۱ **گزینه ۱**

حرکت کندشونده است

نمودار مکان - زمان سهمی است، پس شتاب حرکت ثابت است و معادلهٔ مکان - زمان $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$ و معادلهٔ سرعت - زمان $v = at + v_۰$ است.

$$(t = ۰ : x = ۲۵۰m) \Rightarrow x_۰ = ۲۵۰m$$

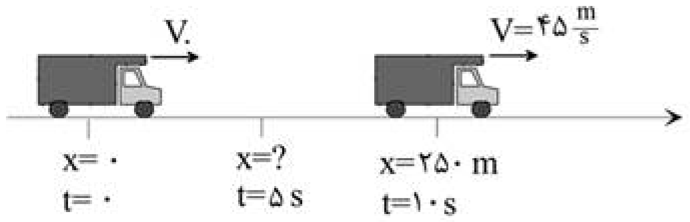
$$(t = ۲۵s : x = ۰) \Rightarrow \frac{۱}{۲}a \times ۲۵^۲ + ۲۵v_۰ + ۲۵۰ = ۰ \Rightarrow \frac{۲۵}{۲}a + v_۰ = -۱۰$$

$$(t = ۲۰s : x = ۲۵۰m) \xrightarrow[\text{از رأس آن می گذرد}]{\text{محور تقارن سهمی}} \text{نقطه مربوط به } t = ۱۰s \text{ رأس سهمی است} \Rightarrow v(۱۰) = ۰ \Rightarrow ۱۰a + v_۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}a = -۱۰ \Rightarrow a = -۴\ m/s^۲ \Rightarrow v_۰ = +۴۰\ m/s$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۴۰^۲ = ۲ \times (-۴) \times (x - ۲۵۰) \Rightarrow x - ۲۵۰ = \frac{۴۰ \times ۴۰}{۲ \times ۴} = ۲۰۰ \Rightarrow x = ۴۵۰m$$

۲ **گزینه ۳**



$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}.\Delta t \Rightarrow ۲۵۰ = \frac{v_۰ + ۴۵}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow v_۰ = ۵\,m/s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴۵ - ۵}{۱۰} = ۴\,m/s^۲$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۵^۲ + ۵ \times ۵ = ۷۵m$$

۳ **گزینه ۲**

- شتاب حرکت همواره مثبت است، یعنی سرعت آن پیوسته زیاد می‌شود (نمودار $v - t$ صعودی است) و چون سرعت اولیه صفر بوده است اندازهٔ سرعت هم پیوسته زیاد می‌شود (حرکت تندشونده است).
- جهت سرعت و شتاب ثابت است. (علامت a و v همواره مثبت است).
- اندازهٔ شتاب ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

۴ گزینه ۴

اتومبیل A ده ثانیه با شتاب ثابت حرکت می‌کند $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{30-20}{1} = 10s$

اتومبیل B ده ثانیه با شتاب ثابت حرکت می‌کند $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{40-0}{4} = 10s$

$$\left.\begin{array}{l} x_A = \dfrac{20+30}{2} \times 10 + 30t = 30t + 250 \\ x_B = \dfrac{0+40}{2} \times 10 + 40t = 40t + 200 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_A = x_B} \begin{array}{l} 40t + 200 = 30t + 250 \\ \Rightarrow 10t = 50 \Rightarrow t = 5s \end{array}$$

۵ ثانیه پس از پایان حرکت شتابدار، ماشین‌ها به هم می‌رسند.

$$x = 30 \times 5 + 250 = 400m$$

۵ گزینه ۴

با استفاده از مشتق ضمنی:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = (\tfrac{3}{2}x + 2)v_x \;\Rightarrow\; v_y = (\tfrac{3}{2} \times 2 + 2)v_x \;\Rightarrow\; v_y = 5v_x$$

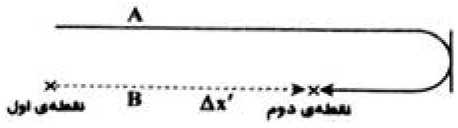
۶ گزینه ۳

ابتدا تعیین کنیم که اولین نقطهٔ برخورد کجا است.

$$\Delta t_A = \Delta t_B \Rightarrow \frac{2+\Delta x}{v_A} = \frac{\Delta x}{v_B} \Rightarrow \frac{2+\Delta x}{1/5} = \frac{\Delta x}{1} \Rightarrow 0/5\Delta x = 2 \Rightarrow \Delta x = 4m$$

پس تا انتهای مسیر $10m$ باقی می‌ماند.

