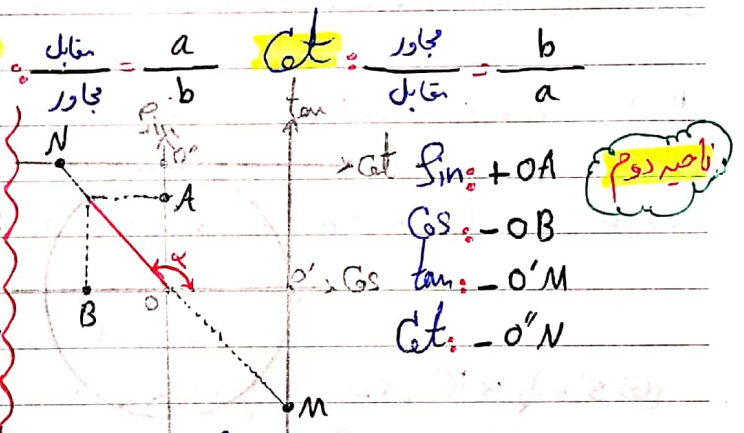
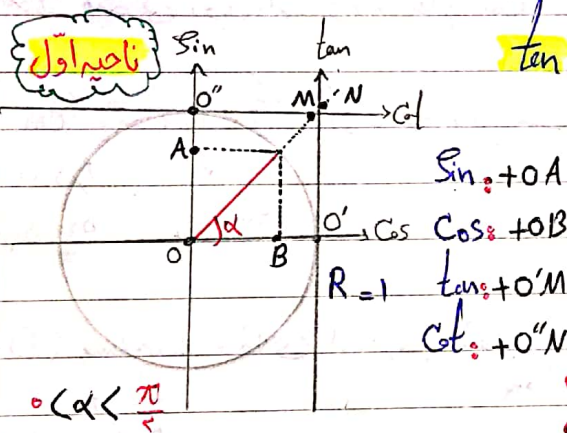
\* معرفی نسبت ها مثلثاتی :

فیناغورس  $c^2 = a^2 + b^2$



Sin:  $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$  Cos:  $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$

Tan:  $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{a}{b}$  Cot:  $\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{b}{a}$



\* مثبت های دایره مثلثاتی: « هستند »  
 هم به هم هستند  
 ربع اول ربع دوم ربع سوم ربع چهارم  
 سینوس تانژانت و کتانژانت

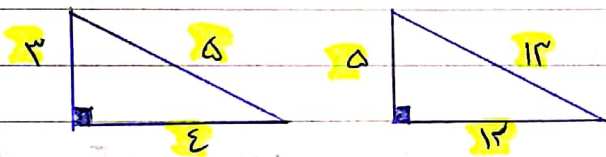
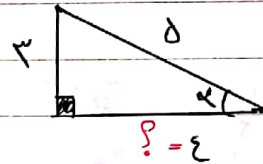
\* روابط اولیه مثلثاتی:

①  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

②  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$   
 ③  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$   
 $\Rightarrow \tan \cdot \cot = 1$   
 ④  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 ⑤  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(Ex) اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\alpha$  در ربع دوم باشد، مقدار  $\tan \alpha - \cot \alpha$  کدام است؟

ربع دوم  
 $(-\frac{4}{5}) - (\frac{3}{4}) = -\frac{7}{20}$



نکته: مثلث‌ها معروف می‌نخورن:

(Ex) اگر  $\tan \alpha = 1$  و  $\alpha$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$  کدام است؟  
 ربع سوم

$(-\frac{2}{\sqrt{5}})^2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \frac{4}{25}$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

\* محدوده  $\sin$  و  $\cos$ :

(Ex) برد تابع  $f(x) = \sqrt{2 \sin x + 5}$  کدام است؟

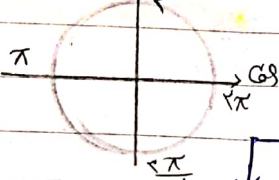
$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$   
 $+3 \leq 2 \sin x + 5 \leq 7$

$\sqrt{3} \leq \sqrt{2 \sin x + 5} \leq \sqrt{7}$

$R_f = [\sqrt{3}, \sqrt{7}]$

Ex) مقدار  $[\sin \xi^\circ] + [\sin \xi \text{ rad}]$  کدام است؟ (یعنی سوم)  $\xi \times 57 = 228$

$\Rightarrow [0] + [-1] = 0 + (-1) = -1$

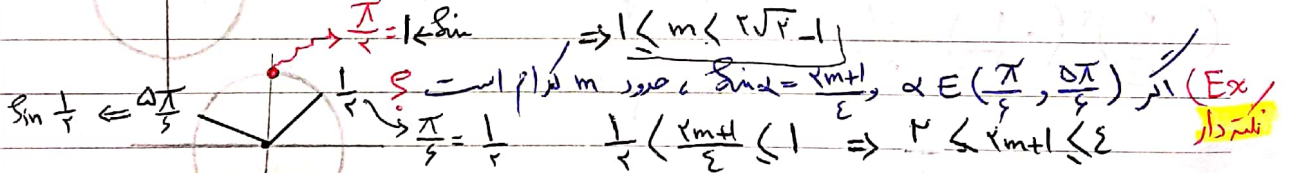
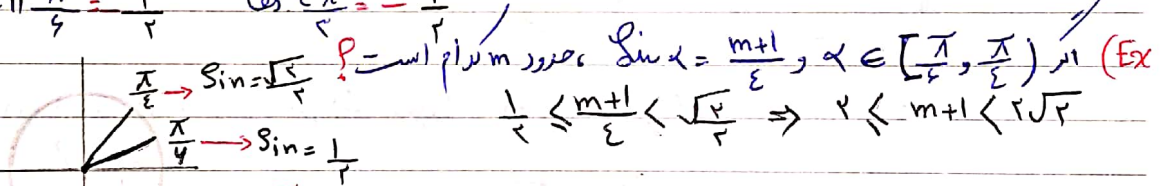


\* نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها مهم:

