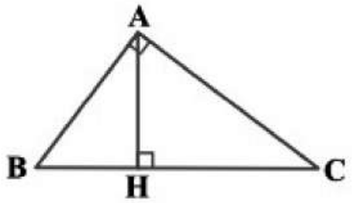
۱۰۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC$، اگر $AH$ ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:

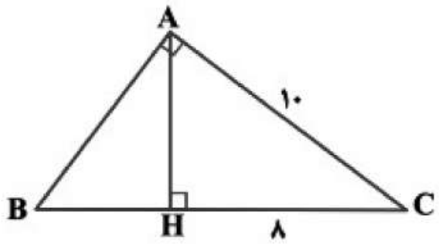



$$AB^۲ = BH \times BC$$
$$AC^۲ = CH \times BC$$
$$AH^۲ = BH \times CH$$
$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\overset{\frown}{ACH}: AH = \sqrt{AC^۲ - CH^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = ۶$$
$$\overset{\frown}{ABC}: AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow ۳۶ = BH \times ۸ \Rightarrow BH = \frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲}$$

بنابراین طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC$ برابر است با:




$$BC = BH + CH = \frac{۹}{۲} + ۸ = ۴/۵ + ۸ = ۱۲/۵$$

۱۰۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.
نکته: تابعی مانند $f$ را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را $k$ بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله‌ی $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.
چون $f$ تابعی خطی است پس مطابق نکته به فرم $f(x) = ax + b$ است. از طرفی این تابع از نقاط $A(۳,۱)$ و $B(۲,-۱)$ عبور می‌کند. پس مختصات این نقاط در معادله‌ی خط صدق می‌کند:

$$\begin{cases} f(۲) = -۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱ \\ f(۳) = ۱ \Rightarrow ۳a + b = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۵ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۲x - ۵$$

برای آنکه یک تابع ثابت داشته باشیم، باید ضریب $x$ را حذف کنیم، پس در گزینه‌ی ۲ داریم:
$$۶x - ۳f(x) = ۶x - ۳(۲x - ۵) = ۱۵$$
تابع ثابت است.

۱۰۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از این مقوا به اندازه‌ی $x$ از هر لبه رو به بالا تا کرده‌ایم. در این‌صورت کف جعبه یک مربع به ضلع $۳۶ - ۲x$ و ارتفاع جعبه همان $x$ است. در این‌صورت حجم این جعبه به‌عنوان تابعی از $x$ عبارتست از:
$$V(x) = x(۳۶ - ۲x)^۲$$

۱۰۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $A\left(x_۱ , y_۱\right)$ و $B\left(x_۲ , y_۲\right)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط $AB$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{\left(x_۱ - x_۲\right)^۲ + \left(y_۱ - y_۲\right)^۲}$$

نمودار تابع $f(x) =, \left[\frac{۱}{۲}x\right]$ را رسم می‌کنیم. سپس مختصات نقاط $A$ و $B$ را روی آن به‌دست می‌آوریم:

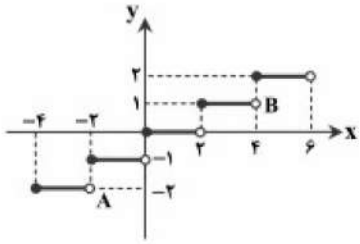
$$-۴ \leqslant x < -۲ \Rightarrow -۲ \leqslant \frac{۱}{۲}x < -۱ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = -۲$$

$$-۲ \leqslant x < ۰ \Rightarrow -۱ \leqslant \frac{۱}{۲}x < ۰ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = -۱$$

$$۰ \leqslant x < ۲ \Rightarrow ۰ \leqslant \frac{۱}{۲}x < ۱ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = ۰$$

$$۲ \leqslant x < ۴ \Rightarrow ۱ \leqslant \frac{۱}{۲}x < ۲ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = ۱$$

$$۴ \leqslant x < ۶ \Rightarrow ۲ \leqslant \frac{۱}{۲}x < ۳ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = ۲$$




