به نام او،

صفر تا صد حسابان کنکور (۹۶لا)، مقدمات حسابان ۲

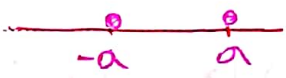
خواص اصلی قدر مطلق،

① $|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$

Ex) $A = \underbrace{|\sqrt{2}-1|}_{+} + \underbrace{|\sqrt{2}+3|}_{-} \Rightarrow A = +(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+3) \longrightarrow A = 2$

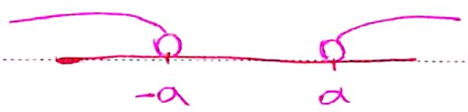
② $|u| = a \xrightarrow{a \geq 0} \begin{cases} u = a \\ u = -a \end{cases}$

Ex) $|3x-5| = 7 \begin{cases} \longrightarrow 3x-5 = 7 \longrightarrow x = 4 \\ \longrightarrow 3x-5 = -7 \longrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$



$|u| < a \longrightarrow -a < u < a$

$|u| \geq a \begin{cases} u \geq a \\ u \leq -a \end{cases}$



Ex) $|3x-5| < 2 \longrightarrow -2 < 3x-5 < 2 \longrightarrow 1 < x < \frac{7}{3}$

Ex) $|2x+1| \geq 5 \longrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 5 \longrightarrow x \geq 2 \\ 2x+1 \leq -5 \longrightarrow x \leq -3 \end{cases}$

Ex) $|2x-3| = 0 \longrightarrow 2x-3 = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2}$

Ex) $|2x-3| \geq -3 \longrightarrow$ قدر مطلق همیشه از اعداد منفی بیشتر است

$x \in \mathbb{R}$

Ex) $|2x-3| < -3 \longrightarrow$ با توجه به نکته‌ی بالا چنین چیزی وجود ندارد $x \in \varnothing$

Ex) $|2x-3| \leq 0 \longrightarrow$ تنها امکان، $2x-3 = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2}$

Ex) $|2x-3| > 0 \longrightarrow$ این همیشگی است اما چون مساوی با صفر را ندارد از آن کم می‌کنیم

$x \in \mathbb{R}$ $\quad 2x-3 \neq 0 \longrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

Ex) نامعادله را حل کنید

$$\frac{1}{|2x-5|} > 3$$

$$|2x-5| < \frac{1}{3} \longrightarrow -\frac{1}{3} < 2x-5 < \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{14}{3} < 2x < \frac{16}{3} \to \frac{7}{3} < x < \frac{8}{3}$$

Ex) معادله را حل کنید

$$2x + |x-3| = 5 \qquad x-3=0 \to x=3$$

x	$x<3$	3	$x\geq 3$
$x-3$	$-$	0	$+$
حل	$2x-x+3=5 \to x=2$ ✓		$2x+x-3=5 \to x=\frac{8}{3}=2/66$ ✗

Ex) نامعادله را حل کنید

$$2|x| + |x-3| < 7$$

0 ، 3

x	$x \leq 0$	0	$0 \leq x < 3$	3	$x \geq 3$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
حل	$-2x-x+3<7$ $-3x<4$ $x > -\frac{4}{3}$ $(-\frac{4}{3}, 0]$		$2x-x+3<7$ $x<4$ $[0,3]$		$2x+x-3<7$ $3x<10$ $x<\frac{10}{3}$ $[3, \frac{10}{3})$

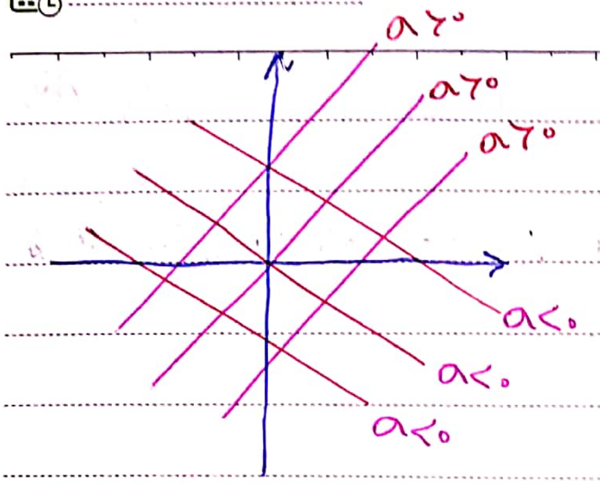
همگی اجتماع: $(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$

مرور توابع :

① تابع درجه یک : $y = ax + b$

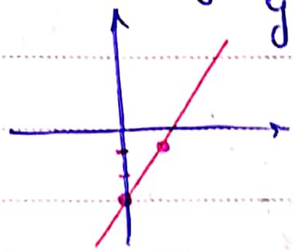
شیب

عرض از مبدا



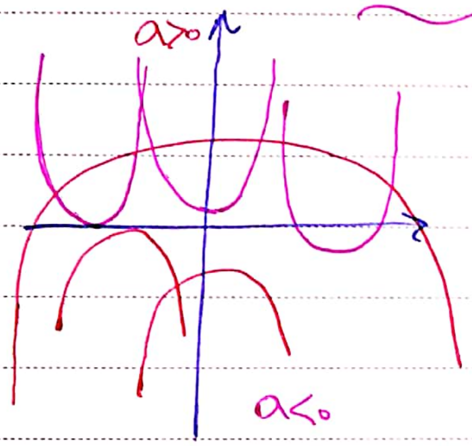
Ex) $2x - 3 = y$

x	0	1
y	-3	-1



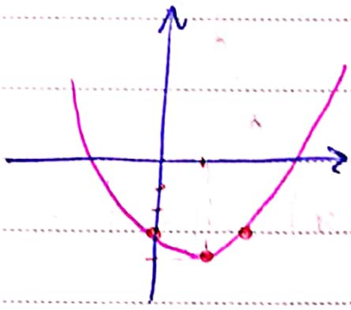
② تابع درجه دو $y = ax^2 + bx + c$

مهم ترین نقطه راس است $\longrightarrow x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} \longrightarrow$ راس مشخص شود



Ex) $y = x^2 - 2x - 3$ $\quad x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

x	0	1	2
y	-3	-4	-3



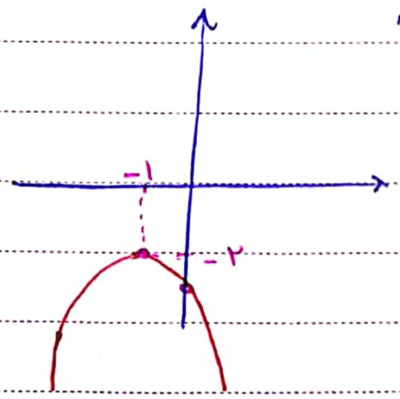
★ فرم کانونی : $y = K(x-\alpha)^2 + \beta$

راس $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad K > 0$ رو به بالا

$K < 0$ رو به پایین

Ex) $y = -(x+1)^2 - 2 \longrightarrow S\begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}$

$x = 0 \longrightarrow y = -3$



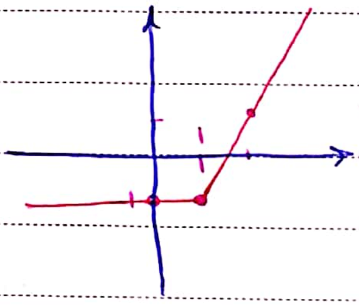
۳) توابع درجه یک قدر مطلق دار

★ فرم خطی دارند

★ مهم‌ترین نقاط (محل شکستگی ها) در ریشه ها قدر مطلق هستند

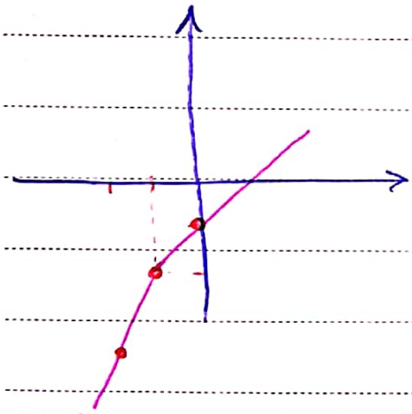
Ex) $y = |x-1| + x - 2$

x	0	1	2
y	-1	-1	1



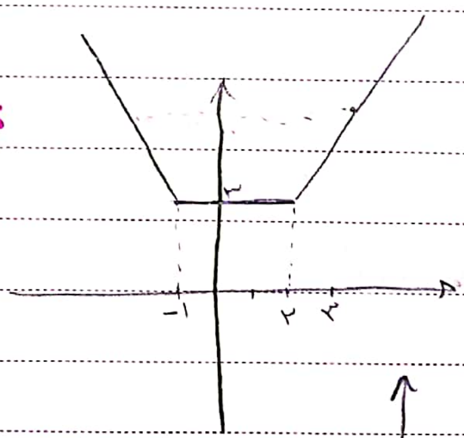
Ex) $y = 2x - |x+1|$

x	-2	-1	0
y	-5	-2	-1



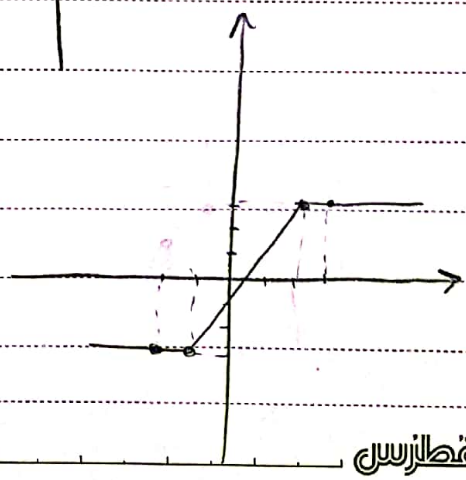
Ex) $y = |x+1| + |x-2|$ فرم گلدانی

x	-2	-1	2	3
y	5	3	3	5



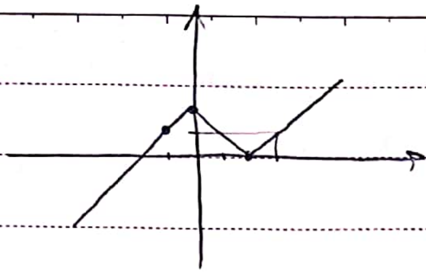
Ex) $y = |x+1| - |x-2|$ فرم آبشاری

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3



Ex) $y = x + |x-2| - |x|$

x	-۱	۰	۲	۳
y	۱	۲	۰	۱



فصل اول، تابع

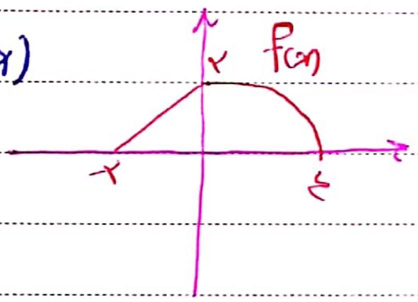
درس اول، تبدیل نمودار توابع

جدول تغییرات در نمودارها:

$f(x)$	تابع اولیه
$f(x+a)$	انتقال در راستا محور x
$f(x)+a$	انتقال در راستا محور y
$f(ax)$	انبساط یا انقباض در راستا محور x
$af(x)$	انبساط یا انقباض در راستا محور y

جمله‌ی تکمیلی: کار با x مخالف، کار با y موافق

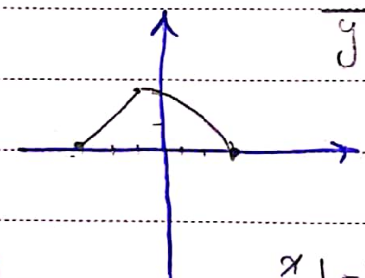
Ex)



x	-۲	۰	۴
y	۰	۲	۰

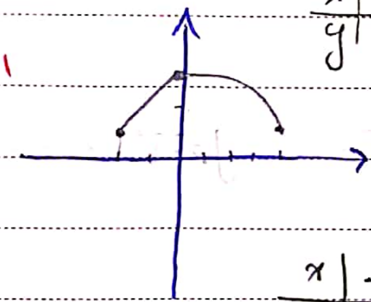
$f(x+1)$

x	-۳	-۱	۳
y	۰	۲	۰



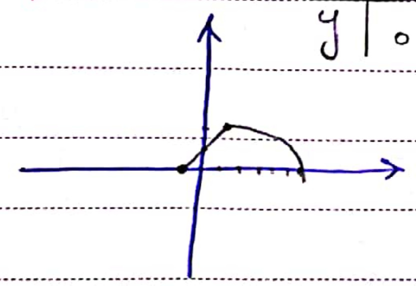
$f(x)+1$

x	-۲	۰	۴
y	۱	۳	۱



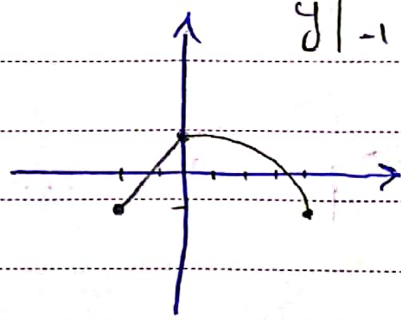
$f(x-1)$

x	-۱	۱	۵
y	۰	۲	۰

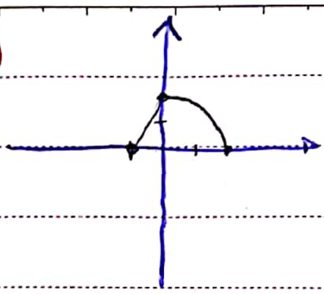


$f(x)-1$

x	-۲	۰	۴
y	-۱	۱	-۱

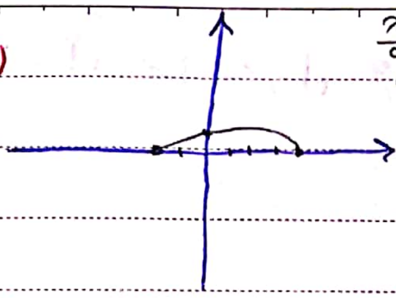


$f(2x)$



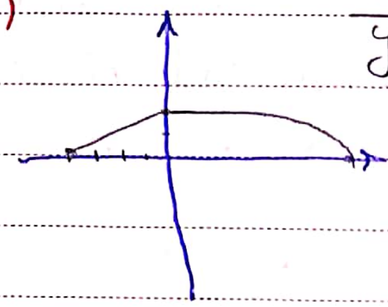
x	-1	0	2
y	0	2	0

$\frac{1}{2}f(x)$



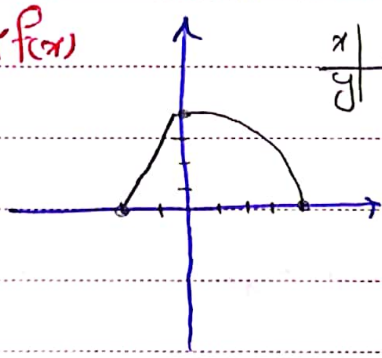
x	-2	0	4
y	0	1	0

$f(\frac{x}{2})$



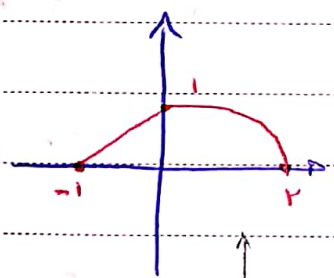
x	-4	0	8
y	0	2	0

$2f(x)$



x	-2	0	4
y	0	4	0

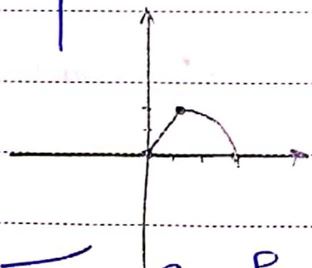
Ex) تابع f در زیر رسم شده است، نمودار $g(x)=2f(x-1)$ کدام است؟



x	-1	0	2
y	0	1	0

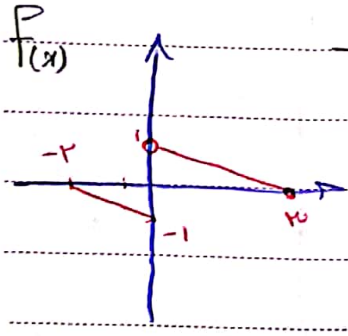
$g(x)$:

x	0	1	3
y	0	2	0



Ex) نمودار f در زیر رسم شده است، نمودار $g(x)=f(-x)+1$ را رسم کنید:

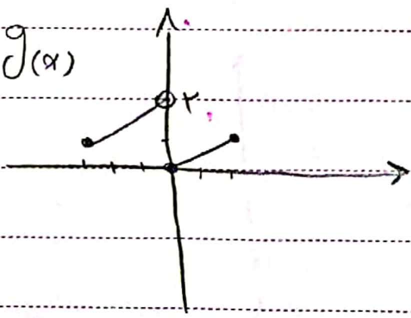
$f(x)$



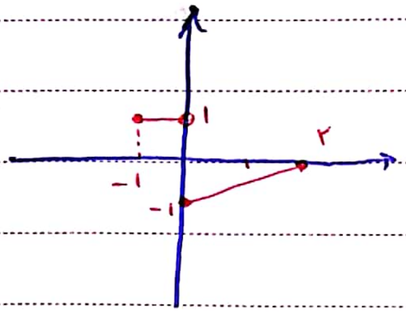
x	-2	0	0	3
y	0	-1	1	0

x	2	0	0	-3
y	1	0	2	1

$g(x)$

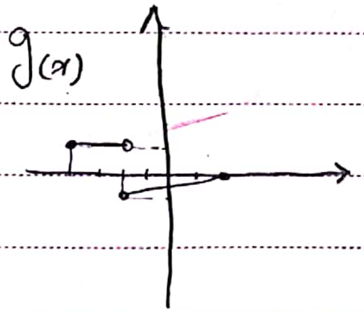


Ex) نمودار $f(x)$ رسم شده است ، نمودار $g(x)=f(\frac{x}{2}+1)$ کدام است؟

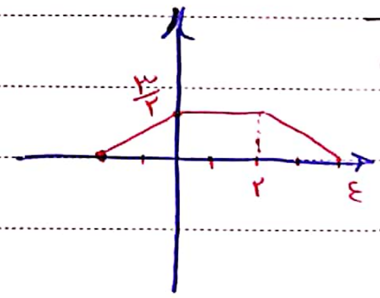


x	-1	0	0	2
y	1	1	-1	0

x	-4	-2	-2	2
y	1	1	-1	0

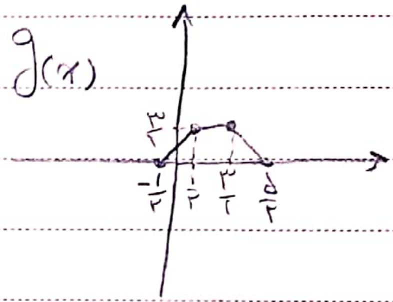


Ex) نمودار $f(x)$ در زیر رسم شده است ، نمودار $g(x)=f(2x-1)$ کدام است؟

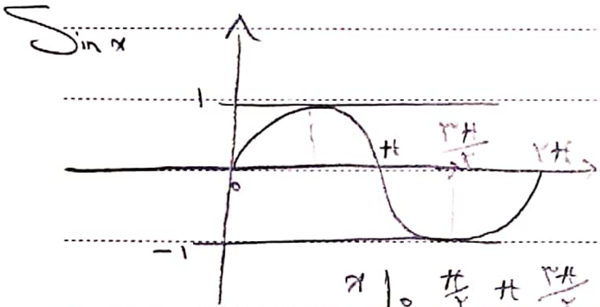


x	-2	0	2	4
y	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0



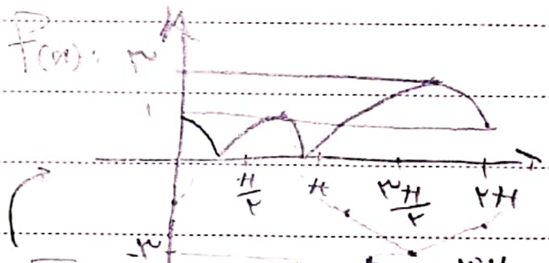
Ex) تابع $f(x)=|2\sin x-1|$ در دامنه $0\leq x\leq 2\pi$ را رسم کنید