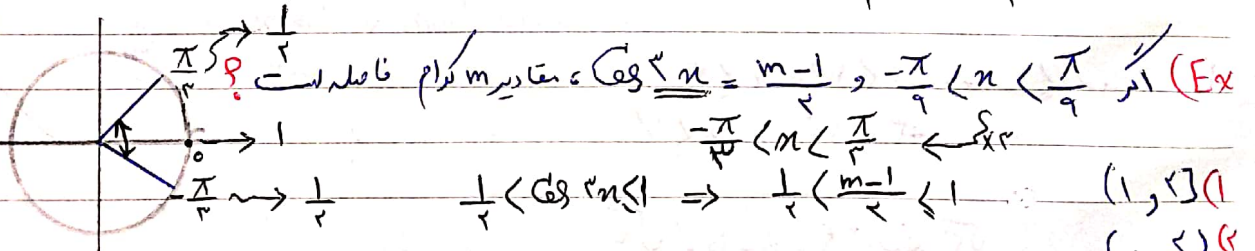
|     | 0 | $\frac{\pi}{6}$ (30°)                     | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°)                     | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|-----|---|---|-----------------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$                             | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                      | 1               | 0     | -1               | 0      |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                      | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$                             | 0               | -1    | 0                | 1      |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                     | $\sqrt{3}$                                | ∞               | 0     | ∞                | 0      |
| cot | ∞ | $\sqrt{3}$                                | 1                     | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | ∞     | 0                | ∞      |

\* نسبت‌های مثلثاتی مرتبط با جدول:

$\sin \frac{\pi}{6} = +\frac{1}{2}$        $\cos \frac{\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sin \frac{5\pi}{6} = +\frac{1}{2}$        $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$        $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$        $\cos \frac{11\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow 1 < 2m \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m \leq 1$



$\Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$

(1, 2) (1)  
 (2, 3) (2)  
 (2, 3) (3)  
 (3, 4) (4)

**\* حقیقات درون کمانی:**

- (1) حذف منفی  $\ominus$ : فقط در  $\cos$  است.
- (2) حذف ربع  $\pi$ : بدون قید و شرط!
- (3) حذف  $\pi$ : حذف کن، علامت بره!
- (4) حذف  $\frac{\pi}{2}$ : حذف کن، تغییر جنس و علامت بره.

$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$     $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$     $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$     $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$  (Ex)

$\cos(1\pi + \alpha) = +\cos\alpha$     $\tan(-1\pi + \alpha) = +\tan\alpha$     $\sin(4\pi - \alpha) = -\sin\alpha$     $\cos(3\pi - \alpha) = +\cos\alpha$  (Ex)

$\rightarrow$  4 ربع، 2 حذف  $\leftarrow$  بدون  $\pi$  می شوند  $\pi$  و  $180^\circ = \pi$  با  $\alpha$  جمع می شود  $\leftarrow$  ربع سوم  
 $\sin(7\pi + \alpha) = -\sin\alpha$     $\cos(5\pi - \alpha) = -\cos\alpha$     $\tan(3\pi + \alpha) = +\tan\alpha$  (Ex)

$\rightarrow$   $\frac{\pi}{2}$  هر حذف  $\leftarrow$   $\sin$  و  $\cos$  تبدیل می شوند  $\leftarrow$  علامت  $\sin$ ی برابر مثبت جواب  
 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\cos\alpha$     $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$     $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$     $\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\tan\alpha$  (Ex)

$A = \frac{2\sin(7\pi + \alpha) - 3\sin(\frac{5\pi}{2} + \alpha)}{\cos(1\pi - \alpha) + 5\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$  اگر  $\tan = 2$  حاصل رو بدو بدام است؟ (Ex)

$A = \frac{-2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha + 5\sin\alpha} \rightarrow A = \frac{-2\tan\alpha + 3}{1 + 5\tan\alpha} = \frac{-2(2) + 3}{1 + 5(2)} = \frac{-1}{11}$

(Ex) اگر  $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$  و  $\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$  در کدام ناحیه مثلثی است؟  
 $\sin(\sin - 1) > 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0$

ناحیه سوم  
 (1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم  
 $\cos(1 - \cos) < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0$

(Ex) اگر  $\cos n = \sqrt{\frac{\cot n}{\cot n - a}}$  (a ∈ R<sub>+</sub>) کمان  $n$  کدام ناحیه است؟  
 جواب:  $\cos < 0$  و  $\cot > 0$   $\leftarrow$  ناحیه دوم است.

$\cos n = \sqrt{\frac{\cot n}{\cot n - a}}$   $\leftarrow$  علامت بزرگ مثبت / علامت کوچک مثبت  
 اول (1) دوم (2) سوم (3) چهارم (4)  
 علامت بزرگ مثبت / علامت کوچک مثبت  $\leftarrow$  علامت بزرگ مثبت / علامت کوچک مثبت  $\leftarrow$  علامت بزرگ مثبت / علامت کوچک مثبت

$\cos n = \sqrt{\frac{\cot n}{\cot n - a}}$   $\leftarrow$  علامت کوچک منفی / علامت بزرگ منفی  
 اول (1) دوم (2) سوم (3) چهارم (4)  
 علامت کوچک منفی / علامت بزرگ منفی  $\leftarrow$  علامت کوچک منفی / علامت بزرگ منفی  $\leftarrow$  علامت کوچک منفی / علامت بزرگ منفی