با توجه به شکل، مختصات نقاط به‌صورت $A(-۲ , -۲)$ و $B(۴ , ۱)$ می‌باشد، که فاصله‌ی این دو نقطه مطابق نکته، برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۴ - (-۲))^۲ + (۱ - (-۲))^۲} = \sqrt{۳۶ + ۹} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

۱۰۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

نکته: اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند، توابع $f + g$ و $f - g$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) , D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) , D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

نکته: اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند، ترکیب $f$ با $g$ را با $fog$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

مطابق صورت سؤال، $f(x)$ یک تابع خطی است. پس آن را به‌صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. از طرفی داریم:

$$(f + g)(x) = ۴ \Rightarrow f(x) + g(x) = ۴ \Rightarrow ax + b + g(x) = ۴ \Rightarrow g(x) = ۴ - ax - b$$

و همچنین:

$$(fog)(x) = ۱ - ۴x \Rightarrow f(g(x)) = ۱ - ۴x \Rightarrow f(۴ - ax - b) = ۱ - ۴x \Rightarrow a(۴ - ax - b) + b = ۱ - ۴x$$

$$\Rightarrow ۴a - a^۲ x - ab + b = ۱ - ۴x$$

از تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت: $-a^۲ = -۴ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$

در فرض سؤال گفته شده شیب خط یعنی $a$ مثبت است، پس مقدار $a = -۲$ قابل‌قبول نیست. با جای‌گذاری مقدار $a$ داریم: $۸ - ۴x - ۲b + b = ۱ - ۴x \Rightarrow ۸ - b = ۱ \Rightarrow b = ۷$

پس $f(x) = ۲x + ۷$ و $g(x) = -۲x - ۳$، بنابراین: $(f - g)(۲) = f(۲) = g(۲) = ۱۱ - (-۷) = ۱۸$

۱۰۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $f$ تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم:
$$\left.\begin{aligned}&(f^{-۱} of)(x) = x \quad x \in D_f\\&(fof^{-۱})(x) = x \quad x \in R_f\end{aligned}\right\}$$

نکته: دو تابع $f$ و $g$ را برابر نامیم، هرگاه:

الف) دامنه‌ی $f$ و دامنه‌ی $g$ با هم برابر باشند.

ب) برای هر $x$ از این دامنه‌ی یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

می‌دانیم $(f^{-۱} of)(x) = x$ به‌شرطی که $x \in [-۲,۳]$، زیرا: $D_f = [-۲,۳]$

از طرفی $(fof^{-۱} of)(x)$ به‌شرطی که $x \in [-۱,۴]$، زیرا: $R_f = [-۱,۴]$

ضابطه‌ی این دو تابع برابر است. پس این دو تابع، در اشتراک دامنه‌هایشان برابرند.

$$D_f \cap R_f = [-۲,۳] \cap [-۱,۴] = [-۱,۳]$$

۱۰۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در تابع وارون‌پذیر، $f$، اگر $f(a) = b$ آن‌گاه: $f^{-۱}(b) = a$

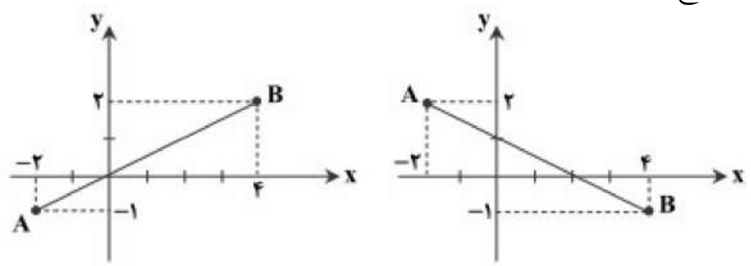
ابتدا فرض می‌کنیم $g^{-۱}(۱) = a$، در این‌صورت مطابق نکته $g(a) = ۱$، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۲a}{a+۱} = ۱ \Rightarrow ۲a = a + ۱ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow g^{-۱}(۱) = ۱$$