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

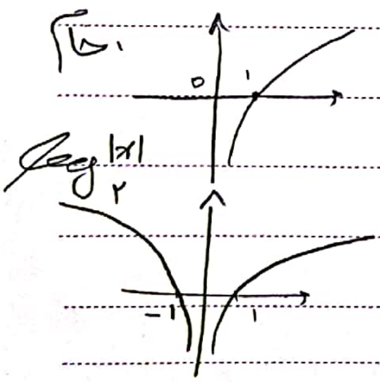
$\longrightarrow 2\sin x-1$

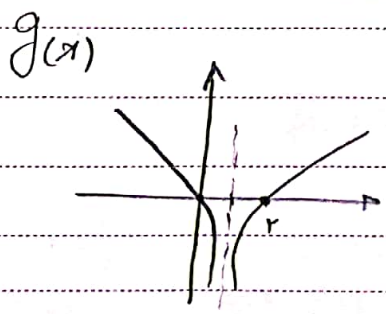
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	-1	-3	-1



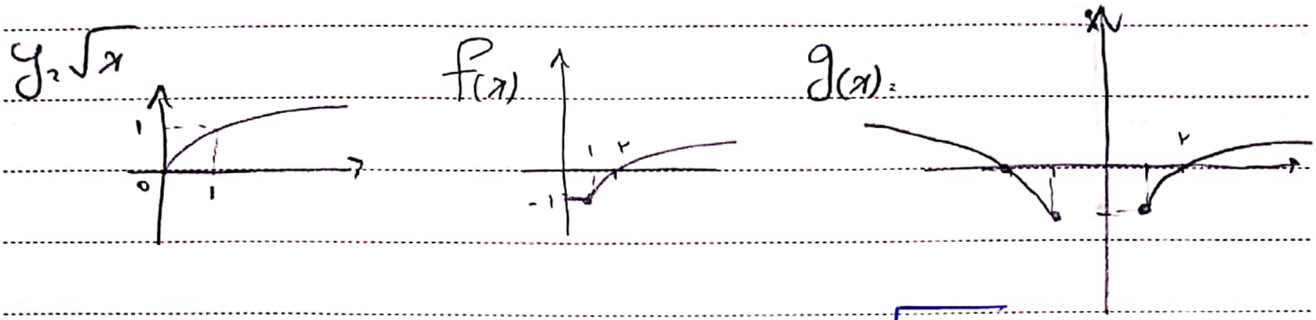
Ex) تابع $f(x)=\log_2 |x|$ را رسم کنید سپس تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم کنید.

حالت ۱ $\longleftarrow$ $y=\log_2 x$

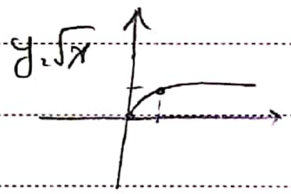




Ex) نمودار $f(x)=\sqrt{x-1}-1$ و سپس نمودار $g(x)=f(|x|)$ را رسم کنید.



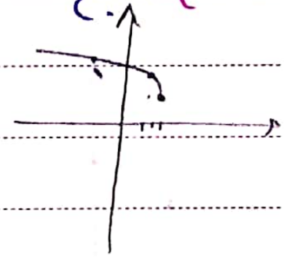
Ex) تابع $f(x)=\sqrt{-2x+4}+1$ و سپس تابع $g(x)=f(|x|)$ را رسم کنید.

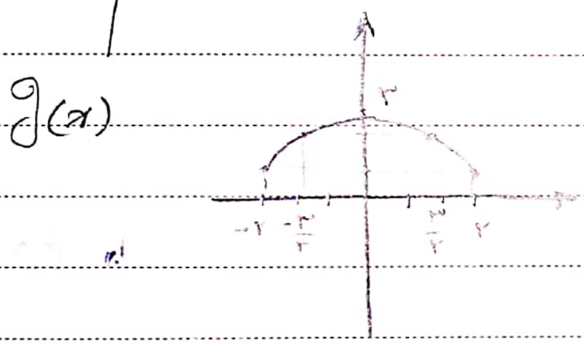


x	0	1
y	0	1

$\longrightarrow f(x):$

x	2	$\frac{3}{2}$
y	1	2





آشنایی مقدماتی با مشتق چندجمله ای:

Ex) $y = x^4 - 2x^5 + 4x^3 \longrightarrow y' = 4x^3 - 10x^4 + 12x^2$

Ex) $y = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 5 \longrightarrow y' = 6x^2 - 8x + 6$

★ اعدادی که بدون x هستند، کلاً در مشتق حساب نمی‌کنیم ← مشتق آنها صفر است.

Ex) $y = -3x^3 + 4x^2 - 6x - 9 \longrightarrow y' = -9x^2 + 8x - 6$

آشنایی با توابع درجه سوم:

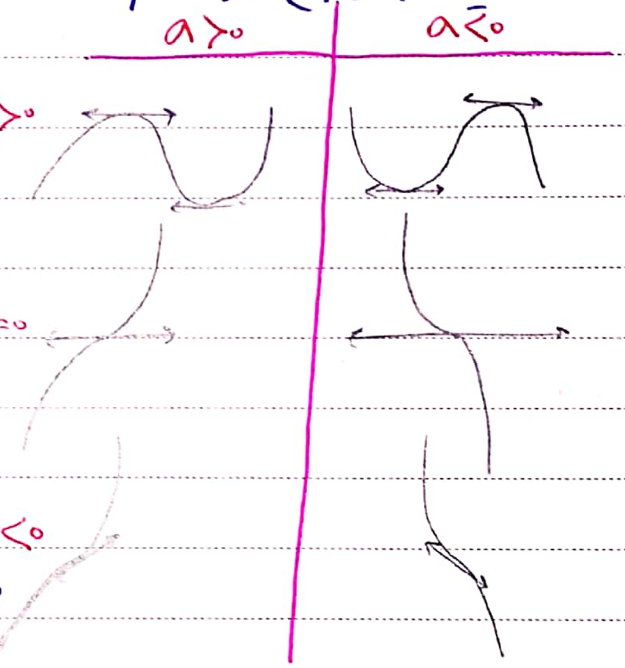
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a<0$ | $a>0$

$\Delta>0$ مشتق: مدل ۸۷ یا برعکس، دوتا شیب صفر دارد

$\Delta=0$ مشتق: مدل نُم یا برعکس، یک شیب صفر دارد

$\Delta<0$ مشتق: مدل لُر یا برعکس، شیب صفر ندارد

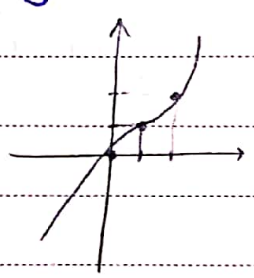


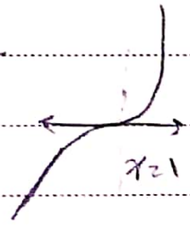
Ex) $y = x^3 - 3x^2 + 3x \longrightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0$ → $x=1$ ، $x=1$

$\Delta=0$، دارای یک ریشه

مدل نُم $a>0$

x	0	1	2
y	0	1	2



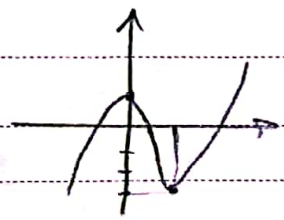


$x=1$

Ex) $y = x^3 - 3x^2 + 1 \longrightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \longrightarrow 3x(x-2) = 0$ → $x=2$ ، $x=0$

x	0	2
y	1	-3

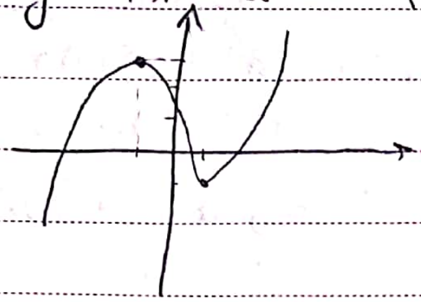
$\Delta>0$ مدل ۸۷، $a>0$



Ex) $y=x^3-3x+1 \longrightarrow y'=3x^2-3=0 \longrightarrow 3(x^2-1)=0$ → $x=1$ / $x=-1$ دو ریشه

مدل ۸۷ $a>0$

x	-1	1
y	3	-1

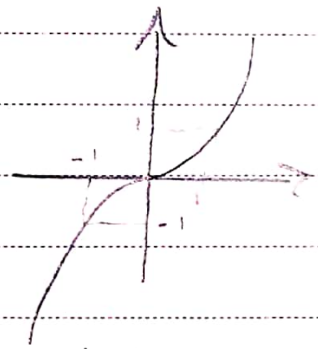


Ex) $y=x^3+3x+1 \longrightarrow y'=3x^2+3 \longrightarrow 3(x^2+1)=0$ → ریشه ندارد که مشتق صفر ندارد

مدل $a>0$ که

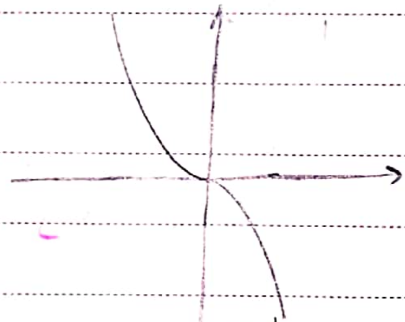
★ دو تا مدل ساده و معروف کم:

$y=x^3$



x	-1	0	1
y	-1	0	1

$y=-x^3$



x	-1	0	1
y	1	0	-1

Ex) تابع $f(x)=(x-1)^3-1$ را رسم کنید.