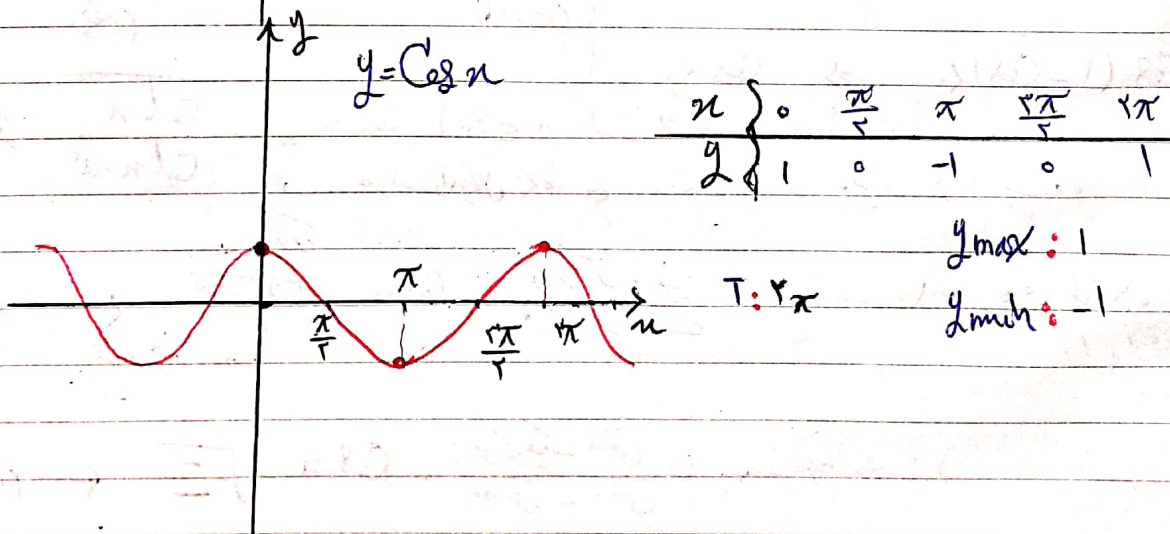
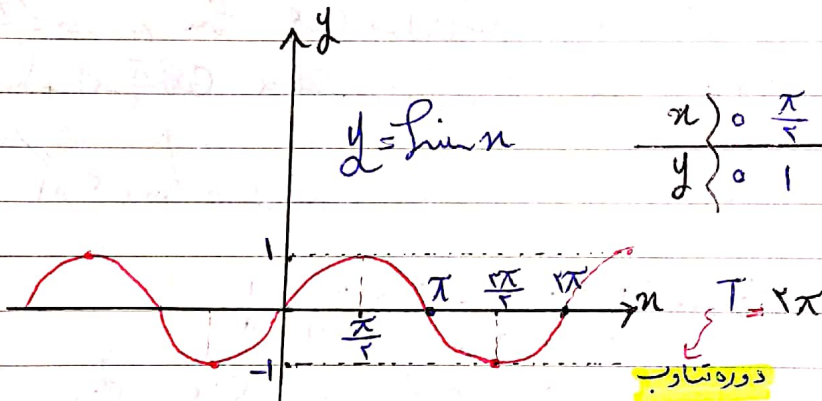
Ex) اگر  $\sin^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2$  مقدار عبارت  $\sin^2 x + \cos^2 x$  کدام است؟

$\frac{\sin^2 x + 1}{\sin x} = 2 \Rightarrow \sin^2 x + 1 = 2 \sin x \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$   
 $\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$   
 $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

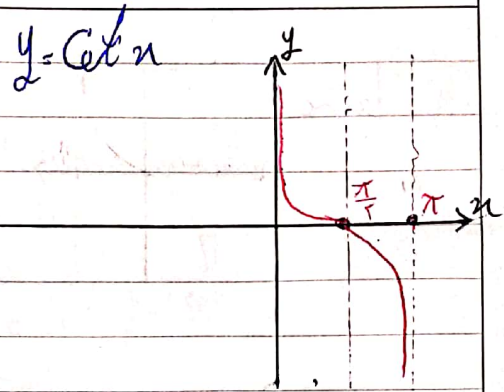
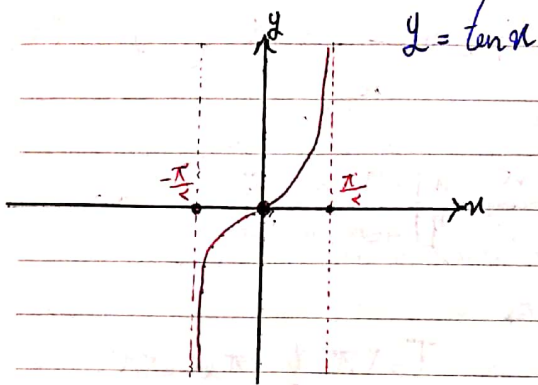
Ex) اگر  $\sin 10^\circ = \frac{1}{2}$  مقدار  $\frac{\sin 10^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$  کدام است؟

$\frac{\sin(10^\circ - 20^\circ) - \cos(10^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{+\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{1/4 + 1}{-1/4 + 1} = \frac{5/4}{3/4} = \frac{5}{3}$

\* نمودار پایه سینوسی:



Subject: .....  
 Year: ..... Month: ..... Day: ..... ( )



|          |     |                  |     |                 |
|----------|-----|------------------|-----|-----------------|
| $T: \pi$ | $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|          | $y$ | $-\infty$        | $0$ | $+\infty$       |

|          |     |           |                 |           |
|----------|-----|-----------|-----------------|-----------|
| $T: \pi$ | $x$ | $0$       | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     |
|          | $y$ | $+\infty$ | $0$             | $-\infty$ |

|     |     |                 |       |                  |        |
|-----|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$ | $1$             | $0$   | $-1$             | $0$    |

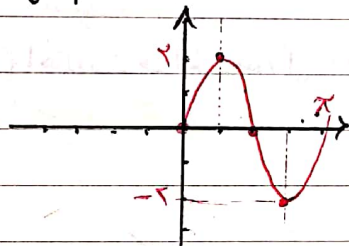
$= \sin x$

(Ex) تحلیل نمودار  $f(x) = 2 \sin(x)$  ؟

|     |     |                 |       |                  |        |
|-----|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$ | $2$             | $0$   | $-2$             | $0$    |

$T = \pi \leq \frac{2\pi}{2} = \pi$

$y_{\max} = 2$   
 $y_{\min} = -2$

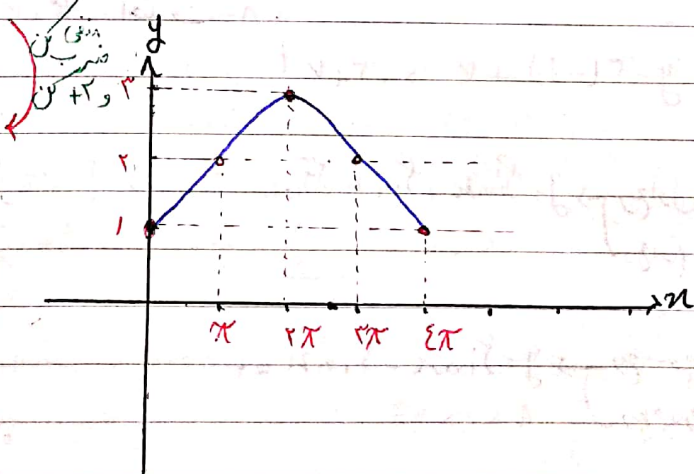


(Ex) تحلیل نمودار  $f(x) = 2 - \cos x$  ؟

وقتی ضرب مثبت منفی باشد، - ای در Max و ای در Min

|           |     |     |                 |       |                  |        |
|-----------|-----|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $\cos(x)$ | $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|           | $y$ | $1$ | $0$             | $-1$  | $0$              | $1$    |

|     |     |       |        |        |        |
|-----|-----|-------|--------|--------|--------|
| $x$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
| $y$ | $1$ | $2$   | $3$    | $2$    | $1$    |