با توجه به تساوی داده‌شده در صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت:

$$f^{-۱}(۲\alpha - ۱) = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۲\alpha - ۱ \xrightarrow{(۱,۳) \in f} ۳ = ۲\alpha - ۱ \Rightarrow \alpha = ۲$$

۱۰۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع خطی $f$ با دامنه‌ی $[-۲,۴]$ و برد $[-۱,۲]$ به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند باشد:




حل معادله‌ی خط را در هر دو حالت رسم شده به‌دست می‌آوریم:

برای حالت اول معادله‌ی خطی که از دو نقطه $(۴,۲)$ و $(-۲,-۱)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\text{شیب} = \frac{۲ - (-۱)}{۴ - (-۲)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{۲}$$

بنابراین $f(۱) = \frac{۱}{۲}$ همواره برقرار است. سایر گزینه‌ها فقط در یکی از حالت‌ها صدق می‌کند و همواره درست نیستند.

۱۰۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله‌ی $y = f(x)$ در صورت امکان $x$ را برحسب $y$ محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل $y$ به $x$، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا ضابطه‌ی وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم. مطابق نکته داریم:

$$y = \frac{۲x + ۴}{x - ۱} \Rightarrow xy - y = ۲x + ۴ \Rightarrow x(y-۲) = y + ۴ \Rightarrow x = \frac{y + ۴}{y - ۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۴}{x - ۲}$$

حال نقاط تلاقی f و $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{۲x + ۴}{x - ۱} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x + ۴}{x - ۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲x + ۴}{x - ۱} = \frac{x + ۴}{x - ۲} \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۴x - ۸ = x^۲ + ۴x - x - ۴ \Rightarrow$$

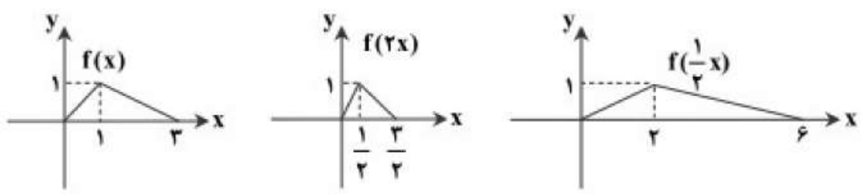
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۴)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = -۱,۴$$

پس طول نقاط A و B اعداد ۱- و ۴ است که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

۱۰۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > ۱$، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $۰ < k < ۱$، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

با توجه به نکته، فقط گزینه‌ی ۱ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال اگر نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودارهای $f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ و $f(۲x)$ به‌صورت زیر هستند:




۱۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون دامنه‌ی تابع $y = ۳ - f(۱ - x)$ به‌صورت $[-۳,۵]$ است، برای به‌دست آوردن دامنه‌ی $f(x)$ داریم:

$$-۲ \leqslant x \leqslant ۴ \Rightarrow -۴ \leqslant -x \leqslant ۲ \Rightarrow -۳ \leqslant ۱ - x \leqslant ۳ \Rightarrow D_f = [-۳,۳]$$

چون برد تابع $y = ۳ - f(۱ - x)$ به‌صورت $[-۳,۵]$ است، برای به‌دست آوردن برد $f(x)$ داریم:

$$-۳ \leqslant ۳ - f(۱ - x) \leqslant ۵ \Rightarrow -۶ \leqslant f(۱ - x) \leqslant ۲ \Rightarrow -۲ \leqslant f(۱ - x) \leqslant ۶ \Rightarrow -۲ \leqslant f(x) \leqslant ۶$$
$$\Rightarrow R_f = [-۲,۶]$$

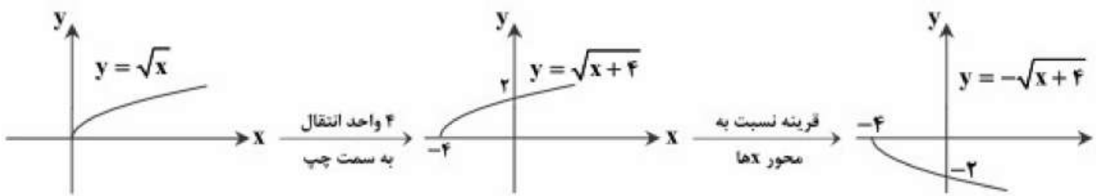
بنابراین اشتراک دامنه و برد تابع $f(x)$ برابر است با: $[-۳,۳] \cap [-۲,۶] = [-۲,۳]$

