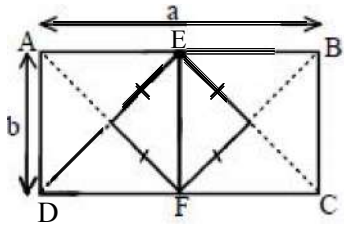


۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که میانه و نیمساز همواره داخل مثلث قرار دارند، پس محل همرسی آنها نیز همواره داخل مثلث می‌باشد.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که زاویه بین قطرهای متوازی الاضلاع قابل تغییر است، بنابراین بی‌نهایت جواب دارد.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

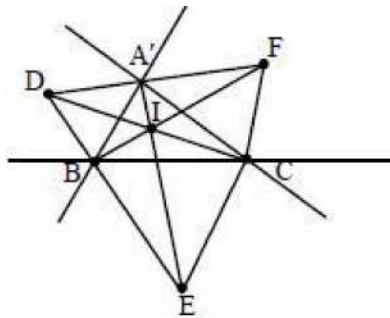
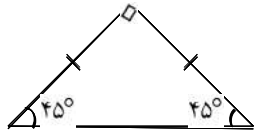


$$EF = a - b \Rightarrow \text{قطر مربع} = \frac{a - b}{\sqrt{2}} = \text{طول ضلع مربع}$$

در این حالت قطر مربع با عرض مستطیل برابر است:

$$\Rightarrow a - b = b \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

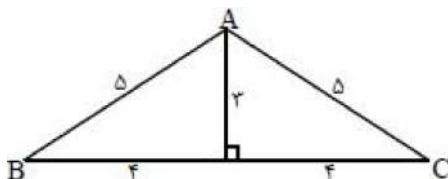
۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین همواره زاویه حاده برابر 45° است، پس اطلاعات جدیدی نیست.



۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

فاصله یکسان تا اضلاع توسط نیمسازها ایجاد می‌شود هم نیمسازهای داخلی و هم نیمسازهای خارجی. در شکل روبه‌رو این نقاط به نمایش گذاشته شده‌اند. فقط E، I، F و D این خاصیت را دارند.

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی‌الساقین مجموع فواصل هر نقطه دلخواه دلخواه روی قاعده تا دو ساق برابر است با طول ارتفاع وارد بر ساق.



$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

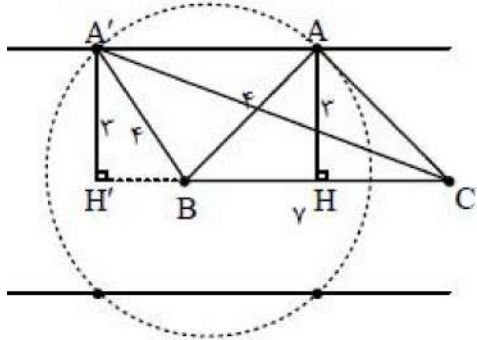
$$S = \frac{BH' \times AC}{2} = 12 \Rightarrow \frac{BH' \times 5}{2} = 12 \Rightarrow BH' = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

فقط گزینه (۱) صدق می‌کند. $9 - 5 < a < 9 + 5 \Rightarrow 4 < a < 14$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا ضلع BC به طول ۷ را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ رسم می‌کنیم دو خط به موازات BC و به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم تا دایره را در ۴ نقطه مختلف قطع نماید. از بین این مثلث‌ها ۲ مثلث با هم هم‌نهشت نیستند، پس مسئله ۲ جواب دارد $(\triangle ABC, \triangle A'BC)$.