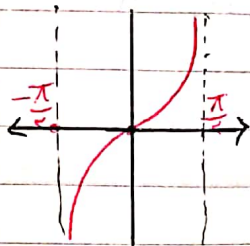


$T = 2\pi \leq 2\pi \times 2 = 4\pi$

$y_{\max} = 3$   
 $y_{\min} = 1$

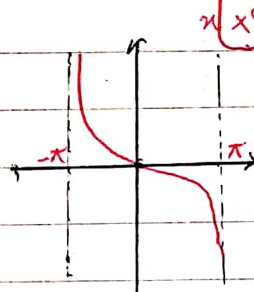


$y = \tan x$



|   |                  |   |                 |
|---|------------------|---|-----------------|
| x | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| y | $-\infty$        | 0 | $+\infty$       |

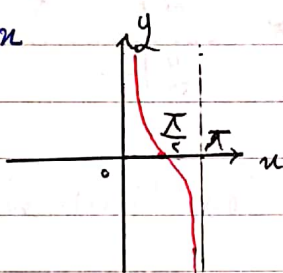
(Ex) تحلیل تابع  $f(x) = -\tan \frac{x}{2}$  ؟



|   |           |   |           |
|---|-----------|---|-----------|
| x | $-\pi$    | 0 | $\pi$     |
| y | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |

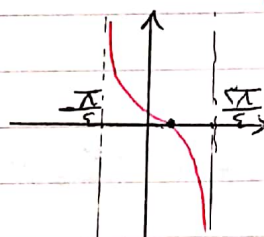
$T = 2\pi \quad \text{یا} \quad \pi \times 2 = 2\pi$

$y = \cot x$



|   |           |                 |           |
|---|-----------|-----------------|-----------|
| x | 0         | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     |
| y | $+\infty$ | 0               | $-\infty$ |

(Ex) تحلیل تابع  $f(x) = \cot(x + \frac{\pi}{2})$  ؟



|   |                  |                 |                  |
|---|------------------|-----------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| y | $+\infty$        | 0               | $-\infty$        |

$T = \pi$

(Ex) اختلاف حداکثر و حداقل تابع  $f(x) = 2 - 2 \cos x$  کدام است ؟

$y = 2 - 2(1) = 0 \Rightarrow \min$

$y = 2 - 2(-1) = 4 \Rightarrow \max$

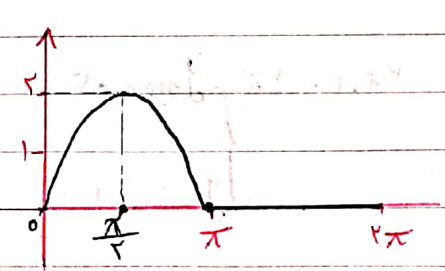
(Ex) اختلاف حداکثر و حداقل تابع  $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2} + k$  برابر  $\lambda$  است،  $k$  کدام است ؟

$y = 3(1) + k \Rightarrow 3 + k$

$y = 3(-1) + k \Rightarrow -3 + k$

$\lambda = \text{اختلاف} \Rightarrow (3+k) - (-3+k) \Rightarrow 3+k+3-k \Rightarrow 6 \neq \lambda$   
 هیچ مقدار  $k$  غیر ممکن

(Ex) نمودار  $f(x) = \sin x + |\sin x|$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است ؟  
 ربع اول  $0 < x < \pi$   
 ربع دوم



ربع سوم  $y = \sin x - \sin x = 0$   
 ربع چهارم  $\pi < x < 2\pi$

Ex) نمودار  $f(x) = a + b \cos(x)$  در زیر رسم شده است. حاصل  $\sqrt{ab}$  کدام است؟

$y = a + b(1) = a + b = 6$   
 $y = a + b(-1) = a - b = 2$

$a = 4$   
 $b = 2$

$\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

کف و سقف دایره  $\cos$  و  $\sin$  را بر این ملاحظه کنید.

\* نسبت‌های مثلثاتی دایره بر اینها:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1 - \sin^2 \alpha \\ 1 - \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Ex) اگر  $\tan 2\alpha = \frac{2}{5}$  مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$\frac{2}{5} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{2 \times 9 \times 4}{17 \times 6} = \frac{4 \times 5}{17 \times 6} = \frac{20}{51}$

$\sin 2\alpha = \frac{20}{51}$

توجه کنید: در این تئیم سوالات باید به نسبت و متغی در ربع‌ها توجه کنید.

Ex) اگر  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\alpha$  در ربع دوم باشد، مقدار  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$  کدام است؟

$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$

$= -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$= -2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

Ex) اگر  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{9}$  مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{81} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{81}$

$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{81} - 1 = -\frac{80}{81}$

Ex) اگر  $\tan \alpha = 2$  مقدار  $\cos 2\alpha$  کدام است؟

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$\Rightarrow \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

(Ex) اگر  $\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$  و مقدار  $\cos^2 \alpha$  کدام است؟  $\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha$   
 $(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 $\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$

(Ex) اگر  $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$  و در ربع دوم باشد مقدار  $\cot \alpha$  کدام است؟  
 در ربع دوم  $\sin \alpha > 0$  و  $\cos \alpha < 0$  پس  $\sin \alpha = -\cos \alpha$   
 $\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{-\cos \alpha} = -1$

$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 1$   
 در ربع دوم  $\tan \alpha = -1$   
 $\Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -1$

(Ex) اگر  $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$  باشد مقدار  $\sin^2 \alpha$  کدام است. مثال الگو

$(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha})^2 - 2 \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$   
 $\Rightarrow 1 + \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$   
 $\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