۱۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

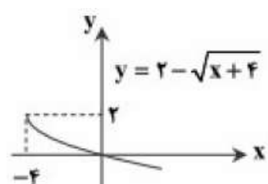
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < ۰$ این انتقال به‌اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y\ f(x + k)$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

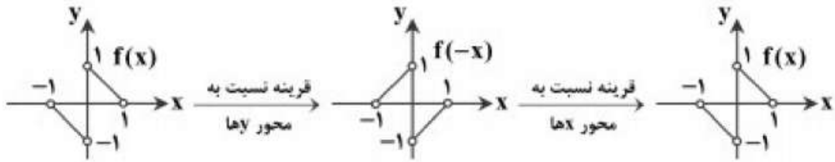
نکته: اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$، را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $x$ است. ابتدا نمودار خواسته شده را رسم می‌کنیم:



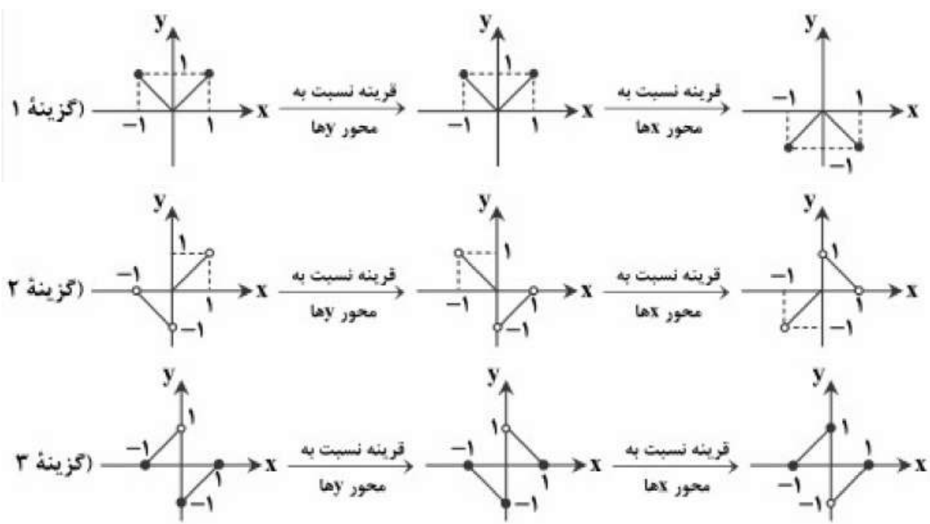

با توجه به نمودار $y = -\sqrt{x + ۴}$ اگر این نمودار را ۲ واحد به بالا منتقل کنیم، از مبدأ مختصات عبور می‌کند و نمودار آن به‌صورت زیر خواهد بود:



۱۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته: اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $x$ است.
نکته: اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $y$ است.
در واقع شرط داده‌شده به‌معنای آن است که $f(x) = -f(-x)$ یعنی اگر نمودار $f$ را به‌ترتیب نسبت به محور طول‌ها و عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار حاصل، بر روی نمودار $f$ منطبق شود. تنها گزینه‌ی قابل‌قبول گزینه‌ی ۴ است، زیرا:



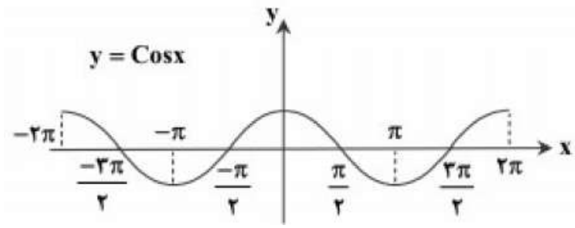

در سایر گزینه‌ها:



۱۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.
نکته: $\text{Cos}(-x) = \text{Cos}\,x$

با توجه به نکته‌ی دوم می‌توان نوشت: $f(x) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶} - x\right) = \text{Cos}\left(-\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)\right) = \text{Cos}\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)$

نمودار داده‌شده، همان نمودار $y = \text{Cos}\,x$ است که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۶}$ به‌سمت راست منتقل شده است. نمودار تابع $y = \text{Cos}\,x$ به‌صورت زیر است:




بنابراین اگر نقطه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۶}$ به راست منتقل شود، طول نقطه‌ی A به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$\frac{۳\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۰\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۳}$$

۱۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ورودی تابع $y = f(۲x - ۱)$ را برابر $x_۰$ قرار می‌دهیم:

$$۲x - ۱ = x_۰ \Rightarrow x = \frac{x_۰ + ۱}{۲}$$

در واقع در تابع $y = f(۲x - ۱)$ به‌ازای $x = \frac{x_۰ + ۱}{۲}$ داریم:

$$f(۲x - ۱) = f\left(۲\left(\frac{x_۰ + ۱}{۲}\right) - ۱\right) = f(x_۰ + ۱ - ۱) = f(x_۰) = y_۰$$

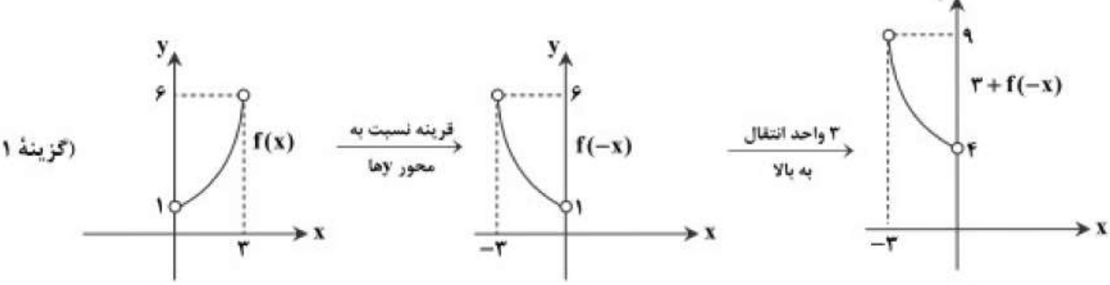
۱۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

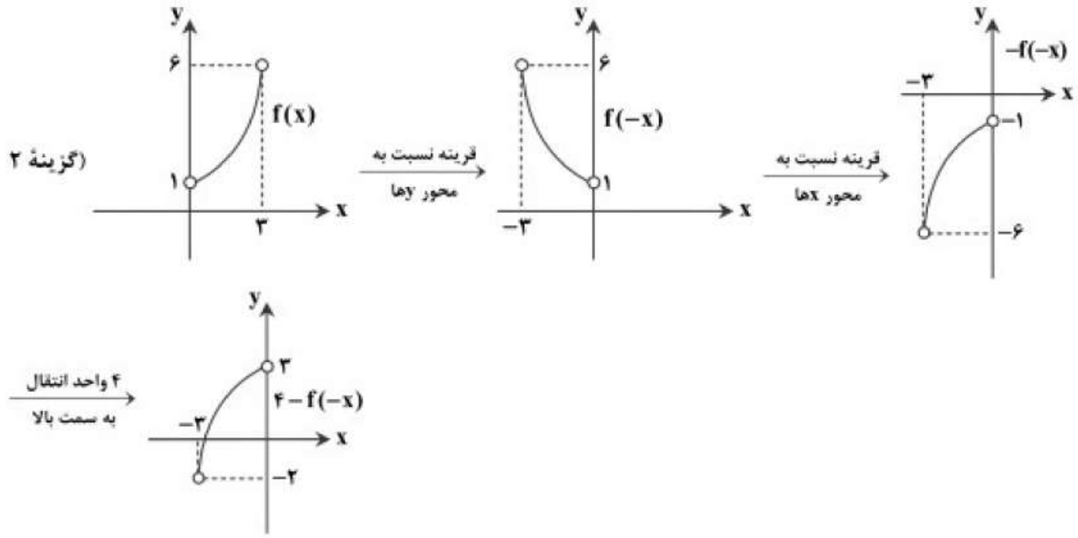
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > 0$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت پایین انجام می‌شود.

