۱۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل‌های داده‌شده داریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد مربع‌های کوچک	$۴ = ۲^۲$	$۹ = ۳^۲$	$۱۶ = ۴^۲$	...	$(n+۱)^۲$
تعداد مربع‌های سفید	$۰ = ۰^۲$	$۱ = ۱^۲$	$۴ = ۲^۲$	...	$(n-۱)^۲$
تعداد مربع‌های رنگی	$۴ - ۰ = ۴$	$۹ - ۱ = ۸$	$۱۶ - ۴ = ۱۲$	...	$(n+۱)^۲ - (n-۱)^۲$

با توجه به جدول فوق تعداد مربع‌های رنگی در شکل دهم برابر است با:

$$(۱۰ + ۱)^۲ - (۱۰ - ۱)^۲ = ۱۲۱ - ۸۱ = ۴۰$$

۱۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود.

نکته: جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت $t_n = t_۱ + (n - ۱)d$ است.

اگر دنبالهٔ t_n را دنبالهٔ سال‌های جام جهانی (برگزار شده یا نشده) در نظر بگیریم، t_n یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ و جملهٔ اول ۱۹۳۰ است. پس جملهٔ عمومی این دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_n = t_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow t_n = ۱۹۳۰ + (n - ۱) \times ۴ \Rightarrow t_n = ۴n + ۱۹۲۶$$

برای جام جهانی ۲۰۱۸ روسیه داریم:

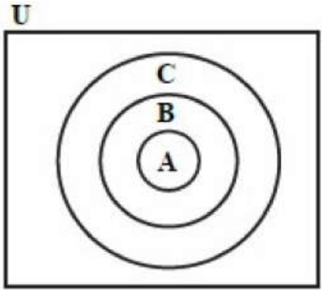
$$t_n = ۲۰۱۸ \Rightarrow ۲۰۱۸ = ۴n + ۱۹۲۶ \Rightarrow ۴n = ۹۲ \Rightarrow n = ۲۳$$

از این تعداد، دو دوره برگزار نشده است، پس جام جهانی ۲۰۱۸، بیست و یکمین دورهٔ برگزار شده است.

۱۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به‌صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.
با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$t_7 = -t_{11} \Rightarrow t_1 + 6d = -(t_1 + 10d) \Rightarrow 2t_1 + 16d = 0$$
$$\Rightarrow 2(t_1 + 8d) = 0 \Rightarrow 2t_9 = 0 \Rightarrow t_9 = 0$$

۱۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.
به نمودار وِن مقابل دقت کنید:
مطابق نمودار، دو مجموعهٔ A و C' حتماً مجزا هستند.



۱۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: به‌طور کلی الگوهایی را که جملهٔ عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ باشد، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.
راه‌حل اول:
جملات پنجم و نهم به‌ترتیب برابر ۱۷- و ۱۷۱- است، پس مطابق نکته داریم:

$$\begin{cases} t_5 = -17 \Rightarrow 5a + b = -17 \\ t_9 = -171 \Rightarrow 9a + b = -171 \end{cases} \Rightarrow 4a = -154 \Rightarrow a = -\frac{77}{2} \Rightarrow b = \frac{351}{2}$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $t_n = -\frac{77}{2}n + \frac{351}{2}$ است. پس جملهٔ سیزدهم برابر است با:

$$t_{13} = -\frac{77}{2} \times 13 + \frac{351}{2} = -325$$

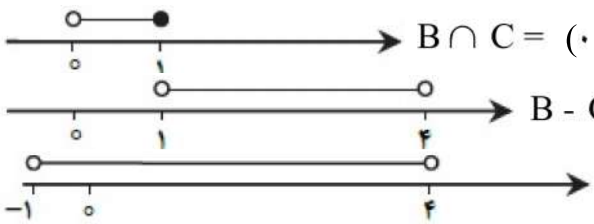
راه‌حل دوم:
در یک الگوی خطی جملاتی که شمارهٔ آن‌ها دارای فاصلهٔ برابر باشد، مقدار آن‌ها نیز اختلافی برابر دارد. پس:

$$\underbrace{t_5, t_6, t_7, t_8, t_9}_{9-5=4}, \underbrace{t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}}_{13-9=4}$$

$$t_9 - t_5 = t_{13} - t_9 \Rightarrow t_{13} = 2t_9 - t_5 = 2(-171) + 17 + 17 = -342 + 17 = -325$$

۱۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(گزینهٔ ۱ $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$