(Ex) مقدار  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  کدام است؟ مثال الگو  
 $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1$   
 $\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$   
 $\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

روش تستی:  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

(Ex) اگر  $\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$  مقدار  $\tan \alpha$  کدام است. مثال الگو  
 $\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \cot \alpha = 1$

$\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{-\cos \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow -2 \cot \frac{\pi}{4} = 1$   
 $\Rightarrow \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = -2$

روش تستی:  $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$

\* سوالات مرتبط با نصف کمان:  
 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$   
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

Ex) مقدار  $\sin^{-1} \frac{1}{2}$  بدام است؟  $\Rightarrow \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) = \sin^2 \alpha$

$\frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

Ex) مقدار  $\cos^{-1} \frac{\pi}{12}$  بدام است؟  $\Rightarrow \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \cos^2 \alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{12} \Rightarrow + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \cos \frac{\pi}{12}$

Ex) ساده شود عبارت  $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

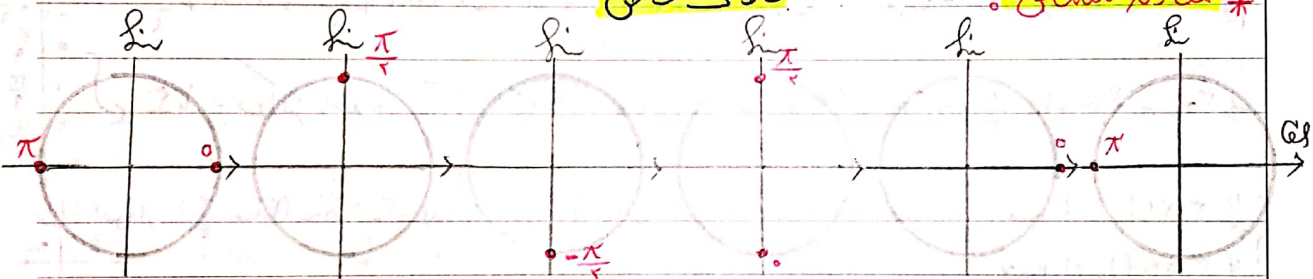
$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \cos^2 \alpha)}$

$\Rightarrow \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \tan \alpha$



حالات خاص

\* معادله مثلثاتی



|                  |                               |                               |                              |                     |                          |
|------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---------------------|--------------------------|
| $\sin \pi = 0$   | $\sin \frac{\pi}{2} = 1$      | $\sin \pi = 0$                | $\cos \frac{\pi}{2} = 0$     | $\cos \pi = -1$     | $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ |
| $\pi = k\pi + 0$ | $\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $\pi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ | $\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $\pi = 2k\pi + \pi$ | $\pi = 2k\pi + \pi$      |

معرفی یک نهاد:  $k\pi$  نهادیم دور چرخیدن در دایره مثلثاتی

Ex) جواب کسی معادله زیر کدام است؟  $2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0$

$2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0$

$2 + 3 + 5 = 10$

$\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \cos \alpha$

$\cos \alpha < 1$

| k   | n   |
|-----|-----|
| ... | ... |
| -2  | -2π |
| -1  | -π  |
| 0   | 0   |
| 1   | π   |
| 2   | 2π  |
| ... | ... |



Ex) معنی  $f(x) = 2 \sin(2\pi x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند بار محور  $x$  را قطع می کند؟

$2 \sin(2\pi x - \frac{\pi}{4}) = 0$   
 $\sin(2\pi x - \frac{\pi}{4}) = 0$



$y = 0$



سوتی ندی!

$k\pi + 0 = 2\pi n - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi n = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2n = k + \frac{1}{4} \Rightarrow n = \frac{4k+1}{8}$

| k  | n                |
|----|------------------|
| -2 | $-\frac{7}{4}$ X |
| -1 | $-\frac{3}{4}$ ✓ |
| 0  | $\frac{1}{4}$ ✓  |
| 1  | $\frac{5}{4}$ ✓  |
| 2  | $\frac{9}{4}$ ✓  |
| 3  | $\frac{13}{4}$ ✓ |
| 4  | $\frac{17}{4}$ X |

- ؟ یارب دل دوستان پر از غم نلنی
- ؟ با تیر قضا قامت ما خم نلنی
- ؟ از چرخ تورا به عشق قرآن سوگند
- ؟ یک موزن رفیق ما کم نلنی

← 4 بار قطع کرده است.

Ex) معنی  $f(x) = -2 \cos(2\pi x + \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند بار به حد اکثری رسد؟

$y = -2(1) = -2 \Rightarrow \min$

$y = -2(-1) = 2 \Rightarrow \max \Rightarrow \cos(2\pi n + \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow 2k\pi + \pi = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$   
 $\Rightarrow 2n = 2k + 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2n = 2k + \frac{3}{4} \Rightarrow n = \frac{4k+3}{8}$

| k  | n                |
|----|------------------|
| -1 | $-\frac{1}{8}$ X |
| 0  | $\frac{3}{8}$ ✓  |
| 1  | $\frac{7}{8}$ ✓  |
| 2  | $\frac{11}{8}$ ✓ |
| 3  | $\frac{15}{8}$ X |

Ex) نمودار  $f(x) = 2 - 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند بار به حداقل می رسد؟

$y = 2 - 2(1) = 0 \Rightarrow \min$   
 $y = 2 - 2(-1) = 4 \Rightarrow \max$

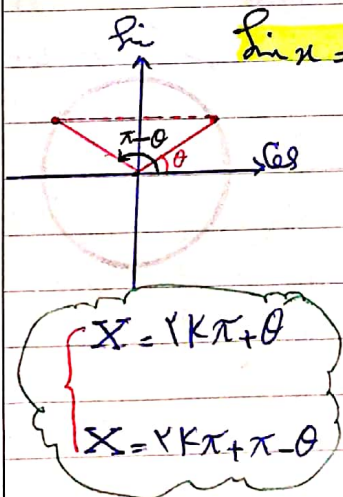
$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$   
 $\Rightarrow n = \frac{4k+2}{8}$

| k  | n                |
|----|------------------|
| -1 | $-\frac{3}{4}$ X |
| 0  | $\frac{1}{4}$ ✓  |
| 1  | $\frac{5}{4}$ ✓  |
| 2  | $\frac{9}{4}$ X  |