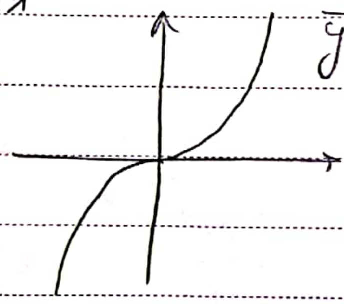
$y=x^3$

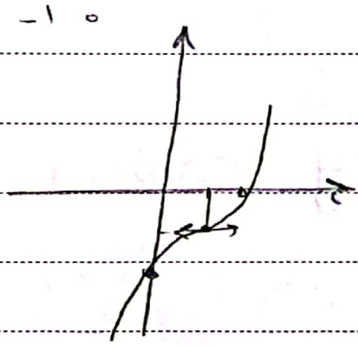
x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\Rightarrow$

x	0	1	2
y	-2	-1	0

$f(x)=$

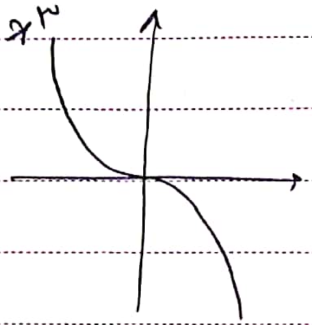




Ex) $f(x) = -(x+1)^3 + 1$ رسم

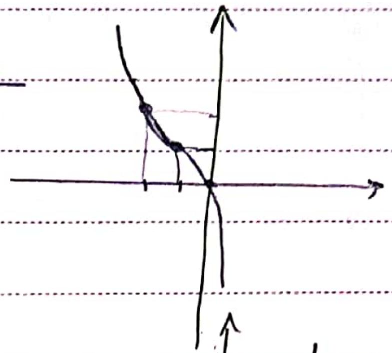
حل: $y = -x^3$

x	-1	0	1
y	1	0	-1

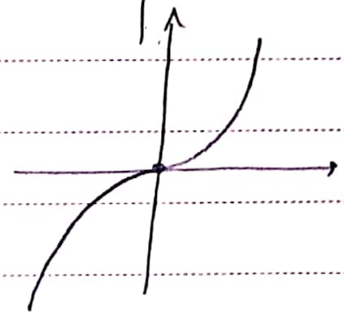


$f(x)$:

x	-2	-1	0
y	2	1	0

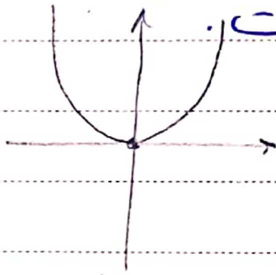


Ex) $f(x) = x|x|$ رسم ، $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



★ ظاهر تابع شبیه لُم است ولی لُم نیست زیرا انحنای x^2 با x^3 متفاوت است.

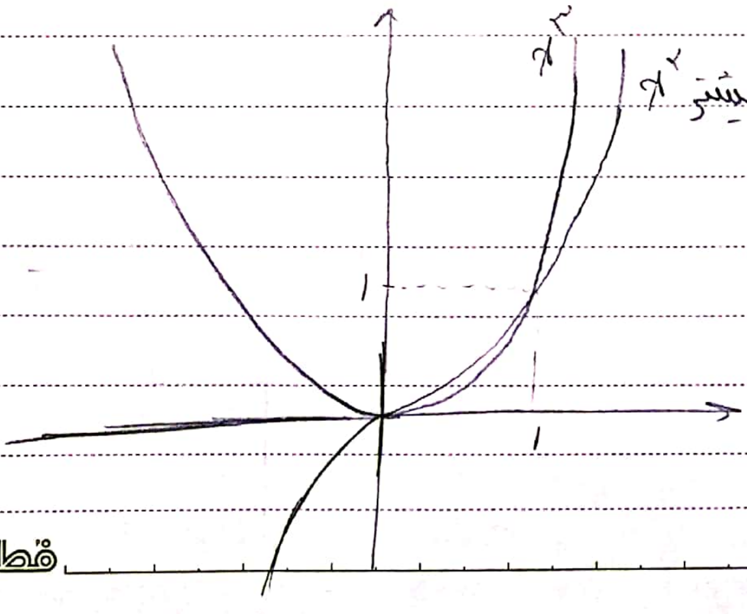
Ex) $f(x) = x^2|x|$ $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$



★ ظاهر تابع شبیه سهمی است ولی سهمی نیست.

★ بعضی از توابع مثل توابع بالا ، قدر مطلق دارند ولی شکستگی ندارند.

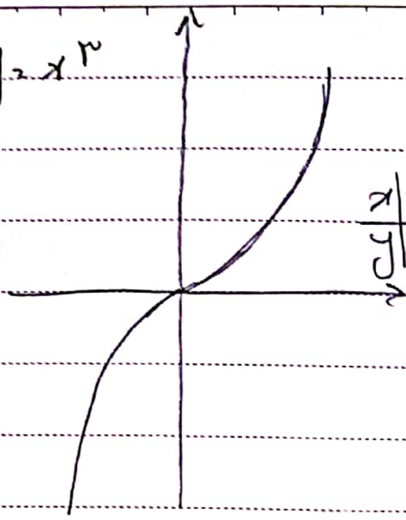
Ex) توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



★ بعد از عبور از یک رشد x^3 بیشتر از x^2 است.

Ex تابع $f(x)=(|x|-1)^3-1$ را رسم کنید:

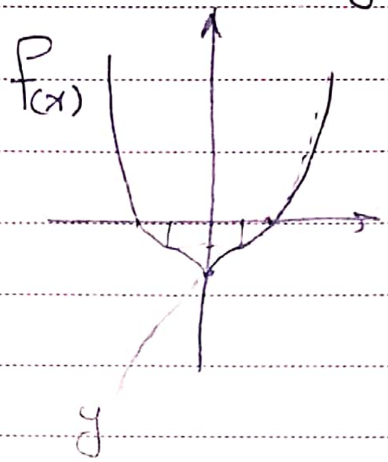
$y=x^3$



x	-1	0	1
y	-1	0	1

$y=(x-1)^3-1$

x	0	1	2
y	-2	-1	0



«یکنوایی توابع»: ★ تابعی یکنواست که یک رفتار صعودی یا نزولی داشته باشد.

با افزایش x، مقدار y افزایش پیدا کند

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

★ تابع صعودی

★ تابع اکیداً صعودی

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

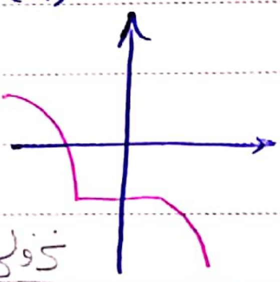
با افزایش x، مقدار y کاهش پیدا کند

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

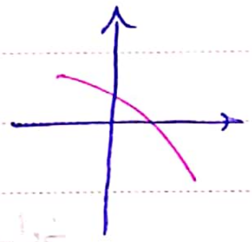
★ تابع نزولی

★ تابع اکیداً نزولی

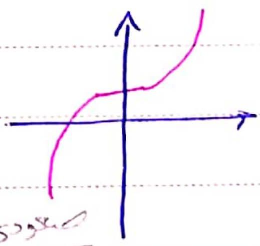
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



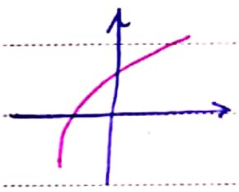
نزولی
یکنوا
غ اکیداً



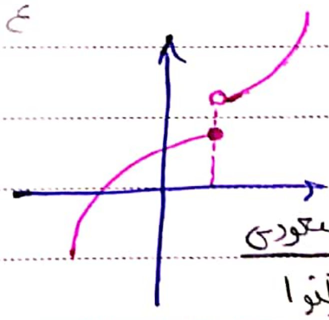
نزولی
یکنوا
اکیداً



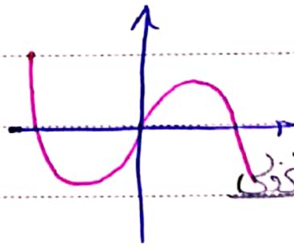
صعودی
یکنوا
غیر اکیداً



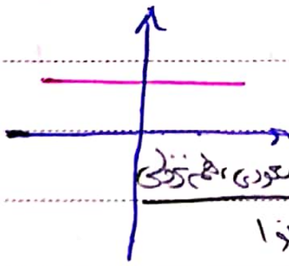
صعودی
یکنوا
اکیداً



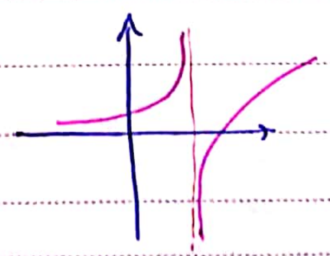
صعودی
یکنوا
اکیداً



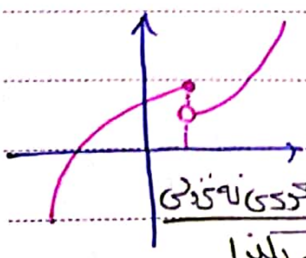
نه صعودی نه نزولی
غ یکنوا
غ اکیداً



هم صعودی هم نزولی
یکنوا
غ اکیداً



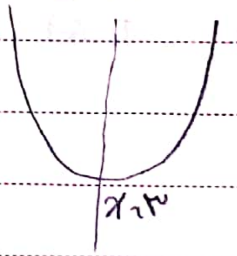
نه صعودی نه نزولی
غ یکنوا
غ اکیداً



نه صعودی نه نزولی
غ یکنوا
غ اکیداً

Ex) بررسی تابع $f(x)=x^2-4x+1$ از نظر یکنوایی

x راس $= \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$



نه صعودی نه نزولی → غیر یکنوا

اکیداً صعودی $(2,+\infty)$

یا $(4,5)$

پس اکیداً یکنوا

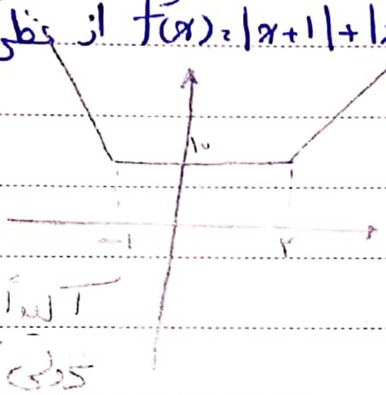
اکیداً نزولی $(-\infty,2)$

یا $(-4,0)$

پس اکیداً یکنوا

Ex) بررسی تابع $f(x)=|x+1|+|x-2|$ از نظر یکنوایی

x	-2	-1	2	3
y	5	3	3	5



نه صعودی نه نزولی

غیر یکنوا

صعودی - یکنوا $(-1,+\infty)$

اکیداً صعودی $(2,+\infty)$

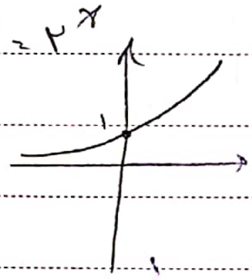
اکیداً یکنوا

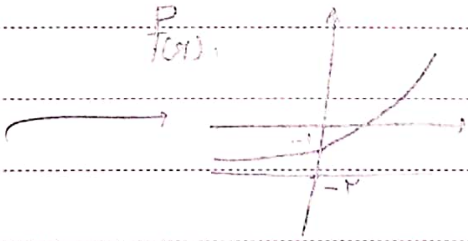
$(-\infty,-1)$ اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا

$(-\infty,2)$: نزولی و یکنوا

Ex) بررسی یکنوایی تابع $f(x)=2^x-2$

$y=2^x$



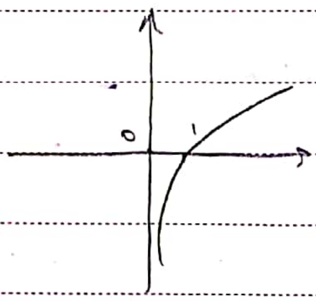


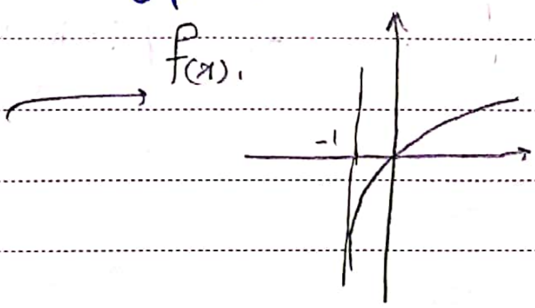
در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است

و اکیداً یکنوا است

Ex) بررسی یکنوایی تابع $f(x)=\log_2(x+1)$

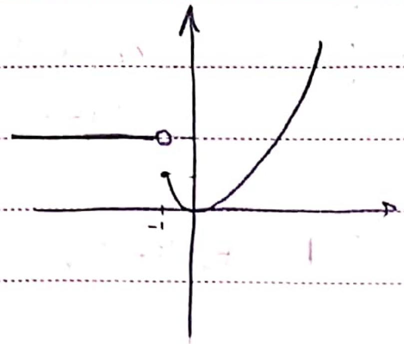
$y=\log_2 x$





در دامنه $(-1,+\infty)$ اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا

Ex) در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq -1 \\ 2 & x<-1\end{cases}$ بررسی یکنوایی؟

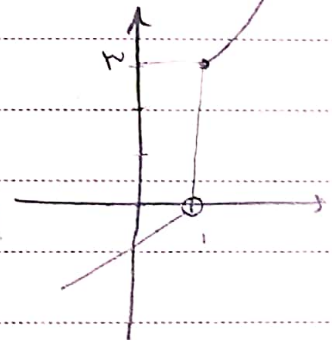


نزولی و یکنوا $(-\infty,0)$

اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا $(0,+\infty)$

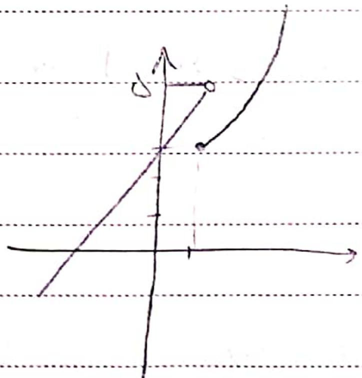
در $\mathbb{R}$ غیر یکنوا ← نه صعودی نه نزولی

Ex) در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ x-1 & x<1\end{cases}$ بررسی یکنوایی؟



در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و یکنوا

Ex) بررسی یکنوایی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 1 \\ 2x+3 & x<1\end{cases}$



اکیداً صعودی و یکنوا $(-\infty,1)$

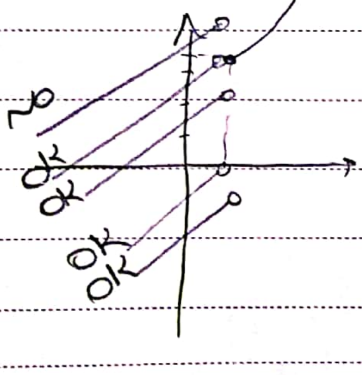
اکیداً صعودی و یکنوا $(1,+\infty)$

در $\mathbb{R}$ تابع یکنوا نیست

نه صعودی نه نزولی

Ex✓) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x+k & x<1\end{cases}$ یکنوا است، حدود k چقدر است؟

$x=1$: 4 ، $2+k$

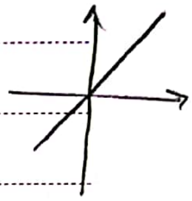


$2+k\leq 4 \longrightarrow \boxed{k\leq 2}$

Ex) اگر $f(x)=(\sqrt{2})^x$, $g(x)=\log_4^x$ ، تابع $(gof)(x)$ در $\mathbb{R}$ چگونه است؟

$(gof)(x)=g(f(x))=\log_4^{(\sqrt2)^x}=\log_{2^2}^{2^{\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{x}{2}}{2}=\frac{x}{4} \longrightarrow y=\frac14 x$

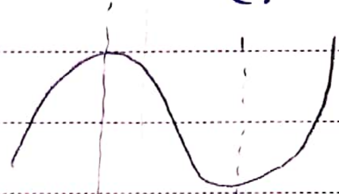
صعودی



Ex) تابع $f(x)=2x^3-9x^2$ در کدام بازه نزولی است؟

$f'(x)=6x^2-18x=0$ → $x=3$ ، ۲ تا شیب صفر دارد

→ $x=0$ ، ۸۷ مدل ← $a>0$



$(0,3) \longleftarrow x=0$ ، $x=3$

Ex) به ازای کدام مقادیر K تابع $f(x)=x^3-2x^2+Kx-1$ یکنواست؟

★ وقتی تابع درجه ۳ یکنواست، اصلاً نمی‌تواند مدل ۸۷ یا عکس باشد

$f'(x)=3x^2-4x+K=0 \xrightarrow{\Delta\le0} 16-4(3)(K)\le0 \to K\ge\frac{4}{3}$

Ex) به ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x)=ax^3+3x^2-4x+2$ صعودی اکید است؟

$f'(x)=3ax+6x-4=0 \xrightarrow{\Delta\le0} 36-4(3a)(-4)\le0 \to 48a\le-36$

$\to a\le-\frac{3}{4}$ از طرفی ← $a>0$

اشتراک → $\emptyset \to a\in\emptyset$

Ex) تابع $f=\{(-1,7)(3,5)(2,2K)(5,K)\}$ نزولی است ، مقادیر K را بدست آورید.

مرتب بر حسب x ، $f=\{(-1,7)(2,2K)(3,5)(5,K)\}$

$\to 7>2K>5>K$

$\frac{5}{2}<K<\frac{7}{2}$

اشتراک → $\frac{5}{2}<K<\frac{7}{2}$

تابع وارون

* تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد
* برای بررسی یک به یک بودن، یکنوایی بررسی می شود.
اکیداً

* تابع وارون f^{-1}، جای طول و عرض نقاط را عوض می کند یعنی:

$A\Big|{}^{a}_{b} \longleftrightarrow A'\Big|{}^{b}_{a}$

روی تابع — روی تابع وارون

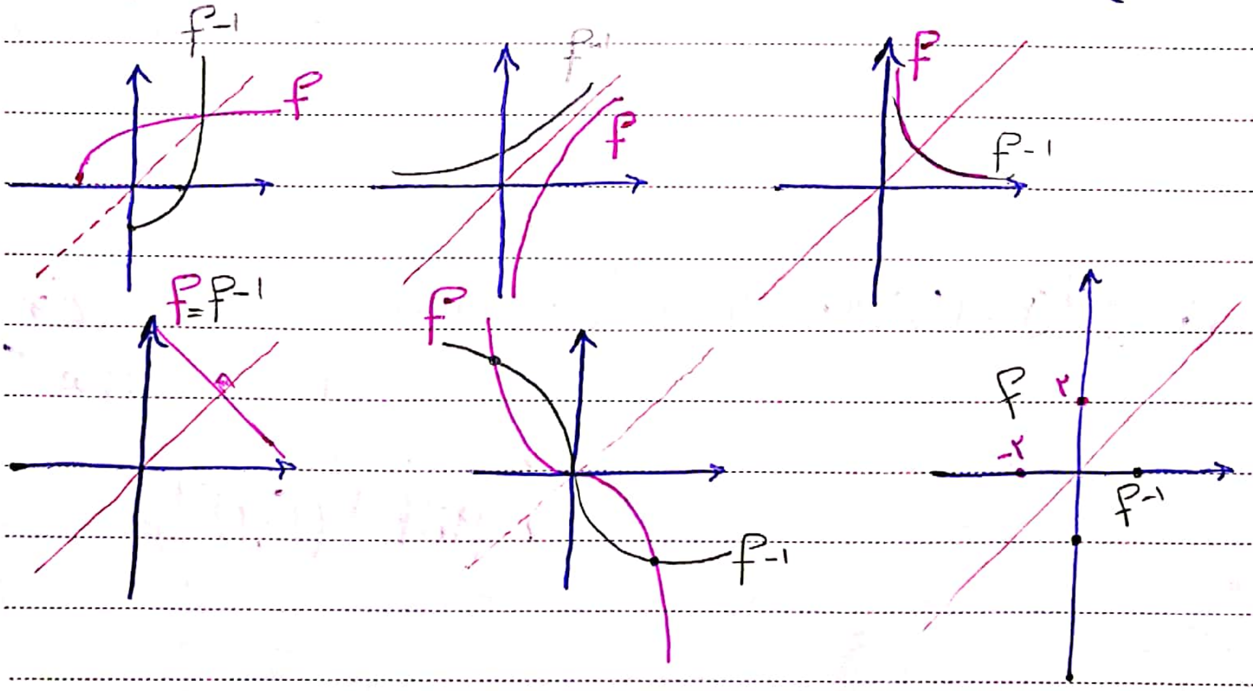
* دامنه و برد تابع وارون:

$$\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{cases}$$

* یافتن تابع وارون: x را تنها کن، جای y، مقدار x قرار بده

Ex) $f(x) = 2x^3 - 4 \longrightarrow y = 2x^3 - 4 \longrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{y+4}{2}} \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{2}}$

* نمودار تابع وارون: قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم)



★ رایج‌ترین حالت برخورد تابع وارون و تابع اصلی روی خط $y=x$ است.