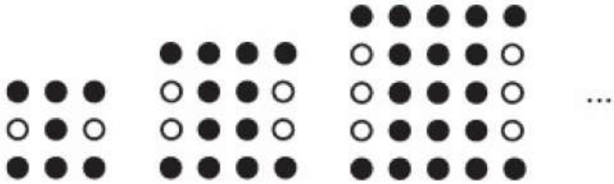
(گزینهٔ ۲ $B \cap C = (0, 1]$

(گزینهٔ ۳ $B - C = (1, 4)$

(گزینهٔ ۴ $B \cup C = (-1, 4)$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: می‌توانیم دنباله را به‌صورت زیر در نظر بگیریم. با اضافه کردن دایره‌های توخالی به هر شکل یک دنباله مربعی خواهیم داشت:

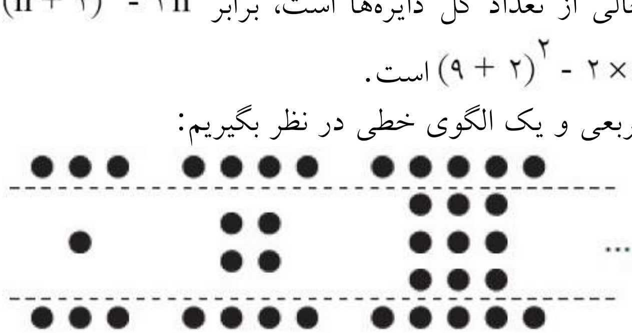


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد کل دایره‌ها	۹	۱۶	۲۵	...	$(n+۲)^۲$
تعداد دایره‌های توخالی	۲	۴	۶	...	$۲n$

بنابراین تعداد دایره‌های توپر که تفاضل تعداد دایره‌های توخالی از تعداد کل دایره‌ها است، برابر $(n+۲)^۲ - ۲n$ است. پس در شکل نهم تعداد دایره‌های توپر برابر $(۹+۲)^۲ - ۲\times ۹ = ۱۰۳$ است.

راه‌حل دوم: می‌توانیم الگو را به‌صورت زیر یعنی یک الگوی مربعی و یک الگوی خطی در نظر بگیریم:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقطه‌های بین دو خط	۱	۴	۹	...	$n^۲$
تعداد نقطه‌های بیرون دو خط	۶	۸	۱۰	...	$۲(n+۲)$

بنابراین تعداد کل نقطه‌ها برابر $n^۲ + ۲(n+۲)$ است. پس در شکل نهم $(۹)^۲ + ۲(۱۱) = ۱۰۳$ نقطه وجود دارد.

۱۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ است.

فرض کنیم m واسطهٔ حسابی بین ۸۲- و ۱۷ درج کرده‌ایم. بنابراین عدد ۸۲- را جملهٔ اوّل و عدد ۱۷ را t_n درنظر می‌گیریم و داریم:

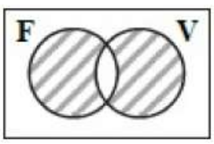
$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۱۷ = -۸۲ + (n-۱)\times ۳$$
$$\Rightarrow ۳n - ۳ = ۹۹ \Rightarrow ۳n = ۱۰۲ \Rightarrow n = ۳۴$$

۱۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت $t_n = t_۱ + (n - ۱)d$ است.
در مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ ، متمم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ به‌صورت زیر است:
$\mathbb{N}' = \{\ldots, -۲, -۱, ۰\}$
اگر اعضای این مجموعه را به‌صورت دنباله از بزرگ به کوچک بنویسیم، به‌صورت زیر خواهد بود:
$۰, -۱, -۲, -۳, \ldots$
این دنباله، یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = -۱$ و جملهٔ اول $t_۱ = ۰$ است که جملهٔ عمومی آن به‌صورت $t_n = -n + ۱$ می‌باشد.

