

از یک قطعه مقوای مربع شکل، به ضلع ۱۲ واحد، جعبه مکعب مستطیل سرباز درست می‌کنیم. بیشترین حجم آن کدام است؟

(۱) ۱۰۶

(۲) ۱۲۸

(۳) ۱۳۲

(۴) ۱۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

از هر طرف به اندازه بلندی x تا می‌کنیم. حجم حاصل

$$V = x(12 - 2x)^2 = 4(x^3 - 12x^2 + 36x)$$

$$V' = 4(3x^2 - 24x + 36) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

ماکزیمم حجم $V' = 0$

$$V = 2(8)^2 = 128 \quad \text{پس } x = 2 \text{ در نتیجه}$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{x - 2}$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$(1) \quad y + 2x = 1 \quad (2) \quad y - 2x = -3 \quad (3) \quad 2y + 5x = 3 \quad (4) \quad 2y - x = -3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه تماس $A(1, -1)$ است.

$$y' = \frac{\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x - 2) - (2x - \sqrt{x})}{(x - 2)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{1} = -\frac{5}{2}$$

معادله خط مماس $y + 1 = -\frac{5}{2}(x - 1)$ یا $2y + 5x = 3$

تفاضل آهنگ متوسط تغییرات تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در بازه $(1, 4)$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 2/25$ کدام است؟

(۴) $0/5$

(۳) $0/25$

(۲) $0/125$

(۱) صفر

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

آهنگ متوسط:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2/25) = \frac{1}{3}$$

آهنگ لحظه‌ای برابر مشتق تابع است.

اختلاف آن‌ها صفر است.

اگر $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟

(۱) صفر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
عبارت مطلوب مفهوم مشتق تابع در نقطه $x = 1$ است.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(1) = 2 - \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1}$$

حدّ عبارت $x - \sqrt{x^2 + 2x}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) صفر

(۴) ۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)} = \frac{-2}{2} = -1$$

حدّ عبارت $\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\pm\infty$

(۳) $-\infty$

(۴) $+\infty$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2}{1 \cdot (-)} = +\infty$$

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2} & ; x > 2 \\ (a+1)x - a & ; x \leq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است. a کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{-5}{4} \quad \text{یا} \quad 2(a+1) - a = \frac{3}{4} \quad \text{شرط پیوستگی}$$

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2x - 5}{3x - 2}$ ، کدام است؟

$$\frac{3x + 2}{2x - 5} \quad (1)$$

$$\frac{3x - 2}{2x - 5} \quad (2)$$

$$\frac{2x - 5}{3x + 2} \quad (3)$$

$$\frac{2x - 5}{3x - 2} \quad (4)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{2x - 5}{3x - 2} \Rightarrow 3xy - 2y - 2x + 5 = 0$$

نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ متقارن است پس معکوس تابع برابر خود تابع است.

با قرار دادن چند گوی یکسان می‌توان شکلی مشابه سه‌وجهی منتظم توپر ساخت که در هر یال ۵ گوی جای گرفته باشد؟

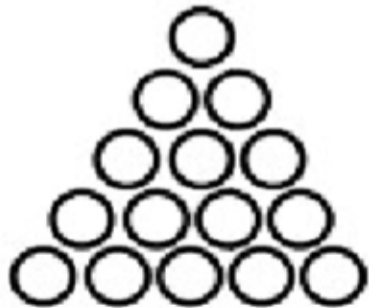
۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد گوی‌ها در ۵ طبقه به ترتیب ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵ مجموع آن‌ها ۳۵ می‌باشد.



مجموع جواب‌های معادله $2 \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)^2 + 3 \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right) = 9$ کدام است؟

(۱) ۲۴/۷۵ (۲) ۲۵/۲۵ (۳) ۲۵/۷۵ (۴) ۲۷/۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با فرض $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ داریم $2y^2 + 3y - 9 = 0 \Rightarrow y = -3, \frac{3}{2}$

از طرفی $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ است $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

پس مجموع جواب‌ها $24 + \frac{1}{4} = \frac{25}{25}$ $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 5$

اگر $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ و $g(x) = (x - 1)^{-\frac{1}{2}}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $[1, 2]$ (۲) $[1, 2)$ (۳) $\{1\}$ (۴) $(1, +\infty)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (1 - x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

از دو نامعادله $x - 1 \geq 0$ و $2 - x > 0$ خواهیم داشت $1 \leq x < 2$ یا بازه $[1, 2)$ است.