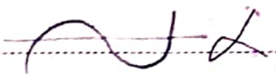
★ در برخی موارد تابع بر روی تابع وارون منطبق است

Ex) کدام تابع زیر در $\mathbb{R}$، یک به یک است؟

1) $f(x)=x^2-2x$ سهمی ✗ 2) $f(x)=[x]$ ✗

3) $f(x)=x^3-3x^2$ 4) $f(x)=x^3+x+1$

③ $f'(x)=3x^2-6x=0 \longrightarrow 3x(x-2)=0$ → $x=0$, $x=2$; $a>0$ مدل ۸۷ ✗

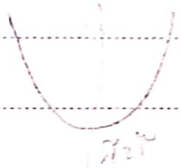


④ $f'(x)=3x^2+1=0 \longrightarrow x^2=-\frac{1}{3}$ ✗ ✓

Ex) تابع $f(x)=x^2-6x+3$ در بازه‌ی $[k,+\infty)$ یک به یک است، کمترین مقدار k کدام است؟

1) -1 2) 0 3) 2 4) 3

$x_{\text{راس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3$



$k_{min}=3$

Ex) تابع $f=\{(3,2)(a,5)(3,a^2-a)(b,2)(-1,4)\}$ یک به یک است، زوج‌های (a,b) کدام است؟

$a^2-a=2$ → $a=-1$ $\{(3,2)(-1,5)(b,2)(-1,4)\}$; $b=3$; $(-1,3)$

→ $a=2$ $\{(3,2)(2,5)(3,2)(b,2)(-1,4)\}$; $(2,3)$

Ex) اگر $f=\{(1,2)(2,3)(4,5)(3,4)\}$ و $g=\{(2,1)(3,2)(5,4)\}$ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۰)

$g^{-1}=\{(1,2)(2,3)(4,5)\}$

$f^{-1}=\{(2,1)(3,2)(5,4)(4,3)\}$

$g^{-1}(f^{-1}(x))=\{(2,2)(3,3)(5,5)\}$

$g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$

Ex) اگر $g=\{(2,5)(3,6)(1,4)(6,7)(8,1)\}$ و $f(x)=2x-5$ مفروض باشند

$(f^{-1}og)_{(a)}=4$ ، مقدار a کدام است؟ (سراسری خارج ۹۰)

$f^{-1}(g(a))=4 \longrightarrow g(a)=f(4) \longrightarrow g(a)=7 \longrightarrow a=4$

Ex) اگر $f(x)=x^3-3x$ $(x\geq 1)$ ، نمودارهای f و f^{-1} در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟ (سراسری ۸۸)

تابع و وارون روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند

$\longrightarrow x^3-3x=x \longrightarrow x(x^2-4)=0$

$x=0$ ✗

$x^2-4=0$ → $x=2$ ✓ ، $x=-2$ ✗

Ex) تابع وارون بیابید $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+4}$

$y=\dfrac{3x-1}{2x+4} \longrightarrow 2xy+4y=3x-1 \longrightarrow x(2y-3)=-4y-1$

$\longrightarrow x=\dfrac{-4y-1}{2y-3} \longrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{-4x-1}{2x-3}$

Ex) تابع وارون بیابید $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-3}$

$y=\dfrac{3x+4}{2x-3} \longrightarrow 2xy-3y=3x+4 \longrightarrow x(2y-3)=3y+4$

$\longrightarrow x=\dfrac{3y+4}{2y-3} \longrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3x+4}{2x-3}$

نکته: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

if: $a+d=0 \longrightarrow f=f^{-1}$

☆ وارون تابع خود تابع منطبق است

Ex) تابع وارون $f(x)=x^2-4x$ با شرط $x<2$ کدام است؟

$x_{راس} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \longrightarrow y = -4$

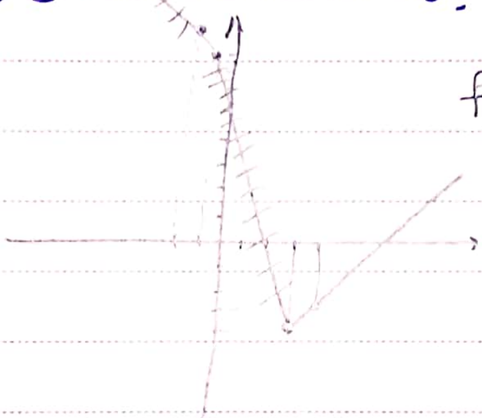
$y = x^2-4x \longrightarrow x^2-4x-y=0 \longrightarrow \Delta = 16-4(1)(-y) = 16+4y = 4(4+y)$

$x = \frac{4\pm 2\sqrt{4+y}}{2} \longrightarrow x = 2\pm\sqrt{4+y} \xrightarrow{شرط} x = 2-\sqrt{4+y}$

$\xrightarrow{2} f^{-1}(x) = 2-\sqrt{4+x}$

Ex) تابع $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ در یک بازه صعودی است، ضابطه تابع وارون در این بازه کدام است؟ (سراسری خ ۹۴)

x	-2	-1	3	4
y	9	8	-4	-3



$f(x)=(2x-6)-(x+1)$

$y=x-7$

$\longrightarrow f^{-1}(x)=x+7$

$R_f: x>-4 = D_{f^{-1}}$

Ex) ترکیب تابع، تابع وارون، تابعی همانی است:

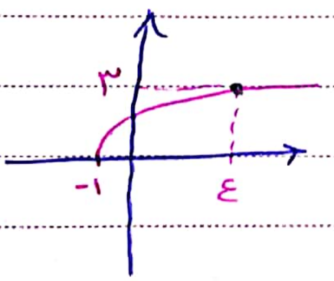
$(f^{-1}of)(x)=x$

$(fof^{-1})(x)=x$

$a \xrightarrow{} \boxed{f} \xrightarrow{} b \quad b \xrightarrow{} \boxed{f^{-1}} \xrightarrow{} a$

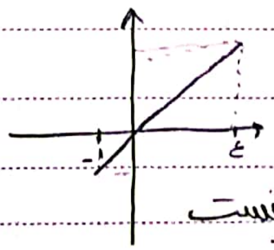
$b \xrightarrow{} \boxed{f^{-1}} \xrightarrow{} a \quad a \xrightarrow{} \boxed{f} \xrightarrow{} b$

Ex) تابع $f(x)$ رسم شده است، نمودار توابع $y_1=f^{-1}of$, $y_2=fof^{-1}$ را رسم کنید



$y_1: x\in D_f$

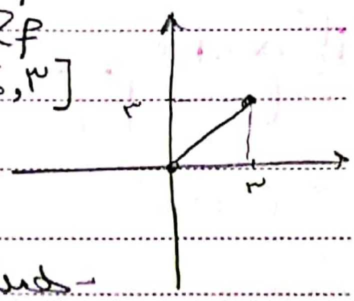
$x\in[-1,4]$



$y_2: x\in D_{f^{-1}}$

$x\in R_f$

$x\in[0,3]$



همیشه دامنه‌ی آنها برابر نیست

چهار عمل اصلی روی توابع ($\div$ ، $\times$ ، $-$ ، $+$) :

نکته: در اعمال اصلی هر دامنه، بر روی اشتراک دامنه‌ها است اما محاسبه بر روی عرض ها انجام می‌شود.

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$ } $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ } $D_{f.g} = D_f \cap D_g$

★ $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x)=0\}$

Ex) آنی

$f = \{(-4,13)(-1,7)(0,5)(\frac{5}{2},0)(3,-5)\}$

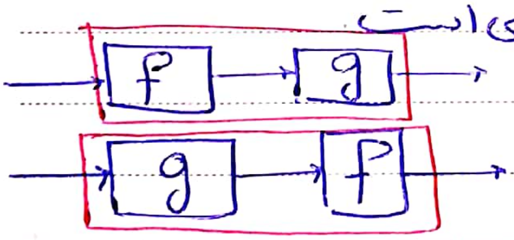
$g = \{(-6,-7)(-2,5)(0,-3)(3,0)(5,2)(9,4)\}$

توابع $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، fog و gof کدامند؟

$f+g = \{(-4,6)(0,2)(3,-5)\}$ $\quad \frac{f}{g} = \{(-4,-\frac{13}{7})(0,-\frac{5}{3})(3,\times)\}$

ترکیب توابع

خروجی یکی، ورودی دیگری است



$gof = g(f(x))$

$fog = f(g(x))$

$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g , g(x) \in D_f\}$, $D_{gof} = \{x \mid x \in D_f , f(x) \in D_g\}$

$fog = f(g(x)) = \{(3,5)\}$, $gof = g(f(x)) = \{(0,2)(\frac{5}{2},-3)\}$

Ex) آنی $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = \sqrt{2+x}$ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ و تابع $(f-g)(x)$ کدامند؟

$D_f : x-4 \geq 0 \longrightarrow x \geq 4 \longrightarrow D_f : [4,+\infty)$

$D_g : 2+x \geq 0 \longrightarrow x \geq -2 \longrightarrow D_g [-2,+\infty)$

$D_f \cap D_g : [4,+\infty)$ $\quad g(x) \neq 0 \longrightarrow \sqrt{2+x} \neq 0 \longrightarrow 2+x \neq 0 \longrightarrow x \neq -2$

$D_{f/g} : [4,+\infty)$ $\quad (\frac{f}{g})(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+2}}$

$D_{f-g} : [4,+\infty)$ $\quad (f-g)(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{2+x}$

Ex) اگر $f(x)=\sqrt{x+4}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ و $(f-g)(x)$ کدامند؟

$D_f=[-4,+\infty)$
$\Longrightarrow D_f\cap D_g=[-4,2]$ $\quad g(x)\neq 0 \longrightarrow -x+2\neq 0 \to x\neq 2$
$D_g=(-\infty,2]$

$D_{\frac{f}{g}}=[-4,2)$ $\quad (\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}$

$D_{f-g}=[-4,2]$ $\quad (f-g)(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}$

★ حواسمون باشه که بعضی اوقات ممکنه دو دامنه اشتراکی باهم نداشته باشند که در این زمان ممکنه گزینه ی ۴ ای باشد که می گویند تابع جدید قابل تشکیل نیست.