در زمانی که دوندهٔ B از اولین برخورد تا دومین نقطهٔ برخورد را طی می‌کند، دوندهٔ A تا انتهای مسیر رفته و برمی‌گردد.



$$v_A = 1/5m/s \quad , \quad v_B = 1m/s$$

$$\Delta t'_A = \Delta t'_B \Rightarrow \frac{10+(10-\Delta x')}{v_A} = \frac{\Delta x'}{v_B} \Rightarrow \frac{20-\Delta x'}{1/5} = \frac{\Delta x'}{1} \Rightarrow 2/5\Delta x' = 20$$

$$\Rightarrow \Delta x' = 8m$$

۷ گزینه ۴

$$v_0 = 0m/s \;,\; v_1 = at + v_0 = 2 \times 10 + 0 = 20m/s$$

مرحلهٔ دوم $: 56 = +\frac{1}{2}a' \times 4^2 + 20 \times 4 \Rightarrow 8a' = -24 \Rightarrow a' = -3m/s^2$

$$v_2 = a't + v_1 = -3 \times 4 + 20 = 8m/s$$

مرحلهٔ سوم $: v_3^2 - v_2^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_3^2 - 8^2 = 2 \times 5 \times 8 \Rightarrow v_3^2 = 144 \Rightarrow v_3 = 12m/s$

۸ **گزینه ۳**

اگر حرکت را از لحظهٔ $t = ۳s$ به بعد در نظر بگیریم، مانند آن است که جسم در مدت $۱۱ - ۳ = ۸s$ و با سرعت اولیهٔ $v_۰ = ۰m/s$ به اندازهٔ $-۱۶m$ جابه‌جا شده است.

$$-۱۶ = \frac{۱}{۲}a \times ۸^۲ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}m/s^۲$$

زمان را باید $۵ - ۳ = ۲s$ جایگذاری کنیم:

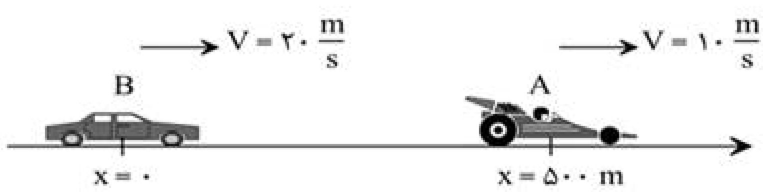
$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -\frac{۱}{۲} \times ۲ + ۰ = -۱m/s$$

۹ **گزینه ۲**

در حرکت بر خط راست راستای بردارهای سرعت و شتاب همان راستای مسیر حرکت است (گزینهٔ ۲ ناممکن است) (گزینهٔ ۴ ممکن است).
در حرکت بر مسیر غیرمستقیم حتی اگر اندازهٔ سرعت، ثابت باشد حرکت شتاب‌دار است؛ مثلاً گردش یک ماشین در سر پیچ جاده درحالی‌که اندازهٔ سرعت آن ثابت است (گزینهٔ ۳ ممکن است).
هرگاه زاویهٔ میان $\vec{a}$ و $\vec{v}$ حاده (یا صفر) باشد، حرکت تندشونده است (گزینهٔ ۱ ممکن است).

۱۰ **گزینه ۱**

لحظهٔ $t = ۰$ زمانی است که وضعیت زیر برقرار است.



۱۵ ثانیه طول می‌کشد تا سرعت A به $۴۰m/s$ برسد. $(v = at + v_۰ \Rightarrow ۴۰ = ۲t + ۱۰ \Rightarrow t = ۱۵s)$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_A = t^۲ + ۱۰t + ۵۰۰$$

تا زمانی که سرعت B بیشتر است فاصلهٔ دو اتومبیل کم می‌شود و از زمانی‌که سرعت A بیشتر شود، فاصلهٔ آن‌ها دوباره زیاد می‌شود؛ پس کمترین فاصلهٔ آن‌ها در زمانی است که سرعت‌ها برابر شود.

$$v_A = ۲۰m/s \Rightarrow ۲t + ۱۰ = ۲۰ \Rightarrow t = ۵s \Rightarrow \begin{cases} x_B = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰m \\ x_A = ۲۵ + ۵۰ + ۵۰۰ = ۵۷۵m \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A - x_B = ۴۷۵m$$

۱۱ گزینه ۴

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} \Rightarrow (\frac{t_{AB}}{t_{AC}})^{۲} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow (\frac{t_{AB}}{۱+t_{AB}})^{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{t_{AB}}{۱+t_{AB}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱ + t_{AB} = t_{AB}\sqrt{۲} \Rightarrow t_{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} = \sqrt{۲}+۱ \simeq ۲/۴s$$

$$(\frac{t_{AB}}{t_{AD}})^{۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow t_{AD} = t_{AB} \cdot \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \times ۲/۴$$

$$v = at + v_{\circ} \Rightarrow v_D \simeq -۱۰ \times ۱/۷ \times ۲/۴ \simeq ۴۰/۸m/s$$

اگر بدون اعمال تقریب‌ها محاسبه کنیم پاسخ کمی بیشتر از $۴۱m/s$ خواهد بود.

۱۲ گزینه ۴

تا زمانی که هیچ‌یک از دو گلوله به زمین نرسیده‌اند معادلهٔ مکان- زمان آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$y_A = -۵t^{۲} + ۲۰t y_B = -۵t^{۲} - ۱۰t$$

(جهت مثبت را روبه بالا و نقطهٔ $y = ۰$ را محل پرتاب در نظر گرفته‌ایم) و فاصلهٔ دو جسم از یکدیگر نیز برابر است با: $y_A - y_B = ۳۰t$.