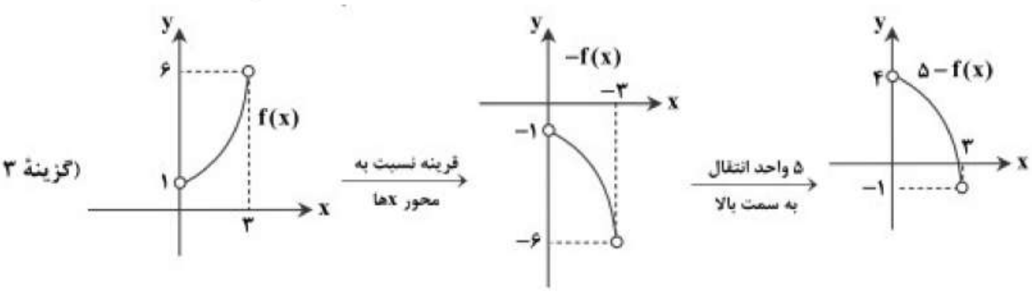
نکته: اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $x$ است.

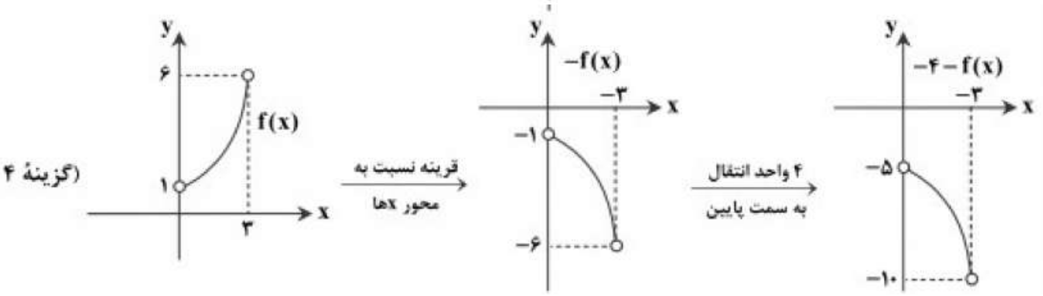
نکته: اگر طول نقاط تابع $x$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $y$ است.

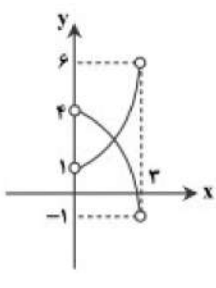
با توجه به نمودار $f$، نمودارهای داده‌شده در هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



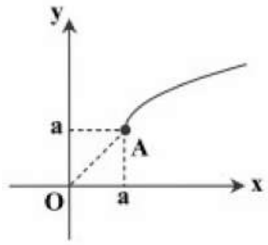



۱۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < ۰$ این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت پایین انجام می‌شود.
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.
نمودار $y = \sqrt{x}$ را $a$ واحد به راست و $a$ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = a + \sqrt{x - a}$ حاصل شود.

از طرفی مطابق فرض سؤال داریم:

$$OA = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{a^۲ + a^۲} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲a^۲} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow a\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۳$$




۱۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.
اگر $y = |x|$ را ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم، ضابطه‌ی آن $y_۱ = |x - ۳|$ و اگر $k$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، ضابطه‌ی آن $y_۲ = |x - ۳|$ و اگر $k$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، ضابطه‌ی آن $y_۲ = |x + k|$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت: $AB = k + ۳$

فاصله‌ی رأس $C$ تا محور $x$ها، ارتفاع مثلث است که عرض نقطه‌ی تلاقی دو نمودار است.