Ex) اگر $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$، دامنه تابع $(fog)(x)$ و ضابطه ی $(fog)(x)$ کدام است؟

$D_f=[4,+\infty)$ ، $D_g=(-\infty,2]$

$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g , g(x)\in D_f\}=\{x \mid \underbrace{x\in(-\infty,2]}_{\star} , \underbrace{\sqrt{2-x}\in[4,+\infty)}_{\text{محاسبه}}\}$

$\sqrt{2-x}\geq 4 \longrightarrow 2-x\geq 16 \longrightarrow \underbrace{x\leq -14}_{\star_2} \Rightarrow \star\cap\star_2 : D_{fog}=(-\infty,-14]$

$fog=\sqrt{\sqrt{2-x}-4}$

Ex) اگر $3f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$، تابع $f(x)$ کدام است؟

$x \downarrow \frac{1}{x}$
$\begin{cases} 3f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x \\ 2f(x)+3f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x} \end{cases}$

$f(x)=-\frac{\frac{6}{x}-9x}{5}$ $\quad f(\frac{1}{x})=\frac{\quad}{5}$

$f(x)=-\frac{6-9x^2}{5x} \longrightarrow f(x)=\frac{9x^2-6}{+5x}$

Ex) اگر $f(2x-1)=x^2+4x$، تابع $f(x)$ کدام است؟

$2x-1=t$

$2x=t+1$

$x=\frac{t+1}{2} \longrightarrow f(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+4\left(\frac{t+1}{2}\right) \longrightarrow f(t)=\frac{t^2+10t+9}{4}$

$\xrightarrow{t\to x} f(x)=\frac{x^2+10x+9}{4}$

Ex) اگر $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع $f(x)$ کدام است؟

$f(\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{t}) = (x+\frac{1}{x})^2 - 2(x)(\frac{1}{x}) \longrightarrow f(t) = t^2 - 2(1)$

$\longrightarrow f(x) = x^2 - 2$

Ex) اگر $g(x) = 2x-1$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

$f(2x-1) = \frac{x}{x-3} \longrightarrow f(3) = \frac{2}{-1} = -2$

$2x-1=3 \longrightarrow x=2$

Ex) اگر $f(x)+f(2) = 3x+2$ ، تابع $(fof)(x)$ ، محور عرض ها را در کدام عرض قطع می کند؟

$x=2 \longrightarrow f(2)+f(2) = 8 \longrightarrow f(2) = 4$

$\longrightarrow f(x)+4 = 3x+2 \longrightarrow f(x) = 3x-2$

$f(f(x)) = 3(3x-2)-2 = 9x-8 \xrightarrow{x=0} -8$

Ex) اگر $f(x) = x^2+x-2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ ، مجموع طول نقاطی از منحنی $(fog)(x)$ که در زیر محور x قرار گیرند، برای کدام بازه است؟

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$

$(fog)(x) < 0 \longrightarrow \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{2}(x-3) - 2 < 0 \xrightarrow{x \in}$

$(x-3)^2 + 2(x-3) - 8 < 0 \longrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$

$-1 , 5$

	-1		5	
$+$		$-$		$+$

$(-1,5)$

تساوی دو تابع:

حواست باشه:
- هم دامنه ها یکسان باشند
- هم ساده کاری ضوابط یکسان شوند

$D_f = D_g$, $f(x) = g(x)$ $\Longrightarrow f = g$

Ex) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}$, $g(x) = \sqrt{x(x-4)}$

$f(x) : \begin{cases} x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \to x \geq 4 \end{cases} \Big\} [4,+\infty)$

$g(x) : x(x-4) \geq 0 \Longrightarrow D_g : (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

x		0		4	
	+		−		+
	ج				ج

$D_f \neq D_g \Longrightarrow f \neq g$

Ex) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}$, $g(x) = \sqrt{x(4-x)}$

$f : \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow D_f : [0,4]$

$g : x(4-x) \geq 0 \Longrightarrow D_g : [0,4]$

x		0		4	
	−		+		−
			ج		

پس $f = g$

Ex) $f(x) = 2\log(x-1)$, $g(x) = \log(x-1)^2$

$f : x-1 > 0 \longrightarrow x > 1 : D_f : (1, +\infty)$

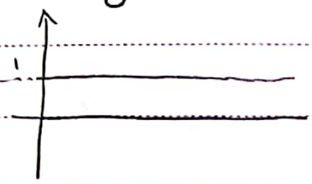
$g : \underbrace{(x-1)^2}_{\text{همواره } +} > 0 \longrightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$g_{(x)} = 1$, $f_{(x)} = \tan x . \cot x$ (Ex)

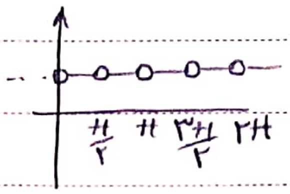
$D_g = \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}, \dots\}$

$D_f \neq D_g \Longrightarrow f \neq g$

g:



f:



★ مفهوم اولیه جزء صحیح

اولین عدد صحیح پشت سری:

$[2]=2 \quad [-1/4]=-2 \quad [2/3]=2$

$[-2/3]=-3 \quad [2/9]=2 \quad [-0/5]=-1$

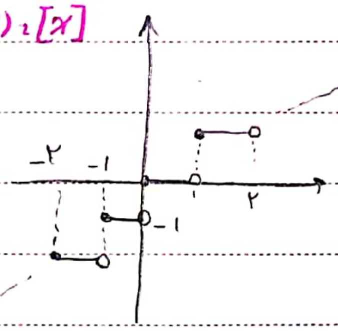
★ جدول مقادیر جزء صحیح:

u	$[u]$
$-2 \le u < -1$	-2
$-1 \le u < 0$	-1
$0 \le u < 1$	0
$1 \le u < 2$	1
$2 \le u < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

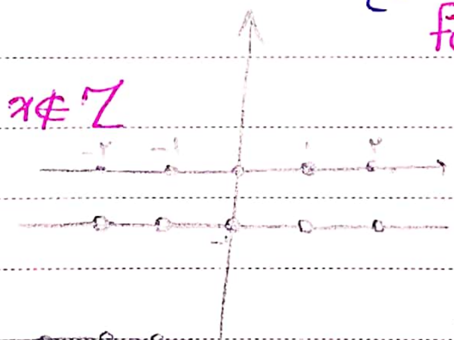
Ex) $[3x-2]=5 \Longrightarrow 5 \le 3x-2 < 6 \longrightarrow \frac{7}{3} < x < \frac{8}{3}$

☒ نمودارهای مهم جزء صحیح:

$f(x)=[x]$



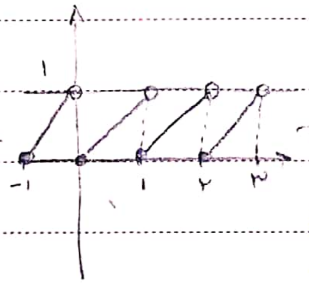
$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in \mathbb{Z} \\ -1 & x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$



تابع فوق متناوب است

$T=1$

$f(x)=x-[x]$



$0 \le x-[x] < 1$

تابع دندانه اره‌ای

تابع فوق متناوب است

$T=1$

Ex) حل معادله‌ی روبه‌رو؟

$[x+3]-2[x]=5$

* قبل از حل، به برخی از نکات بپردازیم:

$[x^2]=[x]^2$ ✗ $\quad [2x]=2[x]$ ✗ $\quad [-x]=-[x]$ ✗

$[\sqrt{x}]=\sqrt{[x]}$ ✗ $\quad |[x]|=[|x|]$ ✗ $\quad [x+5]=[x]+5$ ✓

$[x+2/7]=[x+0/7]+2$ ✓

$\to [x]+3-2[x]=5 \longrightarrow [x]=-2 \longrightarrow -2\le x<-1$

Ex) حل معادله‌ی روبه‌رو؟

$2[x]^2+3[x]-5=0$

$[x]=t \quad 2t^2+3t-5=0$

$t=1 \to [x]=1 \to 1\le x<2$

$t=-\frac{5}{2} \to [x]=-\frac{5}{2}$ ✗

Ex) حل معادله‌ی روبه‌رو؟

$3[x]+[-x]=4$

$[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin \mathbb{Z}\\ 0 & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ یادآوری

$\to 2[x]+[x]+[-x]=4$

$x\in \mathbb{Z},\ 2[x]+0=4 \longrightarrow [x]=2 \xrightarrow{x\in \mathbb{Z}} \boxed{x=2}$

$x\notin \mathbb{Z},\ 2[x]-1=4 \longrightarrow [x]=\frac{5}{2}$ ✗

Ex) دامنه توابع زیر؟

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{\underbrace{[x]+[-x]}_{0 \text{ یا } -1}}$ $\quad$ No $\quad$ yes $\quad x\notin \mathbb{Z} \quad D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{\underbrace{[x]+[-x]}_{0 \text{ یا } -1}+4}$ $\quad$ OK $\quad$ OK $\quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{\underbrace{[x]+[-x]}_{0 \text{ یا } -1}+1}$ $\quad$ No $\quad$ OK $\quad x\in \mathbb{Z} \quad D_f=\mathbb{Z}$

Ex) برد تابع؟ $f(x)=\sqrt{6x-3[2x]+7}$

$0\le 2x-[2x]<1 \longrightarrow 0\le 6x-3[2x]<3$

$\longrightarrow 7\le 6x-3[2x]+7<10 \longrightarrow \sqrt{7}\le f(x)<\sqrt{10}$

$R_f: [\sqrt{7},\sqrt{10})$

$f(x)=\sqrt{6x-3[2x]-1}$

$0\le 2x-[2x]<1 \longrightarrow 0\le 6x-3[2x]<3 \longrightarrow -1\le 6x-3[2x]-1<2$

$\longrightarrow \sqrt{0}=0\le f(x)<\sqrt{2} \longrightarrow R_f: [0,\sqrt{2})$

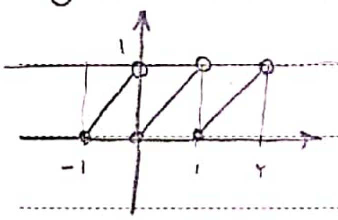
Ex) حاصل عدد $A=[\log 1398]+[\sin 4]$ کدام است؟

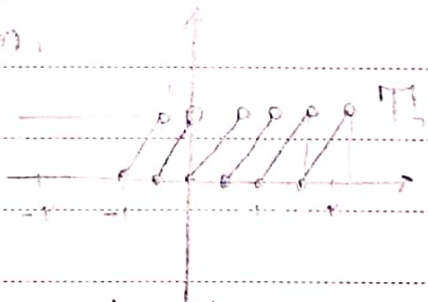
$\log 10^3<\log 1398<\log 10^4$ $\quad A=[3/\ldots]+[\sin 229^\circ]$ $\quad 1^{rad}\simeq 57^\circ$ ☆