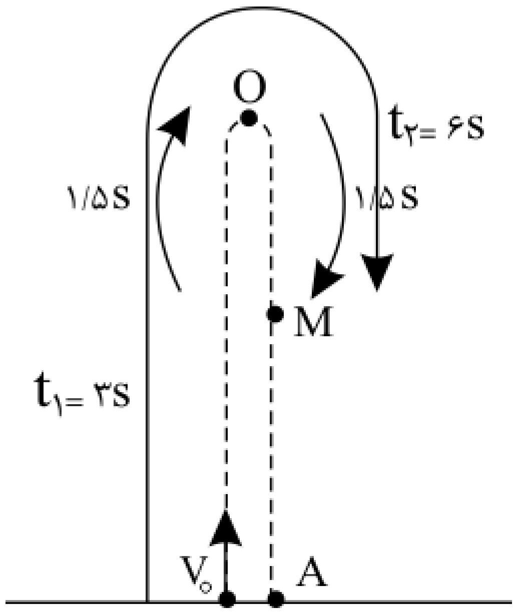
پس ابتدا باید بررسی کنیم که آیا در $t = ۲/۵s$ گلولهٔ B به زمین رسیده یا نه؟

$$y_B = -۵ \times (۲/۵)^{۲} - ۱۰ \times ۲/۵ = -۳۱/۲۵ - ۲۵ = -۵۶/۲۵m$$

گلوله‌ها از ارتفاع ۵۰ متری پرتاب شده‌اند، پس قبل از $t = ۲/۵s$ گلولهٔ B به زمین نرسیده است. بنابراین فاصلهٔ دو گلوله در این لحظه به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y_A - y_B = ۳۰ \times ۲/۵ = ۷۵m$$

۱۳ گزینه ۱



باتوجه‌به شکل، می‌توان زمان اوج را به دست آورد:

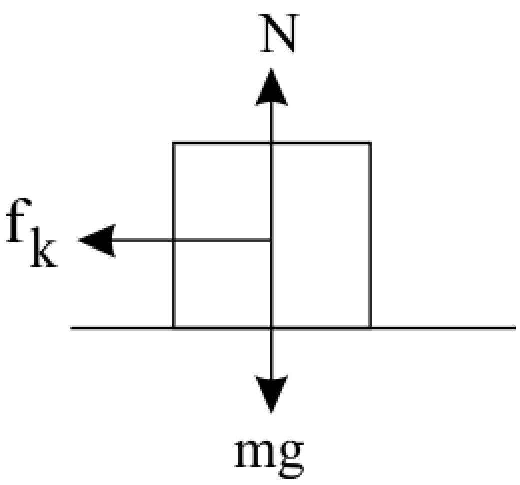
$$t_{\text{اوج}} = \frac{t_۱+t_۲}{۲} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \frac{۳+۶}{۲} = \frac{v_0}{۱۰} \Rightarrow v_0 = ۴۵m/s$$

از لحظهٔ اوج $(t = ۴/۵s)$ تا رسیدن به نقطهٔ M مدت ۱/۵ ثانیه سقوط آزاد انجام می‌شود.

$$OM = \frac{۱}{۲}g \times (۱/۵)^۲ = ۵ \times (۱/۵)^۲ = ۵ \times ۲/۲۵ = ۱۱/۲۵m$$

$$d = AO + OM = \frac{v_0^۲}{۲g} + OM = \frac{۴۵\times۴۵}{۲۰} + ۱۱/۲۵ = ۱۰۱/۲۵ + ۱۱/۲۵ = ۱۱۲/۵m$$

۱۴ گزینه ۳



در مسیر AB نیروهای وارد بر وزنه به ترتیب زیر است.

$$N = mg \Rightarrow f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$\sum F = ma \Rightarrow f_k = ma \Rightarrow a = g\mu_k = ۱۰ \times ۰/۴ = ۴m/s^۲$$

از A تا B یک حرکت کندشونده با شتاب ثابت داریم که اندازهٔ شتاب آن $۴m/s^۲$ است.

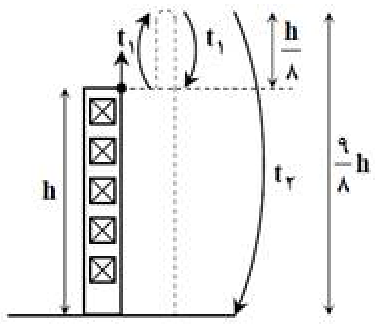
$$v^۲ - v_0^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow v_B^۲ - ۱۰۰ = ۲ \times (-۴) \times ۸ \Rightarrow v_B^۲ = ۳۶ \Rightarrow v_B = ۶m/s$$

در نقطهٔ B وزنه با سرعت $۶m/s$ به‌صورت افقی پرتاب می‌شود.

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۵ = -۵t^۲ \Rightarrow t = ۱s$$

$$\Delta x = v_x \Delta t = ۶ \times ۱ = ۶m$$

۱۵ گزینه ۳



در حرکت سقوط آزاد، مدت حرکت از محل پرتاب تا اوج با مدت برگشت از اوج تا محل پرتاب برابر است.