$$|x + k| = |x - ۳| \Rightarrow \begin{cases} x + k = x - ۳ \Rightarrow k = -۳ \times \\ x + k = -(x - ۳) \Rightarrow ۲x = ۳ - k \Rightarrow x = \frac{۳ - k}{۲} \end{cases}$$

در معادله‌ی اول هیچ مقداری برای $x$ به‌دست نمی‌آید، پس قابل‌قبول نیست. پس ارتفاع این مثلث برابر است با:

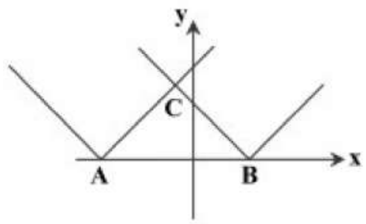
$$y = \left|\frac{۳ - k}{۲} + k\right| = \left|\frac{۳ + k}{۲}\right| \xlongequal{k > ۰} \frac{۳ + k}{۲}$$

مساحت مثلث مطابق فرض سؤال مقدار ۱۶ است. پس می‌توان نوشت:

$$S = \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{k + ۳}{۲}\right) \times (k + ۳) \Rightarrow ۱۶ = \frac{(k + ۳)^۲}{۴} \Rightarrow (k + ۳)^۲ = ۶۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k + ۳ = -۸ \Rightarrow k = -۱۱ \times \\ k + ۳ = ۸ \Rightarrow k = ۵ \end{cases}$$

چون $k$ مقداری مثبت است (انتقال به سمت چپ بوده)، پس فقط مقدار $k = ۵$ قابل‌قبول است.



۱۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $k$ ضرب کنیم. اگر $k > ۱$، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

مطابق نمودار، اعداد ۱ و ۳- صفرهای این سهمی هستند. پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $f(x) = a(x + ۳)(x - ۱)$ است.

از طرفی این سهمی از نقطه‌ی $(۰,۳)$ می‌گذرد، پس: $f(۰) = ۳ \Rightarrow a(۳)(-۱) = ۳ \Rightarrow a = -۱$

پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $f(x) = -(x + ۳)(x - ۱)$ است.

بنابراین طول رأس سهمی برابر $x = \frac{-۳ + ۱}{۲} = -۱$ و در نتیجه عرض آن برابر $f(-۱) = ۴$ است. عرض رأس سهمی $۲f(۱ - x)$ مطابق نکته، دو برابر عرض رأس سهمی $f(x)$، یعنی برابر ۸ است.

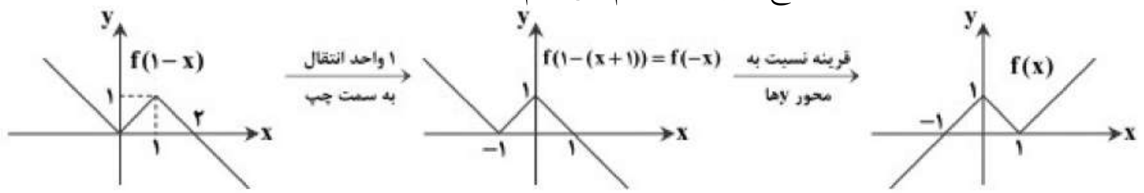
۱۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی $x = ۰$ عضو دامنه است، پس $b$ مثبت است. از طرفی دامنه‌ی تابع به سمت $x$های منفی است، پس $a$ منفی است. حال در نمودار $\sqrt{bx + a}$ چون $a < ۰$ و $b > ۰$، پس ریشه‌ی زیر رادیکال مثبت است. یعنی یا گزینه ی ۲ درست است یا گزینه‌ی ۳. چون $b$ مثبت است، دامنه‌ی به‌سمت $x$های مثبت است، یعنی گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

۱۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

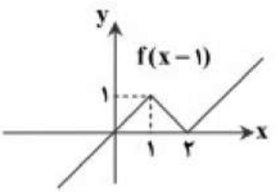
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$، اگر $k > ۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

ابتدا به کمک نمودار داده شده، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:




دقت کنید که برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی تابع $f(x)$ وقتی نمودار $f(۱ - x)$ را ۱ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم، باید ضریب منفی پشت $x$ را برای عدد ۱ هم در نظر بگیریم.