به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x^3 + x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ از چپ پیوسته است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) صفر

(۱) -۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x^3 + x} = 2 \Rightarrow a = 2$$

معادله مثلثاتی $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) + 3 \cos \left(x - \frac{5\pi}{8} \right) = 5$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} \right) = 5 \Rightarrow 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) + 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{8} \right) = 5$$

پس $\sin \left(x - \frac{\pi}{8} \right) = 1$ در نتیجه فقط $x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ یک جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

ضابطه معکوس تابع $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$; $x > 0$ به صورت Log_2^U است. U کدام است؟

(۱) $x - \sqrt{x^2 + 1}$ (۲) $x + \sqrt{x^2 + 1}$ (۳) $x - \sqrt{x^2 - 1}$ (۴) $x + \sqrt{x^2 - 1}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2y = 2^x + 2^{-x} \Rightarrow 2^{2x} - 2y2^x + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

چون $x > 0$ الزاماً $2^x > 1$ و علامت مثبت اختیار می شود پس $U = x + \sqrt{x^2 + 1}$

اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ کدام است؟

(۱) $(-2, 2)$

(۲) $[-2, 2]$

(۳) $\mathbb{R} - (-2, 2)$

(۴) $\mathbb{R} - [-2, 2]$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای مقادیر $x > 0$ همواره $x + \frac{1}{x} \geq 2$ و برای مقادیر $x < 0$ همواره $x + \frac{1}{x} \leq -2$

پس دامنه تابع f در خارج $(-2, 2)$ است به صورت $\mathbb{R} - (-2, 2)$

نمودار تابع $y = x^2 + x$ را یک واحد به طرف X های مثبت و سپس ۲ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم، معادله منحنی حاصل کدام است؟

$$y = x^2 - x + 2 \quad (۱)$$

$$y = x^2 - 2x + 1 \quad (۳)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad (۲)$$

$$y = x^2 - x + 1 \quad (۴)$$

$$y = (x - 1)^2 + (x - 1) + 2 \Rightarrow y = x^2 - x + 2$$

برود تابع $f(x) = x - [x]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, 1]$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1$$

برود تابع مفروض بازه $(0, 1)$ است.

دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[-2, 0)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) \emptyset

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

سه نامعادله به صورت‌های $x^2 - 4 > 0$, $2 - x \geq 0$, $x + 2 \geq 0$ فاقد جواب است. پس دامنه تابع \emptyset است.

حاصل عبارت $\tan 78^\circ \cos 21^\circ - \cot 315^\circ \sin 15^\circ$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\tan 60^\circ \cos(180^\circ + 30^\circ) - \cot(-45^\circ) \sin(180^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

اگر A و B و C سه زاویه یک مثلث و $\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) = 1$ باشد، نوع مثلث کدام است؟

(۱) متساوی الساقین

(۲) قائم الزاویه

(۳) متساوی الاضلاع

(۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

الزاماً هر یک از حاصل ضربها برابر ۱ است. $\cos(A - B) = \cos(B - C) = \cos(C - A) = 1$

یا $A - B = B - C = 0$ در نتیجه مثلث متساوی الاضلاع است.

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $(a+1)x^2 + a(a^2-9)x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی قرینه دارد؟

(۴) ۳

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) -۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شرط دو ریشه قرینه $a(a^2-9) = 0 \Rightarrow a = 0, 3, -3$ ، به ازای $a = 0$ ، ریشه‌ها حقیقی نیست پس $a = -3$

به ازای کدام مقدار m ، رابطه

$\{(2, 2-m), (0, 4), (2, 3), (5, 1), (2, m), (3, 1)\}$ یک تابع است؟

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۳

(۴) هیچ مقدار m

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دو معادله جواب مشترک ندارند. $\Rightarrow \begin{cases} 2 - m = 3 \\ m = 3 \end{cases}$