همچنین از نقطهٔ اوج تا زمین، یک حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه داریم $\left(y = \frac{1}{2}at^2\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{h}{8} = \frac{1}{2}at_1^2 \\ \frac{9}{8}h = \frac{1}{2}at_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 3$$

۱۶ گزینه ۳

$$\overline{V} = \frac{V_1+V_2}{2}, V_1 = +20\, m/s$$

توجه می‌کنیم که V_2 منفی است و اندازهٔ آن بزرگ‌تر از V_1 است، پس $\overline{V}$ منفی است.

$$-15 = \frac{20+V_2}{2} \Rightarrow V_2 = -50\, m/s$$

$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 0 - 20^2 = 2(-10)\Delta y \Rightarrow \Delta y = 20m$ فاصلهٔ محل پرتاب تا نقطهٔ اوج

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 50^2 - 0 = 2(-10)\Delta y$$

$\Rightarrow \Delta y = -125m \Rightarrow |\Delta y| = 125m$ فاصلهٔ نقطهٔ اوج تا زمین

$$d = 20 + 125 = 145\, m$$

۱۷ گزینه ۴

تغییر جهت حرکت یعنی تغییر علامت سرعت، پس جهت حرکت در زمانی عوض می‌شود که علامت سرعت عوض شود، یعنی زمانی که سرعت لحظه‌ای صفر شود و همچنین قبل و بعدازآن لحظه علامت‌های متفاوتی داشته باشد.

$$V(3) - V(0) = a\Delta t = 3 \times 4 \Rightarrow V(3) - 0 = 12 \Rightarrow V(3) = 12\, m/s$$

مساحت زیر نمودار $a - t$ برابر ΔV است. اگر لحظهٔ تغییر علامت سرعت را t_1 بنامیم:

$$V(t_1) - V(3) = -2 \times (t_1 - 3)$$

$$0 - 12 = -2(t_1 - 3) \Rightarrow t_1 - 3 = 6 \Rightarrow t_1 = 9s$$

یعنی در $t_1 = 9s$ جهت حرکت تغییر می‌کند. حالا باید از $t = 0$ تا $t = 9\,s$ جابه‌جایی را حساب کنیم.

درحرکت با شتاب ثابت: $\Delta x = \frac{V_1+V_2}{2}.\Delta t$

$$\Delta x = \frac{0+12}{2} \times (3 - 0) + \frac{12+0}{2} \times (9 - 3) = (6 \times 3) + (6 \times 6) = 54\, m$$

چون جهت حرکت در این مدت ثابت است، مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است.

۱۸ گزینه ۳

$$V = at + V_\circ \Rightarrow a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{20}{5} = -4\frac{m}{s^2}\ ,\ V_\circ = 20\,m/s$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_\circ t \Rightarrow 0 - 150 = \frac{1}{2} \times (-4) \times t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 20t - 150 = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} \Rightarrow t = 15, -5 \Rightarrow t = 15\,s$$

۱۹ گزینه ۱

برای دو ثانیهٔ آخر، معادلات را می‌نویسیم:

$$V = at + V_\circ \Rightarrow V_2 = V_1 + 2 \times 10 = V_1 + 20$$

$$\Delta y = \frac{V_1 + V_2}{2}.\Delta t = \frac{V_1 + (V_1 + 20)}{2} \times 2 = 2V_1 + 20 = 80$$

$\Rightarrow V_1 = 30\,m/s$ سرعت در ابتدای ۲ ثانیهٔ آخر

$V_2 = V_1 + 20 = 50\,m/s$ سرعت هنگام رسیدن به زمین

$$50 = 15 + 10t \Rightarrow t = 3/5\,s$$

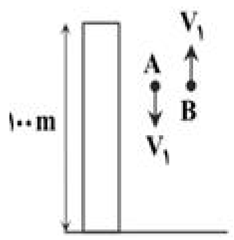
۲۰ گزینه ۳

$V^2 - V_\circ^2 = -2g\Delta y \xrightarrow{\text{برابر } \Delta y \text{ و } v_\circ}$ سرعت‌ها هنگام رسیدن به زمین، هم‌اندازه است

زمان رسیدن به زمین به مؤلفهٔ عمودی حرکت بستگی دارد. $V_{\circ y_A} = 0$ و $V_{\circ y_B}$ روبه‌بالا است، پس A زودتر به زمین می‌رسد.

۲۱ گزینه ۲

فرض کنید برای گلولهٔ A حرکت از نقطهٔ شروع تا لحظه‌ای که به B برسد به مدت t_1 طول بکشد $(-V_1 = -gt_1 + 0)$.