۱۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
با توجه به معلومات مسئله داریم:
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$
$$\Rightarrow n(A \cap B) = ۰ \Rightarrow A \cap B = \varnothing$$
یعنی دو مجموعهٔ A و B جدا از هم بوده و اشتراکی ندارند.
همچنین طبق فرض داریم:
$$n(C \cap D) = n(C) + n(D) \Rightarrow n(C) + n(D) - n(C \cap D) = ۰$$
یعنی $C \cup D = \varnothing$ ، پس هر دو مجموعهٔ C و D تهی هستند، بنابراین:
$$n((A - C) \cap (B - D)) = n((A - \varnothing) \cap (B - \varnothing)) = n(A \cap B) = ۰$$

۱۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد. $(t_۱, r \neq ۰)$
اگر دو واسطهٔ هندسی بین اعداد داده‌شده درج کنیم، دنباله به‌صورت $۱۰, t_۲, t_۳, -۸۰۰۰۰$ درمی‌آید. بنابراین $t_۱ = ۱۰$ و $t_۴ = -۸۰۰۰۰$ ، پس:
$$t_۴ = -۸۰۰۰۰ \Rightarrow t_۱ r^۳ = -۸۰۰۰۰ \Rightarrow r^۳ = -۸۰۰۰ \Rightarrow r = -۲۰$$
بنابراین دنباله به‌صورت $۱۰, -۲۰۰, ۴۰۰۰, -۸۰۰۰۰$ درمی‌آید. مجموع دو واسطهٔ هندسی برابر است با:
$-۲۰۰ + ۴۰۰۰ = ۳۸۰۰$

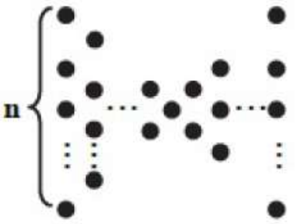
۱۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌توان با نمودار وِن کسانی را که فقط به یکی از این دو ورزش علاقه‌مند هستند، نشان داد.



تعداد کسانی که فقط به یک ورزش علاقه‌مندند =
تعداد کسانی که فقط به والیبال علاقه‌مندند + تعداد کسانی که فقط به فوتبال علاقه‌مندند
$$= (n(F) - n(F \cap V)) + (n(V) - n(F \cap V)) = n(F) + n(V) - ۲n(F \cap V)$$

۱۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$



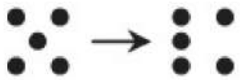
راه‌حل اول: اگر به‌صورت ستونی به نقاط موجود در شکل nاُم توجه کنیم، تعداد نقاط در شکل nاُم برابر است با:

$$a_n = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$\Rightarrow a_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (2 + 3 + \ldots + n)$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - 1 = \frac{2 \times n \times (n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$$

بنابراین برای ساختن شکل دهم به تعداد $a_{10} = 10^2 - 1 = 109$ نقطه نیاز داریم.

راه‌حل دوم: هر شکل با کمی جابه‌جایی به‌صورت یک مستطیل با طول $n + 1$ و عرض n با حذف یک رأس درمی‌آید. پس جملهٔ عمومی به‌صورت $a_n = n(n+1) - 1$ است.

به‌عنوان مثال شکل (۲) به صورت مقابل درمی‌آید:



۱۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در هر مثلث، مساحت برابر با «نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع» است.

با توجه به نکته‌ی بالا، مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

۱۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر D اندازه‌ی زاویه‌ی α برحسب درجه و R اندازه‌ی آن برحسب رادیان باشد، آنگاه: $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$

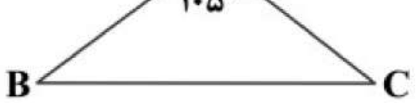
ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی $\frac{7\pi}{12}$ رادیان را برحسب درجه پیدا می‌کنیم.

$$\frac{\frac{7\pi}{12}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow D = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 7 \times 15^\circ = 105^\circ$$

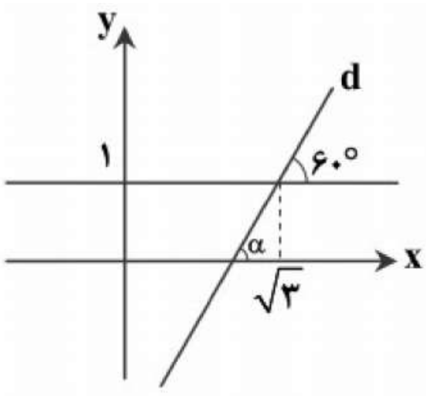
زاویه‌ی موردنظر بزرگ‌تر از 90° است، پس نمی‌تواند یکی از زوایای مجاور به قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین باشد، یعنی حتماً زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین است.