با توجه به گزینه‌ها در بازه‌ی $[۰,۲]$، نمودار $f(۱ - x)$ بر نمودار $f(x - ۱)$ منطبق است.



۱۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: الگوهایی را که در آن‌ها اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عددی ثابت است، الگوی خطی می‌نامیم.
اختلاف جملات متوالی را در گزینه‌ها پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $۲ \xrightarrow[۱]{} ۳ \xrightarrow[۲]{} ۵ \xrightarrow[۳]{} ۸ \xrightarrow[۴]{} ۱۲,\ldots$

گزینهٔ ۲: $۱ \xrightarrow[۱]{} ۲ \xrightarrow[۲]{} ۴ \xrightarrow[۳]{} ۷ \xrightarrow[۴]{} ۱۱,\ldots$

گزینهٔ ۳: $۱۱ \xrightarrow[-۴]{} ۷ \xrightarrow[-۴]{} ۳ \xrightarrow[-۴]{} -۱ \xrightarrow[-۴]{} -۵,\ldots$

گزینهٔ ۴: $۱ \xrightarrow[۰]{} ۱ \xrightarrow[۱]{} ۲ \xrightarrow[۱]{} ۳ \xrightarrow[۲]{} ۵ \xrightarrow[۳]{} ۸,\ldots$

فقط اختلاف جملات متوالی در گزینهٔ ۳ عددی ثابت است، پس فقط الگوی ارائه شده در گزینهٔ ۳، یک الگوی خطی است و جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $t_n = -۴n + ۱۵$ می‌باشد.

۱۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته: اگر $B \subseteq A$ و $B$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $A$ نیز یک مجموعهٔ نامتناهی است.
مطابق نکته، گزینهٔ ۴ پاسخ است.
دقت کنید که در گزینه‌های ۱ و ۳، اگر $A$ دارای یک زیرمجموعهٔ متناهی باشد، $A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

۱۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول:
می‌دانیم هر جملهٔ دنبالهٔ هندسی از ضرب قدرنسبت در جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید (به‌جز جملهٔ اول). بنابراین برای به‌دست آوردن جملهٔ چهارم، کافی است جملهٔ ششم را دو بار بر ۳ تقسیم کنیم:

$$t_۵ = \frac{t_۶}{۳} = \frac{\frac{۱}{۹}}{۳} = \frac{۱}{۲۷} \qquad\qquad t_۴ = \frac{t_۵}{۳} = \frac{\frac{۱}{۲۷}}{۳} = \frac{۱}{۸۱}$$

راه‌حل دوم:
نکته: جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و $r$ قدرنسبت می‌باشد. $(t_۱ , r \neq ۰)$
مطابق نکته می‌توان نوشت:

$$t_۶ = t_۴ r^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۹} = t_۴ \times ۳^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۹} = ۹t_۴ \Rightarrow t_۴ = \frac{۱}{۸۱}$$

۱۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: جملهٔ $n$اُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و $r$ قدرنسبت می‌باشد.

$(t_۱ , r \neq ۰)$

در دنبالهٔ هندسی داده‌شده، این دنباله برابر است با:

$$t_۷ = t_۱ r^۶ = ۴۸۶ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۶ = ۲ \times ۳^۵ \times \frac{۱}{۳^۶} = \frac{۲}{۳}$$

۱۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست آید. یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت قدرنسبت دنباله می‌گویند.

دنباله به‌صورت مقابل است: $a , ۱۳ , ۱۷ , ۲۱ , b$

قدرنسبت این دنباله برابر $۱۷ - ۱۳ = ۴$ است، پس $a = ۱۳ - ۴ = ۹$ و $b = ۲۱ + ۴ = ۲۵$.

بنابراین: $a + b = ۳۴$