برای B هم همین مدت طول می‌کشد تا سرعتش از V_1 به صفر برسد، زیرا شتاب هر دو گلوله برابر است $(0 = -gt_1 + V_1)$، پس می‌توان گفت نقطهٔ اوج B همان محل رهاشدن A است.

$$H = \frac{V_\circ^2}{2g} \Rightarrow 100 = \frac{V_\circ^2}{20} \Rightarrow V_\circ^2 = 2000 \Rightarrow V_\circ = 20\sqrt{5}\,m/s$$

۲۲ **گزینه ۱**

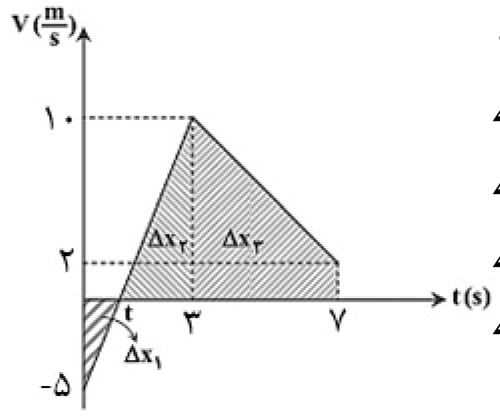
در مورد اندازهٔ سـرعت رسیدن به زمین، فقط اندازهٔ سرعت اولیه مهم است و نه جهت آن. اگر h ارتفاع محل پرتاب از زمین و $V_۰$ اندازهٔ سرعت اولیه باشد:

پایستگی انرژی مکانیکی : $\frac{۱}{۲}mV^۲ = \frac{۱}{۲}mV_۰^۲ + mgh$

پس هرکدام $V_۰$ بزرگ‌تری داشته باشد با V بیشتر به زمین می‌رسد. در اینجا $V_{۰B}$ بزرگ‌تر است، پس B با سرعت بیشتری به زمین می‌رسد.
در مورد زمان رسـیدن به زمین $V_{۰y}$ اهمیت دارد. هرکـدام $V_{۰y}$ روبه‌بالای بیشتری داشـته باشـد، دیرتر به زمین می‌رسـد. در اینجا $V_{۰y}$ هر دو $۲۰m/s$ است، یعنی همزمان می‌رسند.

۲۳ **گزینه ۲**

ابتدا نمودار سرعت- زمان حرکت را رسم می‌کنیم (مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر با Δv است).
چون سطح زیر نمودار $v-t$ برابر با Δx است، بیشترین فاصله در پایان حرکت اتفاق می‌افتد. ابتدا t را به دست می‌آوریم.



$$\frac{۵}{۱۰} = \frac{t}{۳-t} \Rightarrow t = ۱s$$

$$\Delta x_۱ = \frac{-۵\times۱}{۲} = -۲/۵\,m$$

$$\Delta x_۲ = \frac{۲\times۱۰}{۲} = ۱۰\,m$$

$$\Delta x_۳ = \frac{(۱۰+۲)۴}{۲} = ۲۴\,m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = -۲/۵ + ۱۰ + ۲۴ = ۳۱/۵\,m$$

۲۴ **گزینه ۴**

جهت مثبت را روبه‌بالا فرض کرده‌ایم.

$$\left.\begin{array}{l} y_A = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_۰t = -۵t^۲ \\ y_B = -۵(t-۲)^۲ - ۳(t-۲) \end{array}\right\} \Rightarrow y_A = y_B \Rightarrow -۵t^۲ = -۵(t-۲)^۲ - ۳۰(t-۲)$$

$$\Rightarrow -۵(t^۲ - t^۲ + ۴t - ۴) + ۳۰(t-۲) = ۰ \Rightarrow -۲۰t + ۲۰ + ۳۰t - ۶۰ = ۰ \Rightarrow t = ۴s$$

یعنی ۴ ثانیه بعد از رهاشدن A، سنگ B به آن می‌رسد. سنگ A در این ۴ ثانیه ۸۰ متر پایین آمده است $(y = -۵\times۴^۲ = -۸۰\,m)$
$h = ۱۲۰ - ۸۰ = ۴۰\,m$

۲۵ **گزینه ۱**

بیشترین فاصلهٔ دو جسم از هم، زمانی است که اولی به زمین برسد. (چرا؟)

$$\left.\begin{array}{l} \text{حرکت گلولهٔ اول} : y_۱ = \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \Rightarrow ۱۲۵ = ۵t_۱^۲ \Rightarrow t_۱ = ۵s \\ \text{حرکت گلولهٔ دوم} : y_۲ = \frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \Rightarrow ۱۲۵ - ۴۵ = ۵t_۲^۲ \Rightarrow ۸۰ = ۵t_۲^۲ \Rightarrow t_۲ = ۴s \end{array}\right\} \Rightarrow |\Delta t| = t_۱ - t_۲ = ۵ - ۴ = ۱s$$