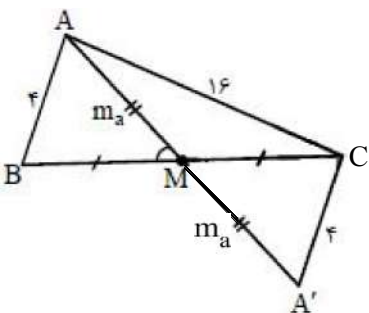
۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی‌الاضلاع رابطه زیر برقرار است:

ارتفاع مثلث $OE + OF = OD = AH$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 24\sqrt{3} \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 9 = AH$$

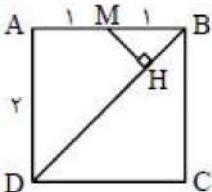
۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قضیه نامساوی مثلثی در $\triangle AA'C$:



$$\begin{cases} 4 + 16 > 2m_a \Rightarrow m_a > 10 \\ 4 + 2m_a > 16 \Rightarrow m_a > 6 \end{cases} \Rightarrow 6 < m_a < 10$$

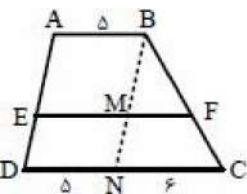
فقط ۷ در این بازه است.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\triangle ABD \sim \triangle BMH \Rightarrow \frac{MH}{AD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{MH}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از B موازی AD رسم می‌کنیم:



$$\frac{AE}{ED} = 2 \Rightarrow \frac{AE}{AE + ED} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BM}{BN} = \frac{MF}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MF = 4$$

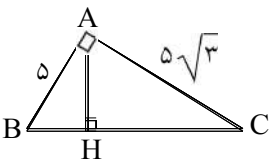
از طرفی: $EM = 5 \Rightarrow EF = 9$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آنگاه $\frac{a+b}{b+d} = \frac{a}{b}$ استفاده کرده، می نویسیم.

$$\frac{12-x}{10-y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{12-x}{x} = \frac{10-y}{y}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{10}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{10}{12} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}} \frac{x+y}{x} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 + 75 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

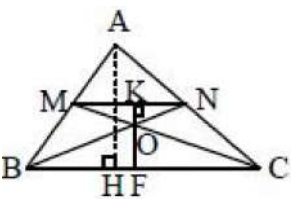
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 25 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 2/5$$

$$HC = BC - BH = 10 - 2/5 = 7/5 \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{2/5}{7/5} = \frac{1}{3}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. CM میانه است پس:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{OK}{OF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OK}{KF} = \frac{1}{3} \\ \text{از طرفی: } KF = \frac{1}{2}AH \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OK}{AH} = \frac{1}{6}$$

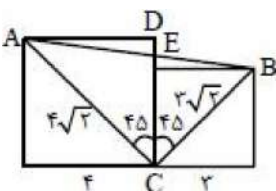


$$\frac{S_{MNO}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}OK \times MN}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ABC, \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 9 \\ B = \text{مشترک} \end{aligned} \right.$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم قطر مربع، نیمساز زوایای آن می باشد، بنابراین:



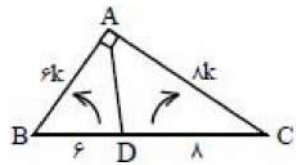
$$\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 45 \Rightarrow \widehat{ACB} \text{ نیمساز } CD$$

طبق قضیه نیمساز داخلی برای رأس C از مثلث ABC داریم:

$$CE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(6k)^2 + (8k)^2 = 14^2 \Rightarrow k = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$



$$\text{ارتفاع} \times \text{وتر} = AB \times AC \Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{6(7/5) \times 8(\frac{7}{5})}{14} = \frac{672}{100}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 - A_1 = B \\ AD = BD \Rightarrow A_1 = B \end{array} \right\} \\ \Rightarrow 100 = 2B \Rightarrow B = 50^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرچه نسبت تشابه دو مثلث بزرگتر باشد، مثلث دوم بزرگتر و لذا محیط بیشتری خواهد داشت، بنابراین لازم است ضلع ۱۰ از مثلث دوم با ضلع ۴ از مثلث اول متناظر باشد، پس:

$$k_{\max} = \frac{10}{4} = 2/5$$

$$\frac{\text{محیط مثلث ۲}}{\text{محیط مثلث ۱}} = k \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث ۲}}{4 + 7 + 5} = 2/5 \Rightarrow \text{محیط مثلث ۲} = 16 \times 2/5 = 40$$

(توجه: گزینه (۱) دام دارد.)