$\sin x = \sin \theta$

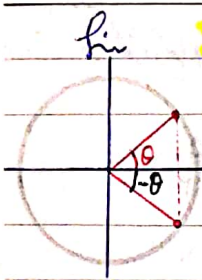
حالت کلی

\* معادله مثلثاتی :



Ex)  $\sin x = \frac{1}{4}$   
 $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$   
 $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Ex)  $\sin x = -\frac{1}{4}$   
 $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$   
 $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$



$\cos \pi = \cos \theta$

Ex)  $\cos \pi = \frac{1}{r}$   
 $\cos \pi = \cos \frac{\pi}{r}$   
 $\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{r}$

Ex)  $\cos \pi = -1$   
 $\cos \pi = \cos \frac{\pi}{r}$   
 $\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{r}$

منتهی

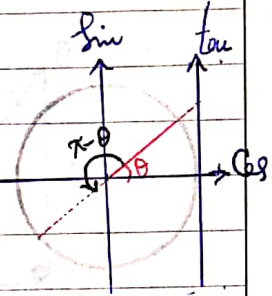
$2\pi = 2k\pi + \theta$   
 $2\pi = 2k\pi - \theta$

$\tan \pi = \tan \theta$

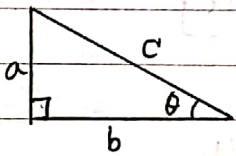
Ex)  $\tan \pi = \sqrt{r}$   
 $\tan \pi = \tan \frac{\pi}{r}$   
 $\pi = k\pi + \frac{\pi}{r}$

Ex)  $\tan \pi = -\sqrt{r}$   
 $\tan \pi = \tan(-\frac{\pi}{r})$   
 $\pi = k\pi + (-\frac{\pi}{r})$

$X = k\pi + \theta$



\* کاربرد مثلثات :



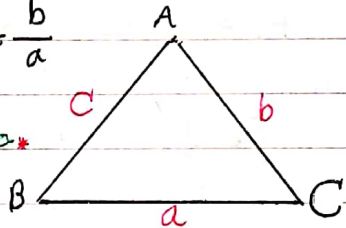
$\sin = \frac{a}{c}$     $\cos = \frac{b}{c}$

$\tan = \frac{a}{b}$     $\cot = \frac{b}{a}$

← مفاهیم اولیه را بلد باشید :

← نحوه نامگذاری مثلث :

\* حرف کوچک را برای رأس دورتری نویسیم.



قانون پانچجه بر مثلث

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

← قانون سینوس ها :

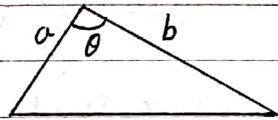
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$   
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$   
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

← قانون کسینوس ها : نسبه کسینوس

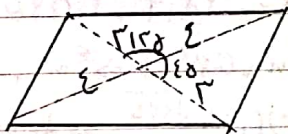
$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \times h$

← مساحت مثلث :

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \theta$  (فرض)



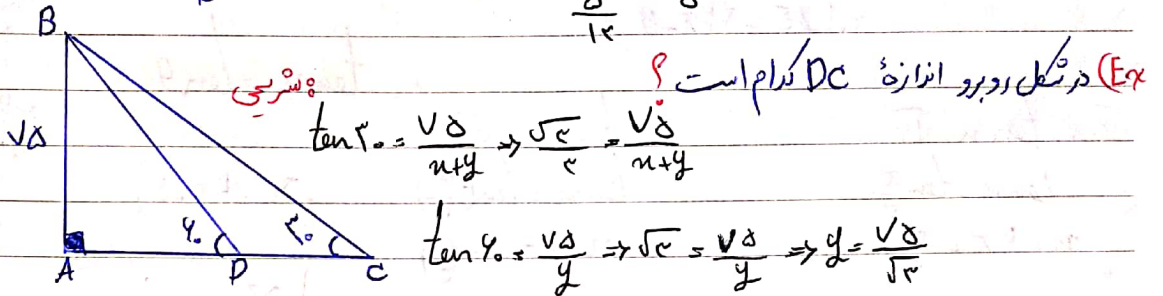
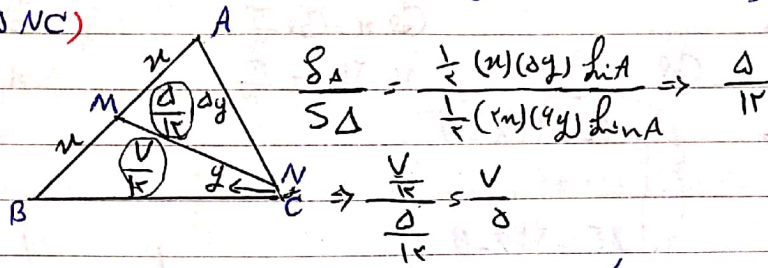
Ex) مساحت متوازی الاضلاع به قطرهای ۸ و ۶ که زاویه قطرهای ۱۳۵ است کدام است ؟



$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (4)(4) (\sin 45) = 4\sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{مربع}} = 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

$\sin 135 = \sin 45 \Rightarrow S_{\Delta} = S_{\Delta}$

Ex در شکل زیر نسبت مساحت چهارضلعی MNCB به مساحت مثلث AMN کدام است؟  
(AM = MB و AN = 5 NC)

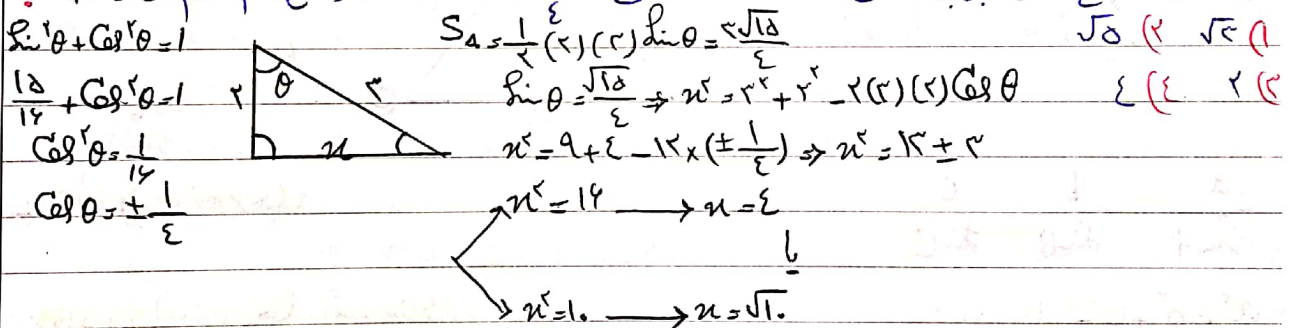


$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{n + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 2 \times 5\sqrt{5} = \sqrt{3}n + 5\sqrt{5} \Rightarrow 2 \times 5\sqrt{5} = \sqrt{3}n \Rightarrow n = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