۲۶ **گزینه ۳**

باتوجه‌به تقارن سهمی، رأس سهمی نقطهٔ $(t = ۵\,s\ ,\ x = -۲۰\,m)$ است. یعنی $t = ۵\,s$ لحظه‌ای است که جهت حرکت عوض می‌شود، پس:

$$v(t = ۵\,s) = ۰$$

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t \Rightarrow x(۵) - x(۰) = \frac{v(۰) + v(۵)}{۲} \times ۵ \Rightarrow -۲۰ - ۳۰ = \frac{v_۰ + ۰}{۲} \times ۵ \Rightarrow v_۰ = -۲۰\,m/s$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۵ - ۲۰ \Rightarrow a = ۴ m/s^۲$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a \cdot \Delta x \Rightarrow ۲۴^۲ - (-۲۰)^۲ = ۲ \times ۴ \times (x - ۳۰) \Rightarrow (۲۴ - ۲۰)(۲۴ + ۲۰) = ۸(x - ۳۰) \Rightarrow \frac{۴ \times ۴۴}{۸}$$

$$= x - ۳۰ \Rightarrow x - ۳۰ = ۲۲ \Rightarrow x = ۵۲m$$

۲۷ **گزینه ۳**

در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست، جابه‌جایی‌های انجام‌شده در T ثانیه‌های متوالی، تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌سازند. در اینجا جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ۳ ثانیه‌های متوالی، تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۸ می‌سازند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} a \times ۳^۲ = ۱۸ \Rightarrow a = ۲\,m/s^۲ \\ \text{جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول} : \Delta x = \frac{۱}{۲} a \times ۳^۲ + ۳v_۰ = ۹ + ۳v_۰ = ۳۹ \Rightarrow v_۰ = ۱۰\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow v = at + v_۰$$

$$\Rightarrow v(۱۰) = ۲ \times ۱۰ + ۱۰ = ۳۰\,m/s$$

۲۸ **گزینه ۳**

$v = at + v_۰ \Rightarrow ۴۰ = ۴t + ۰ \Rightarrow t = ۱۰\,s \Rightarrow$ مدت ۱۰ ثانیه طول می‌کشد تا B به $۴۰\,m/s$ برسد

$$x_A = v_۰ t + x_۰ = ۲۰t$$

$$\begin{cases} x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ = ۲t^۲ + ۲۰۰ \leftarrow \text{در ۱۰ ثانیهٔ نخست} \\ x_B = ۴۰(t - ۱۰) + ۴۰۰ \leftarrow \text{از } t = ۱۰\,s \text{ به بعد} \end{cases}$$

(در مدت ۱۰ ثانیه اتومبیل B به نقطهٔ $x = ۴۰۰\,m$ می‌رسد. $x_B = ۲ \times ۱۰^۲ + ۲۰۰ = ۴۰۰$)

از $t = ۱۰\,s$ به بعد اتومبیل B جلوتر از A است و سرعتش هم بیشتر است، پس فاصلهٔ آن‌ها به‌تدریج زیاد می‌شود، یعنی حداقل فاصله در همان ۱۰ ثانیهٔ نخست است.

$$x_B - x_A = ۲t^۲ + ۲۰۰ - ۲۰t = ۲(t^۲ - ۱۰t + ۱۰۰) = ۲\left[(t - ۵)^۲ + ۷۵\right]$$

حداقل این مقدار در $t = ۵s$ است.

$$t = ۵s \Rightarrow x_B - x_A = ۱۵۰\,m$$

۲۹ **گزینه ۴**

$$\left.\begin{aligned}&2T_{\text{اوج}} = 4 \Rightarrow 2\frac{v_{0y}}{g} = 4 \Rightarrow v_{0y} = 20\,m/s\\&R = 2v_{0x}T_{\text{اوج}} \Rightarrow 80 = 4v_{0x} \Rightarrow v_{0x} = 20\,m/s\end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 20\sqrt{2}\,m/s$$

اگر v_0 ثابت باشد، بیشترین ارتفاع اوج به ازای زاویهٔ پرتاب 90° به دست می‌آید و در این حالت ارتفاع اوج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(20\sqrt{2})^2}{20} = 40\,m$$

۳۰ **گزینه ۲**

$$y = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow \begin{cases} y_A = -5t^2 + 18t\\ y_B = -5t^2 + 34t\end{cases} \Rightarrow y_B - y_A = 16t$$

با گذشت زمان پیوسته فاصلهٔ دو گلوله زیاد می‌شود و این وضع ادامه دارد تا زمانی که گلولهٔ A به زمین برسد (A قبل از B به زمین می‌رسد)؛ پس بیشترین فاصلهٔ دو گلوله در لحظه‌ای است که A به زمین می‌رسد. یعنی در لحظهٔ $t = 3/6\,s$:

$$t_{\text{کل}} = \frac{2v_{0A}}{g} = \frac{2\times 18}{10} = 3/6\,s$$

$$v_B = -gt + v_0 = -10 \times 3/6 + 34 = -2\,m/s \Rightarrow |v_B| = 2\,m/s$$

۳۱ **گزینه ۲**

$$t_{\text{اوج}} = \frac{v_{0y}}{g} = 3 \Rightarrow v_{0y} = 30\,m/s$$

$$v_0 = 50m/s, v_{0y} = 30m/s \xrightarrow{V_{0x}=\sqrt{v_0^2-V_{0y}^2}} v_{0x} = 40m/s$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-gt + v_{0y}}{v_{0x}} \Rightarrow \pm 1 = \frac{-10t + 30}{40} \Rightarrow -10t + 30 = \pm 40 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 & \text{غقق}\\ t = 7s\end{cases}$$