اکنون با توجه به اینکه دو زاویه‌ی دیگر مثلث برابرند و مجموع زوایای مثلث برابر 180° است، داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 105^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{B} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 37/5^\circ$$



۱۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته: شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر با تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور افقی است.
مطابق صورت سؤال، نمودار خط به صورت مقابل است.
طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، خط d با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد $(\alpha = ۶۰^\circ)$. پس شیب خط d برابر است با:



$$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

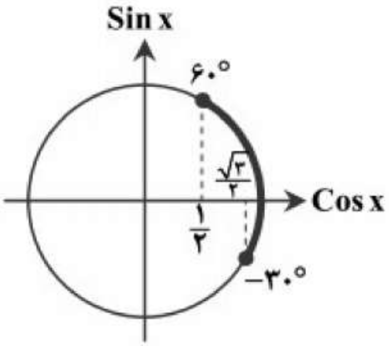
بنابراین معادله‌ی خط d به صورت $y = \sqrt{۳}x + b$ است. این خط از نقطه‌ی $\left(\sqrt{۳}, ۱\right)$ می‌گذرد، پس:

$$۱ = \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} + b \Rightarrow b + ۳ = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

بنابراین معادله‌ی خط به‌صورت $y = \sqrt{۳}\ x - ۲$ است.

۱۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
ابتدا از شرط $-۱۵^\circ \leq x \leq ۳۰^\circ$ نتیجه می‌شود که: $-۳۰^\circ \leq ۲x \leq ۶۰^\circ$
اکنون با توجه به شکل زیر، توجه کنید که $\frac{۱}{۲} \leq \text{Cos } ۲x \leq ۱$، پس داریم:

$$\frac{۱}{۲} \leq \frac{۲m - ۱}{۵} \leq ۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲} \leq ۲m - ۱ \leq ۵ \Rightarrow \frac{۷}{۲} \leq ۲m \leq ۶ \Rightarrow \frac{۷}{۴} \leq m \leq ۳$$



۱۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته : $\text{Sin}^{۲} x + \text{Cos}^{۲} x = ۱$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\frac{\text{Cos}^{۲} x}{۱ + \text{Sin } x} = \frac{۱ - \text{Sin}^{۲} x}{۱ + \text{Sin } x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{(۱ - \text{Sin } x)(۱ + \text{Sin} x)}{۱ + \text{Sin } x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۱ - \text{Sin } x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{Sin } x = \frac{۲}{۳}$$

$$\text{Sin}^{۲} x + \text{Cos}^{۲} x = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۹} + \text{Cos}^{۲} x = ۱ \Rightarrow \text{Cos}^{۲} x = \frac{۵}{۹}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر $\text{Sin } x$ و $\text{Cos } x$ داریم:

$$\frac{\text{Sin}^{۲} x}{۱ + ۹\ \text{Cos}^{۲} x} = \frac{\frac{۴}{۹}}{۱ + ۹\left(\frac{۵}{۹}\right)} = \frac{\frac{۴}{۹}}{۶} = \frac{۲}{۲۷}$$

۱۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ابتدا عبارت A را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{۲\,\text{Sin}\,(۹۰^\circ - ۱۸^\circ) + \text{Cos}\,(۹۰^\circ + ۱۸^\circ)}{۳\,\text{Sin}\,(۲۷۰^\circ + ۱۸^\circ) + \text{Cos}\,(۹۰^\circ - ۱۸^\circ)} = \frac{۲\,\text{Cos}\ ۱۸^\circ - \text{Sin}\ ۱۸^\circ}{-۳\,\text{Cos}\ ۱۸^\circ + \text{Sin}\ ۱۸^\circ}$$

اکنون با تقسیم صورت و مخرج کسر آخر بر $\text{Cos}\ ۱۸^\circ$ داریم:

$$A = \frac{\frac{۲\,\text{Cos}\ ۱۸^\circ - \text{Sin}\ ۱۸^\circ}{\text{Cos}\ ۱۸^\circ}}{\frac{-۳\,\text{Cos}\ ۱۸^\circ + \text{Sin}\ ۱۸^\circ}{\text{Cos}\ ۱۸^\circ}} = \frac{۲ - \tan ۱۸^\circ}{-۳ + \tan ۱۸^\circ} = \frac{۲ - a}{-۳ + a} = \frac{۲ - a}{a - ۳}$$

۱۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

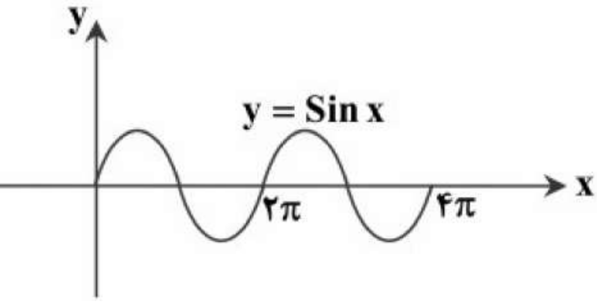
نکته: $\tan\,(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ و $\tan\,(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