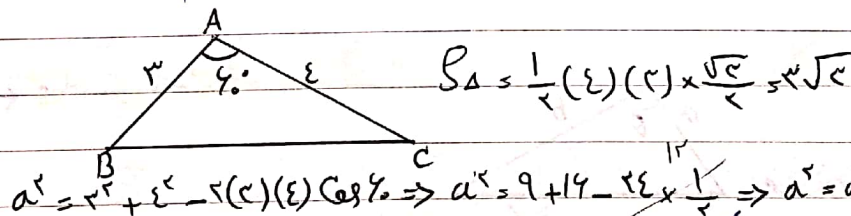


$$n = h(\cot \alpha - \cot \beta)$$

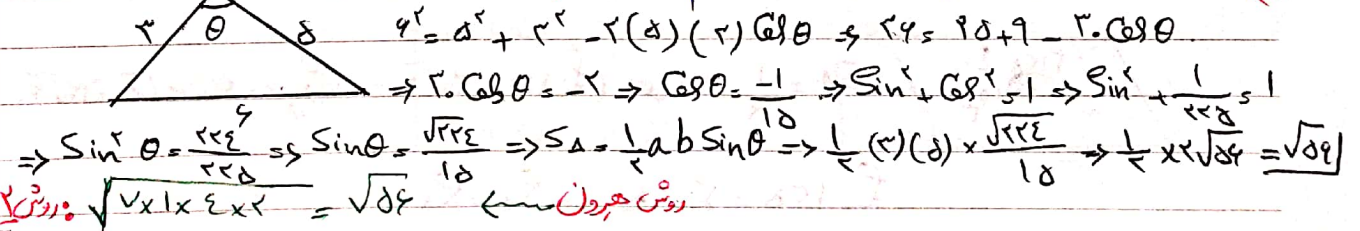
Ex اندازه دو ضلع مثلثی برابر آوی باشد و مساحت آن  $2\sqrt{15}$  است، اندازه ضلع سوم کدام می تواند باشد؟



Ex در مثلث ABC،  $b=4$ ،  $C=30^\circ$  و  $\hat{A}=40^\circ$ ، اندازه ضلع a و مساحت مثلث کدام است؟

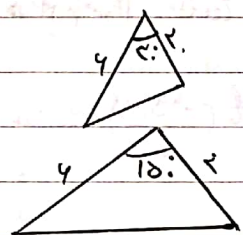
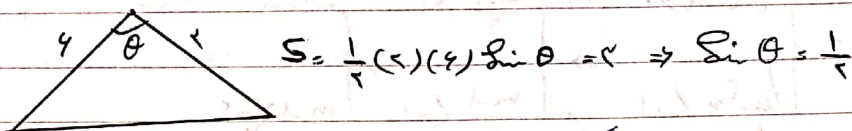


Ex مساحت مثلث با اضلاع 5، 3 و 2، کدام است؟



روش جبرون: پیدا کردن مساحت با آضلع  
 $S_{\Delta} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$  (ض ض ض ض)  
 P نادر نصف محیط

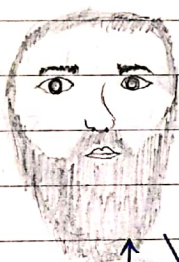
(Ex) مثلثی با مساحت ۶ واحد مربع مفروض است. اگر اندازه آضلع آن ۲ و ۶ واحد باشد:



(الف) چند مثلث با این خاصیت می توان رسم کرد؟  
 $\theta = \frac{\pi}{6}$   
 $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$  گشت می توان رسم کرد

(ب) اندازه ضلع سوم کدام می توان باشد؟

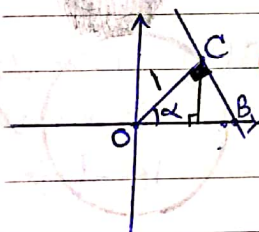
$$a^2 = 2^2 + 6^2 - 2(2)(6)\cos\theta \Rightarrow a^2 = 4 + 36 - 24(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow a^2 = 40 \pm 12\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{40 \pm 12\sqrt{3}}$$



نکته: در کاربرد مثلث سینوسی ها چه حاده و چه منفرجه همیشه ولی کسینوس ها در ربع اول زاویه حاده کسینوس مثبت ولی در ربع دوم زاویه منفرجه کسینوس منفی است.

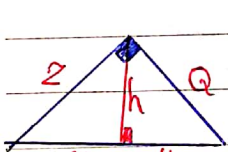
حل المسائل مثلثات

(Ex) در دایره مثلثاتی زیر اندازه BO همواره کدام است؟ (CB برداریه میاس است)



شعاع ۱

$$r^2 = OA \times OB \Rightarrow 1 = \cos\alpha \cdot OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos\alpha}$$



$$\begin{cases} z^2 = x(x+y) \\ y^2 = y(x+y) \\ h^2 = x \cdot y \end{cases}$$

پارادوکس و نکته

(Ex) دور مثال بالا BC کدام است؟

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + BC^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = BC^2$$

$$\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = BC^2 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = BC^2 \Rightarrow \tan\alpha = BC$$

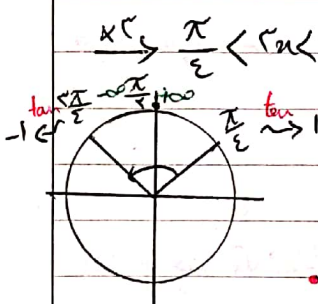
(Ex) اگر  $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$  حاصل عبارت  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$  کدام است؟

چه حوس زاویه  $\frac{3\pi}{4} \rightarrow (-1) + (-1) = -2$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