۳۲ **گزینه ۱**

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ = \frac{۱}{۲}a \times ۱^۲ = \frac{a}{۲} \\ x_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow$$ جابه‌جایی خودروی A در ثانیهٔ دوم حرکتش : $\Delta x_۲ = ۲a - \frac{a}{۲} = \frac{۳}{۲}a = ۱۲ \Rightarrow a_A = ۸\,m/s^۲$

$$\left.\begin{array}{l} x_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ = ۲a \\ x_۳ = \frac{۱}{۲}a \times ۳^۲ = \frac{۹}{۲}a \end{array}\right\} \Rightarrow$$ جابه‌جایی خودروی B در ثانیهٔ سوم حرکتش : $\Delta x_۳ = \frac{۹}{۲}a - ۲a = \frac{۵}{۲}a = ۱۵ \Rightarrow a_B = ۶\,m/s^۲$

جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم خودروی A $\left(t = ۴\,s \text{ تا } t = ۶\,s\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_۴ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۴^۲ = ۶۴\,m \\ x_۶ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶^۲ = ۱۴۴\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x_A = ۱۴۴ - ۶۴ = ۸۰\,m$$

جابه‌جایی در سه ثانیهٔ دوم خودروی B $\left(t = ۳\,s \text{ تا } t = ۶\,s\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_۳ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳^۲ = ۲۷\,m \\ x_۶ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶^۲ = ۱۰۸\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x_B = ۱۰۸ - ۲۷ = ۸۱\,m$$

بنابراین جابه‌جایی متحرک A در دو ثانیهٔ سوم، $۱\,m$ $(= ۸۱ - ۸۰)$ کمتر از جابه‌جایی متحرک B در سه ثانیهٔ دوم است.

۳۳ **گزینه ۴**

$$v(۰) = v_۰ \;,\; v(۸) = v_۰ + ۲ \times ۸ = v_۰ + ۱۶ \;,\; v_{(۱۰)} = v_{(۸)} - ۴ \times ۲ = v_{(۸)} - ۸ = v_۰ + ۸$$

$$\Delta x = \frac{v_{(۰)} + v_{(۸)}}{۲} \times ۸ + \frac{v_{(۸)} + v_{(۱۰)}}{۲} \times ۲ = \left(v_۰ + v_۰ + ۱۶\right) \times ۴ + \left(v_۰ + ۱۶ + v_۰ + ۸\right)$$

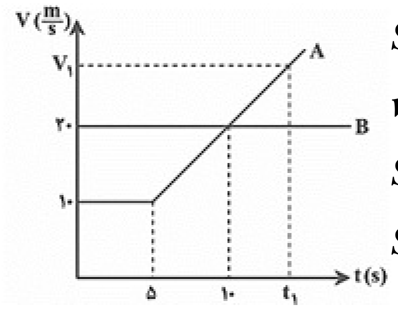
$$\Delta x = ۱۰v_۰ + ۸۸$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰v_۰ + ۸۸}{۱۰} = v_۰ + ۸/۸ = ۱۴ \Rightarrow v_۰ = ۵/۲\,m/s$$

۳۴ **گزینه ۳**

به هم رسیدن دو متحرک یعنی A و چون از یک محل شروع می‌کنند؛ یعنی $\Delta x_A = \Delta x_B$ پس باید مساحت زیر نمودار v_1 آن‌ها برابر باشد.

اگر در شکل زیر t_1 زمان به هم رسیدن آن‌ها باشد، لازم است مساحت زیر دو نمودار از $t = ۰$ تا $t = t_1$ با یکدیگر مساوی باشد.



$$S_B = ۲۰t_1 \qquad a_A = \frac{۲۰-۱۰}{۱۰-۵} = ۲\, m/s^۲$$

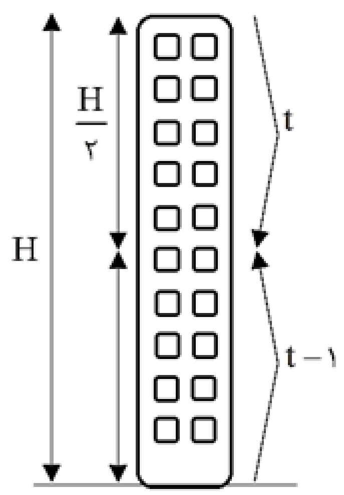
$$v_1 = ۲۰ + (t_1 - ۱۰) \times ۲ = ۲t_1$$

$$S_A = ۵۰ + \frac{۱۰+v_1}{۲} \times (t_1 - ۵) \Rightarrow S_A = ۵۰ + (۵ + t_1)(t_1 - ۵) = t_1^۲ + ۲۵$$

$$S_A = S_B \Rightarrow t_1^۲ + ۲۵ = ۲۰t_1 \Rightarrow t_1^۲ - ۲۰t_1 + ۲۵ = ۰ \Rightarrow t_1 = ۱۰ + \sqrt{۷۵} = ۱۰ + ۵\sqrt{۳}\, s$$

$$x_A = x_B = ۱۰۰ + ۲۰(۱۰ + ۵\sqrt{۳}) = ۳۰۰ + ۱۰۰\sqrt{۳}\, m$$

۳۵ **گزینه ۲**



$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= -\frac{H}{۲} = -۵t^۲ \\ \Delta y &= \frac{H}{۲} = -۵(t-۱)^۲ + ۲۵\,(t-۱) \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۵t^۲ = -۵(t-۱)^۲ + ۲۵\,(t-۱)$$