با توجه به نکته‌ی بالا می‌توان عبارت A را به‌صورت زیر ساده کرد:

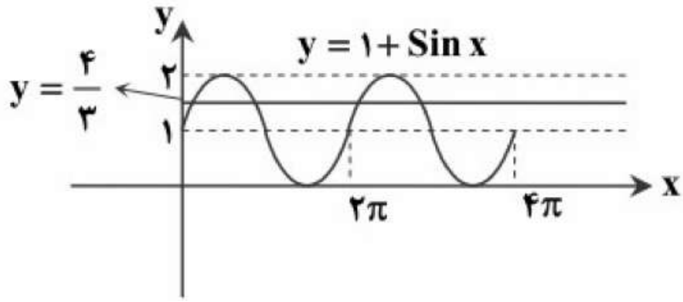
$$A = \tan \frac{\pi}{۱۱} + \tan \frac{۳\pi}{۱۱} + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{۱۱}\right) + \tan\left(\pi + \frac{۳\pi}{۱۱}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{۱۱} + \tan\frac{۳\pi}{۱۱} - \tan\frac{\pi}{۱۱} + \tan\frac{۳\pi}{۱۱} = ۲\tan\frac{۳\pi}{۱۱}$$

۱۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$



با توجه به نمودار واضح است که خط $y = \frac{۴}{۳}$ نمودار تابع $y = ۱ + \text{Sin}\ x$ را در بازه‌ی $[۰,۴\pi]$ در ۴ نقطه قطع می‌کند.

۱۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: $\text{Sin}\ (\pi - x) = \text{Sin}\ x$ و $\text{Cos}\ (-x) = \text{Cos}\ x$

ابتدا طبق نکته‌ی بالا، از صورت سؤال می‌توان فهمید $\text{Cos}\ x = -\frac{۴}{۵}$ و $\text{Sin}\ x > ۰$، پس انتهای کمان روبه‌رو به x در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. اکنون مقادیر $\tan x$ و $\text{Cos}\ x$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{Sin}^۲ x + \text{Cos}^۲ x = ۱ \xrightarrow{\text{Cos}\ x = -\frac{۴}{۵}} \frac{۱۶}{۲۵} + \text{Sin}^۲ x = ۱ \xrightarrow{\text{Sin}\ x > ۰} \text{Sin}\ x = \frac{۳}{۵}$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت $\tan x = \frac{\text{Sin}\ x}{\text{Cos}\ x} = -\frac{۳}{۴}$ و $\text{Cos}\ x = -\frac{۴}{۳}$، پس داریم:

$$\tan x + \cot x = -\frac{۳}{۴} - \frac{۴}{۳} = -\frac{۲۵}{۱۲}$$

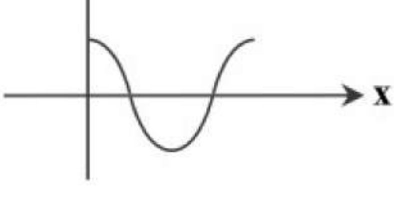
۱۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
ابتدا از نمودار داده‌شده می‌توان فهمید $f(۰) = -۲$، پس:

$$a\ \text{Cos}\ ۰ = -۲ \Rightarrow a = -۲$$

اکنون با جای‌گذاری مقدار $a = -۲$ در ضابطه‌ی $g(x)$، خواهیم داشت:

$$g(x) = \text{Cos}\ (x + ۲\pi) = \text{Cos}\ x$$

بنابراین نمودار تابع $g(x) = \text{Cos}\ x$ به شکل روبه‌رو است:



۱۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $y = a\mathrm{Cos}\,(bx) + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکته‌ی بالا در تابع $y = -\frac{1}{4}\mathrm{Cos}\,(\pi x) + 1$، مقدار ماکزیمم برابر $\left|-\frac{1}{4}\right| + 1 = \frac{5}{4}$ و دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|\pi|} = 2$ است، پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} = 1/6$$

۱۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $y = a\ \mathrm{Cos}\,(bx) + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است.

با توجه به نکته‌ی بالا در تابع $y = a\ \mathrm{Cos}\,(2x) + c$ داریم:

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -7 \end{cases} \xrightarrow{+} 2c = -6 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

بنابراین مقدار ac برابر با ۱۲ یا ۱۲- است.