هیچ مقدار m

نمودارهای $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = |x|$ در چند نقطه متقاطع اند؟

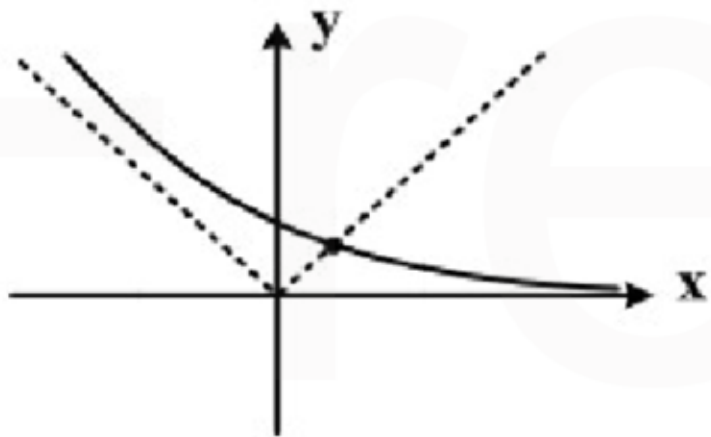
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (غیرمتقاطع)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



با رسم نمودارهای هر دو تابع، در یک نقطه متقاطع اند.

از رابطه $\text{Log}_x(2x+9) + \text{Log}_x^3 = 2$ ، مقدار لگاریتم $(x-1)$ در پایه ۴ کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ریشه مثبت قبول است. $\text{Log}_x(6x+27) = 2 \Rightarrow x^2 = 6x+27 \Rightarrow x=9$

پس $\text{Log}_4(x-1) = \text{Log}_4^8 = \frac{3}{2} = 1/5$

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + mx + 2$ همواره بالای نیمساز ربع اول و سوم است؟

- (۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-2 < m < 5$ (۳) $-3 < m < 4$ (۴) $-2 < m < 4$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 + mx + 2 > x \Rightarrow 2x^2 + (m-1)x + 2 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 16 < 0$$

پس $|m-1| < 4$ یا $-4 < m-1 < 4$ در نتیجه $-3 < m < 5$

در یک دنباله هندسی غیرنزولی، حاصل ضرب جملات سوم و چهارم، دو برابر حاصل ضرب جملات دوم و هفتم است. اگر جمله پنجم آن برابر ۱ باشد، جمله دهم کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$aq^2 \times aq^3 = 2aq \times aq^6 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$aq^9 = aq^4 (q^5) = 1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

در دنباله a_n داریم: $a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{4}{4}$, $a_4 = \frac{1}{2}$. مقدار a_{12} کدام است؟

(۱) ۳/۵

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۵/۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

جملات a_{12} , \dots , a_6 , a_4 دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{4}{4}$ است. $a_{12} = \frac{1}{2} + 4 \left(\frac{4}{4} \right) = 3/5$

اگر $x^{\sqrt{2}} = 4$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt{2}}{x^2} + \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}$ کدام است؟

(۴) تعریف نشده

(۳)

(۲)

(۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$x^{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} = 2$ و $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})|1-\sqrt{2}|} = 1$ پس حاصل برابر ۳ می شود.

مشاهدات ۱۰ داده‌ی آماری نشان می‌دهد که $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 40$ و $\sum x_i = 80$ می‌باشد. ضریب تغییرات داده‌ها بر حسب درصد کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۴۰

(۴) ۴۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow \sigma_x = 2$$

$$CV_{(x)} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\frac{\sum x_i}{n}} = \frac{10 \cdot \sigma_x}{\sum x_i} = \frac{10 \times 2}{80} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \%25$$

در داده‌های ۴، ۸، ۱۶، ۹، ۱۷، ۱۲، ۶، ۷، ۱، ۵ و ۲، واریانس داده‌های بین Q_1 و Q_3 کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۴/۲ (۲)

۲/۴ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا داده‌ها را مرتب نموده و داده‌های بین Q_1 و Q_3 را استخراج می‌کنیم.

۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۲، ۱۶، ۱۷

↓

Q_1

↓

Q_2

↓

Q_3

داده‌های بین

→ ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

Q_1 و Q_3

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(5-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$$