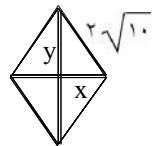
۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABK و CLD متساوی‌الساقین هستند، پس $AK = 6$ و $DL = 6$
 $16 + 16 + 6 + 6 = 44$
 بنابراین:

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر نسبت قطرها ۱ به ۳ باشد، نسبت نصف قطرها هم همین است، پس:

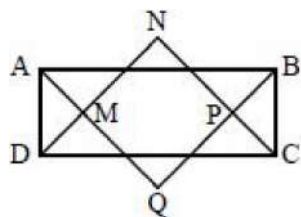
$$\frac{y}{x} = 3$$

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow 10x^2 = 40 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{مساحت لوزی} = 4 \times \frac{x \times y}{2} = 24$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی ایجاد شده مربع است. مثلث‌های DNC و PBC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند، پس:



$$NC = \frac{3\sqrt{2}x}{2}, PC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

در نتیجه طول ضلع مربع به وجود آمده از برخورد نیمسازها $NP = \sqrt{2}x$ و در نهایت: $S = 2x^2$.

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم برابر ۱۳۵ درجه است که مجموع آن با زاویه داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۹۵ خواهد شد، پس زاویه داخلی n ضلعی منتظم نامعلوم $195 - 135 = 60$ می‌شود، بنابراین:

$$\frac{180(n-2)}{n} = 60 \Rightarrow n = 24$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر ضلع مربع را x در نظر بگیریم، $AN = \frac{4}{5}x$ و $BM = \frac{x}{4}$ خواهد بود:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABMN} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4x}{5} + \frac{x}{4} \right) \times x = \frac{21x^2}{40} \\ S_{NMCD} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{5} + \frac{3x}{4} \right) \times x = \frac{19x^2}{40} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABMN}}{S_{MNDC}} = \frac{21}{19}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه پیک داریم: $\frac{b}{2} - 1 + i$

$$\text{برای } 10 \text{ ضلعی: } \frac{10}{2} - 1 + 16 = 20$$

$$\text{برای مثلث: } \frac{3}{2} - 1 + 3 = \frac{7}{2}$$

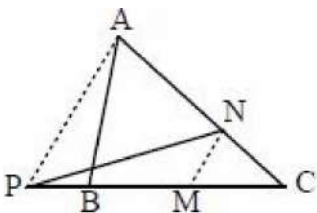
$$\text{مساحت سایه: } 20 - \frac{7}{2} = \frac{33}{2}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S_{APC}}{S_{AMC}} = \frac{AP}{AM} = K \Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{AMC}} \times \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = K \times t \Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = Kt$$

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = t$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



چهارضلعی ANMP دوزنقه است و $S_{PNM} = S_{AMN}$ ، پس:

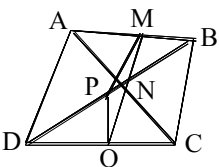
$$S_{AMC} = S_{PNC}$$

$$\text{از طرفی: } \frac{S_{ABC}}{S_{AMC}} = 2, \text{ در نتیجه: } \frac{S_{ABC}}{S_{PNC}} = 2$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر S مساحت متوازی الاضلاع باشد:

$$S_{\triangle ADP} + S_{\triangle APB} + S_{\triangle PDB} = \frac{1}{2}S = S_{\triangle APB} + S_{\triangle PDC} \Rightarrow 2 + S_{\triangle PDB} = 5 \Rightarrow S_{\triangle PDB} = 3$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه تالس داریم:



$$MN = PO = \frac{1}{2}BC$$

$$NO = PM = \frac{1}{2}AD$$

$$\Rightarrow MN + NO + PO + PM = AD + BC$$