Ex) اگر  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  و  $\tan^2 \alpha = \frac{m-1}{2}$  در این صورت حدود  $m$  کدام است؟



$$\begin{cases} \tan^2 \alpha > 1 \\ \tan^2 \alpha < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{2} > 1 \\ \frac{m-1}{2} < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 2 \\ m-1 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases}$$

نکته سوال: در این سوال  $\tan^2$  را از لحاظ حد باید حساب کنیم پس  $\tan^2 = \pm$

Ex) حاصل عبارت  $\sqrt{2} \cos(\frac{-\epsilon\pi}{\epsilon}) + \tan(\frac{\epsilon\pi}{\epsilon}) + \epsilon \cot(\frac{-\epsilon\pi}{\epsilon})$  کدام است؟

$$\frac{\epsilon\pi}{\epsilon} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{\epsilon\pi + \pi}{\epsilon} = \frac{11\pi + \pi}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\pi + \pi}{\epsilon}$$

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{\epsilon} + \tan \frac{\pi}{\epsilon} - \epsilon \cot \frac{\pi}{\epsilon} \Rightarrow -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (1) - \epsilon(1) \Rightarrow -2$$

Ex) از تساوی  $2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 2$  مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

$$\frac{-2 \sin \alpha + \cos \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

Ex) حاصل  $\cos \frac{\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{2\pi}{\sqrt{v}} + \dots + \cos \frac{9\pi}{\sqrt{v}}$  کدام است؟

$$\cos \frac{\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{2\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{3\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{4\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{5\pi}{\sqrt{v}} + \cos \frac{6\pi}{\sqrt{v}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{v}} + \frac{4\pi}{\sqrt{v}} = \frac{5\pi}{\sqrt{v}} = \pi$$

حاصل صفر  $\Rightarrow$  قرینه  $\Rightarrow$  لغت هانم

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

نکته سوال: تساعری که پشت هر جمع معمولاً جمع آنها 90 یا 180 می شوند.

Ex) اگر برای همه مقادیر  $x$  رابطه  $2 \sin x + \sqrt{5} \cos x = A \sin(x + \theta)$  برقرار است؟

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow 2(0) + \sqrt{5}(1) = A \sin \theta \Rightarrow \sqrt{5} = A \sin \theta \\ x=\frac{\pi}{2} &\rightarrow 2(1) + \sqrt{5}(0) = A \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \Rightarrow A \cos \theta = 2 \Rightarrow 4 = A^2 \Rightarrow A = \pm 2 \end{aligned}$$

روش تستی خصوصاً تست آخر صفحه قبل: ضرب ما را کنار هم قرار داده و فاکتورس را اعمال می کنیم؟

$$2 + \sqrt{5} = A \Rightarrow 2 + 5 = A^2 \Rightarrow 9 = A^2 \Rightarrow A = \pm 3$$

(Ex) هر دو این عبارت  $3 - 2 \sin x$  کدام است؟

$$y = |5(1) - 2| = 2 \Rightarrow \min$$

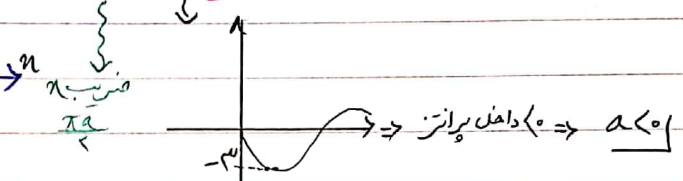
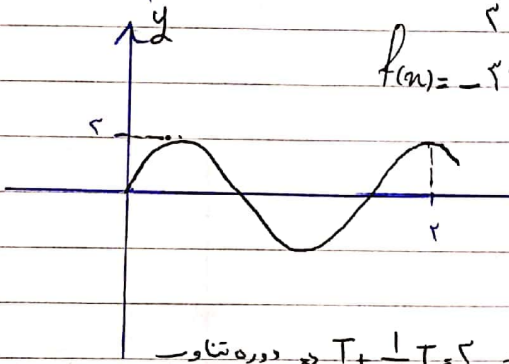
- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۸ (۳)

$$y = |5(-1) - 2| = 7 \Rightarrow \max \checkmark$$

(Ex) نمودار روبرو سمتی از تابع  $f(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

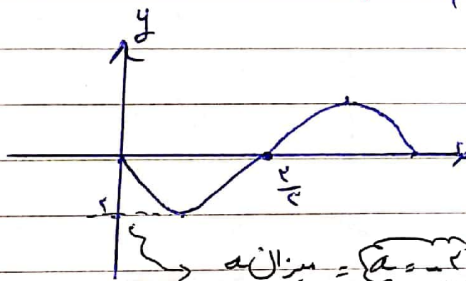
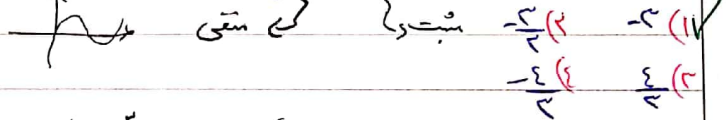
$$f(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$$

- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)



$$T + \frac{1}{4}T = 2 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 2 \Rightarrow T = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi a}{5}} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{2}{|a|} = \frac{1}{5} \Rightarrow |a| = 10 \Rightarrow a = 10$$

(Ex) اگر نمودار تابع  $y = a \sin(bx + c)$  به صورت زیر باشد مقدار  $a$  کدام است؟

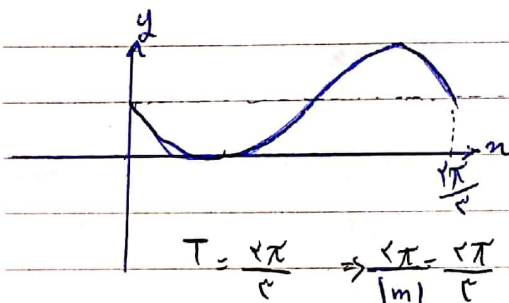


$$T = \frac{4}{b} \Rightarrow T = \frac{4}{2} \Rightarrow T = 2$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pi$$

(Ex) شکل زیر سمتی از نمودار  $y = a \sin(bx + c)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- صفر (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)



$$T = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \sin(2 \times \frac{\pi}{4}) = 1 - \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$$

پایان فصل دوم... محمد دده بیگی