$A=3+[-0/\ldots] \longrightarrow A=3+(-1)=2$

Ex) مساحت محدود به تابع $f(x)=2x-[x]$ $(-1\le x<2)$ و محور x ها کدام است؟

$y=x-[x] \xrightarrow{\times 2\ (\text{عرض})} f(x)$





دوره تناوب: $T=\frac{1}{2}$

$S_\Delta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4} \longrightarrow S_{کل}=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

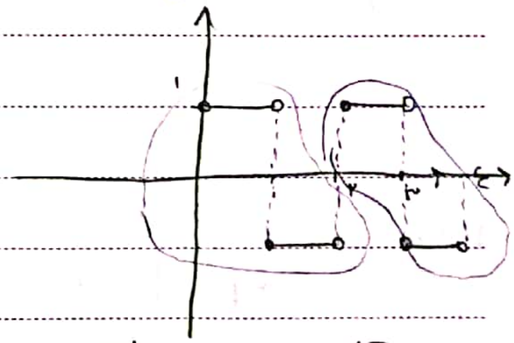
Ex) نمودار تابع $f(x)=(-1)^{[x]}$ دارای دوره تناوب با کدام مقدار است؟

$0\le x<1 \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow (-1)^0=1$

$1\le x<2 \longrightarrow [x]=1 \longrightarrow (-1)^1=-1$

$2\le x<3 \longrightarrow [x]=2 \longrightarrow (-1)^2=1$

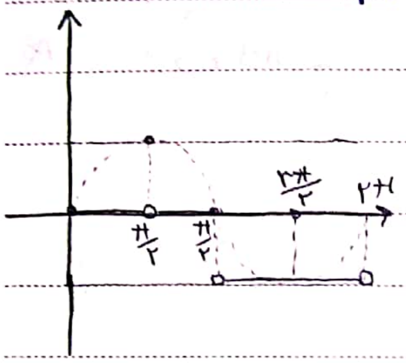
$3\le x<4 \longrightarrow (-1)^3=-1$



دوره تناوب: $T=2$

$(-1)^{[kx]} \longrightarrow T=\frac{2}{k}$

Ex) نمودار تابع $f(x)=[\sin x]$ $(0\leq x\leq 2\pi)$ کدام است؟



Ex) مساحت محدود به نمودار $f(x)=(x-1)[x]$ $(-2\leq x\leq 2)$ و محور x ها کدام است؟

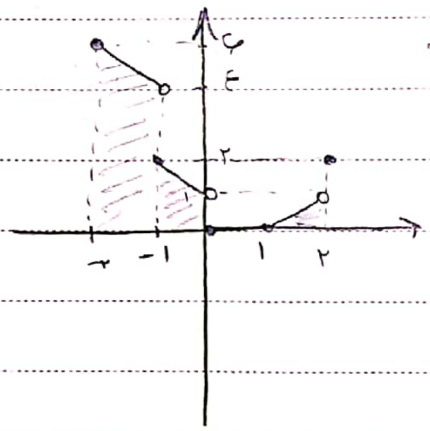
$-2\leq x<-1 \longrightarrow [x]=-2 \longrightarrow y=-2x+2$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1\\ y & 6 & 4\end{array}$

$-1\leq x<0 \longrightarrow [x]=-1 \longrightarrow y=-x+1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0\\ y & 2 & 1\end{array}$

$0\leq x<1 \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow y=0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1\\ y & 0 & 0\end{array}$

$1\leq x<2 \longrightarrow [x]=1 \longrightarrow y=x-1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2\\ y & 0 & 1\end{array}$

$x=2 \longrightarrow [x]=2 \longrightarrow y=2$



$$S=\frac{(4+6)\times 1}{2}+\frac{(1+2)\times 1}{2}+\frac{1\times 1}{2}$$

$$S=\frac{10}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{7}$$

تقسیم چندجمله‌ای :

★ یادآوری تقسیم از پایه

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{c}{f(x)} & \multicolumn{1}{c}{g(x)} \\
2x^4 - 3x^3 + 6x - 2 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2}
\cancel{-2x^4} + 4x^3 & 2x^2 + x + 2 \\ \cline{1-1}
\cancel{x^3} + 6x - 2 & \multicolumn{1}{c}{Q(x)} \\
\cancel{-x^3} + 2x^2 & \\ \cline{1-1}
\cancel{2x^2} + 6x - 2 & \\
\cancel{-2x^2} + 4x & \\ \cline{1-1}
10x - 2 & \\
\multicolumn{1}{c}{R(x)} &
\end{array}
$$

★ رابطه امتحان تقسیم

$$
\begin{array}{c|c}
f(x) & g(x) \\ \cline{2-2}
\vdots & Q(x) \\ \cline{1-1}
R(x) &
\end{array}
$$

★ حتماً درجه $R(x)$ از درجه $g(x)$ کمتر است

★ $f(x) = Q(x)g(x) + R(x)$

★ در حالت خاص که $R(x) = 0$ واژه‌ی بخش‌پذیری به کار می‌رود.

★ روش هورنر در تقسیم سریع عبارت درجه یک

$\times \quad +$

$$
\begin{array}{c|l}
2x^3 - 6x^2 + 5x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\vdots & 2x^2 - 4x + 1 \\ \cline{1-1}
-3 &
\end{array}
\qquad \frac{x^3}{x}
$$

ریشه ①

2	-6	5	-4
2	-4	1	-3

$$
\begin{array}{c|l}
x^4 + 2x^2 + x - 3 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\vdots & x^3 - 2x^2 + 6x - 11 \\ \cline{1-1}
19 &
\end{array}
$$

-2

x^3

1	0	2	1	-3
1	-2	6	-11	19

★ چگونه در تقسیم بر درجه یک سریع باقی مانده پیدا کنیم؟

کافی است تا ریشه مقسوم علیه در مقسوم قرار بدهید

ریشه: ۱

Ex) $2x^3-4x+x+3 \quad | \; x-1$

$Q=$

$R(x)=f(1)=2-4+1+3=2$

★ روش هم ارزی در یافتن سریع باقی مانده:

$2x^3+3x^2-4x+5 \quad | \; x^2-2$

$x^2-2=0$

$x^2=2$

$R(x)=2(2)(x)+3(2)-4x+5$

$R(x)=11$

$x^4+2x^3+x^2-3x \quad | \; x^2+1$

$x^2+1=0$

$x^2=-1$

$R(x)=(-1)^2+2(-1)x-1-3x$

$R(x)=-5x$

Ex) چندجمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش پذیر است، مقدار a را تعیین کنید.

$R(x)=0$

$x-a=0 \longrightarrow x=a$

$f(a)=R(x)=0 \longrightarrow a^2+a^2-2=0 \longrightarrow a^2=1 \longrightarrow a=1, \; a=-1$

Ex) چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+2 بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر است، a و b را تعیین کنید.

$R_1=0 \longrightarrow f(2)=R_1(x)=0 \longrightarrow 8+4a+2b+2=0 \longrightarrow 4a+2b=-10$

$x-2=0$

$x=2$

$R_2=0 \longrightarrow f(-1)=R_2(x)=0 \longrightarrow -1+a-b+2=0 \longrightarrow a-b=-1$

$x+1=0$

$x=-1$

دستگاه $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$

Ex ۱) چند جمله ای $P(x)=x^3+mx^2+nx+3$ بر $x-1$ بخش پذیر است و در تقسیم بر عبارت $x+2$ باقی مانده -3 دارد، m و n کدامند؟

$R_1(x)=0 \longrightarrow P(1)=R_1(x)=0 \rightarrow 1+m+n+3=0 \rightarrow \boxed{m+n=-4}$

$x-1=0$

$x=1$

$R_2(x)=-3 \longrightarrow P(-2)=R_2(x)=-3 \longrightarrow -8+4m-2n+3=0$

$x+2=0$

$x=-2$

$\hookrightarrow \boxed{4m-2n=5}$

$\longrightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{2} \\ n=-\frac{7}{2} \end{cases}$

Ex ۲) عبارت $P(x)$ در تقسیم بر $x+1$ و $x-2$ به ترتیب باقی مانده ی های ۳ و ۲- دارد. باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر x^2-x-2 کدام است؟

$\begin{cases} P(-1)=3 \\ P(2)=-2 \end{cases}$

$P(x) \;|\; x^2-x-2$, $Q(x)$, $R(x)=ax+b$

* حتماً باقی مانده یک درجه کمتر از مقسوم علیه است.

$Q(x)(x^2-x-2)+ax+b=P(x)$

$0 \qquad -a+b=3$

$0 \qquad +2a+b=-2$

$\begin{cases} -a+b=3 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{5}{3} \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$

$\longrightarrow R(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$

Ex ۳) اگر $P(x)=x^3+ax^2+2x+b$ بر $\underline{x^2+3x-4}$، بخش پذیر باشند، مقادیر a و b کدامند؟

$(x-1)(x+4)=0$

$x=1$

$x=-4$

$x-1 \text{ بر} \longrightarrow R_1=0 \longrightarrow P(1)=1+a+2+b=0 \rightarrow \boxed{a+b=-3}$

$x+4 \text{ بر} \longrightarrow R_2=0 \longrightarrow P(-4)=-64+16a-8+b=0 \longrightarrow \boxed{16a+b=72}$

$a=5$

$b=-8$

راه دوم: اگر تجزیه نشد چی؟!

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+ax^2+2x+b & x^2+3x-4 \\ \hline -\cancel{x^3}-3x^2+4x & x+a-3 \end{array}$$

$$\cancel{(a-3)x^2}+6x+b$$

$$-\cancel{(a-3)x^2}-3(a-3)x+4(a-3)$$

$$\underline{(6-3a+9)}x+\underline{b+4a-12}=R(x)=0$$

$$6-3a+9=0 \qquad b+20-12=0$$

$$a=5 \qquad b=-8$$

Ex) عبارت ax^3+2x^2-ax-2 بر x^2-2x+1 بخش پذیر است. a کدام است (شبیه سراسری)

$$\begin{array}{l|l} ax^3+2x^2-ax-2 & x^2-2x+1 \\ \hline -\cancel{ax^3}+2ax^2-ax & ax+2+2a \end{array}$$

$$\cancel{(2+2a)x^2}-2ax-2$$

$$-\cancel{(2+2a)x^2}+2(2+2a)x-(2+2a)$$

$$\underline{(-2a+4+4a)}x\underline{-2-2-2a}=R(x)=0$$

$$2a+4=0 \to a=-2 \qquad -4-2a=0 \to a=-2$$