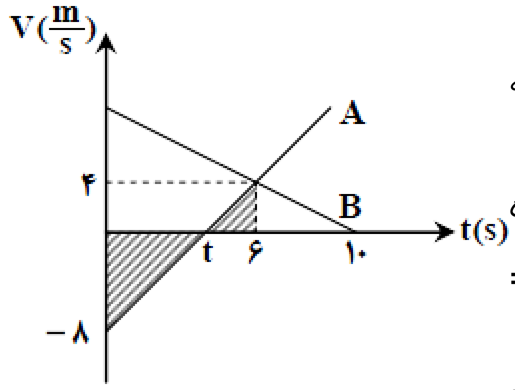
$$t^۲ = -t^۲ - ۱ + ۲t + ۵t - ۵$$

$$\Rightarrow ۲t^۲ - ۷t + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{۳}{۲}s \text{ یا } t = ۲s$$

$$\frac{H}{۲} = ۵t^۲ \Rightarrow H = ۱۰t^۲ \Rightarrow H = \frac{۹۰}{۴}m \text{ یا } ۴۰\,m$$

۳۶ **گزینه ۴**



باتوجه‌به آنکه شتاب حرکت جسم A مثبت است، حرکت کندشوندهٔ A در مدتی انجام می‌شود که سرعت آن منفی است.

تشابه دو مثلث هاشورخورده : $\frac{۴}{۸} = \frac{۶-t}{t} \Rightarrow t = ۱۲ - ۲t \Rightarrow ۳t = ۱۲$

$\Rightarrow t = ۴s$

شیب نمودار سرعت- زمان : $a_B = \frac{-۴}{۱۰-۶} = -۱ m/s^۲$

برای متحرک B : $v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۱ \times ۱۰ + v_{۰B} \Rightarrow v_{۰B} = ۱۰ m/s$

$\Delta x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_{۰B}t = \frac{۱}{۲}(-۱) \times ۴^۲ + ۱۰ \times ۴ = ۳۲ m$

۳۷ **گزینه ۳**

$$\left.\begin{aligned} v_A &= -gt + v_{۰A} = -۱۰t + ۴۰ \\ v_B &= -gt + v_{۰B} = -۱۰t - ۱۰ \\ v_A &= |v_B| \end{aligned}\right\} \Rightarrow -۱۰t + ۴۰ = ۱۰t + ۱۰ \Rightarrow ۲۰t = ۳۰ \Rightarrow t = ۱/۵ s$$

$$\left.\begin{aligned} y_A &= -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{۰A}t + y_{۰A} = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۱/۵)^۲ + ۴۰ \times ۱/۵ \\ y_B &= -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{۰B}t + y_{۰B} = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۱/۵)^۲ - ۱۰ \times ۱/۵ + ۱۰۰ \end{aligned}\right\} \Rightarrow |y_B - y_A| = |۴۰ \times ۱/۵ + ۱۰ \times ۱$$

$/۵ - ۱۰۰| = ۲۵ m$

۳۸ **گزینه ۲**

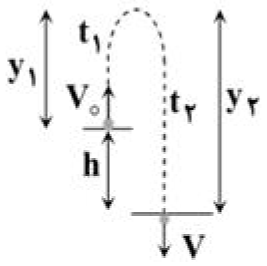
$\Delta x_A = vt = ۲۰t$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_B &= \frac{۱}{۲}at'^۲ + v_۰t' + v_Bt'' = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵^۲ + ۰ + v_B(t-۵) \\ v_B &= at' = ۵ \times ۵ = ۲۵ m/s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_B = ۶۲/۵ + ۲۵(t-۵) = ۲۵t - ۶۲$$

$/۵$

$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow ۲۵t - ۶۲/۵ = ۲۰t \Rightarrow ۵t = ۶۲/۵ \Rightarrow t = ۱۲/۵ s$

۳۹ گزینه ۴

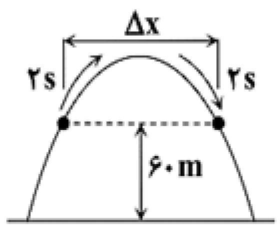


بزرگی سرعت هنگام برخورد جسم با زمین را v در نظر می‌گیریم، زمان رفت که سرعت مثبت است را t_1 و زمان بازگشت که سرعت منفی است را t_2 و مسافت رفت را y_1 و مسافت برگشت را y_2 می‌نامیم.

$$t_1 = \frac{2}{5}t_2 \Rightarrow \frac{v_0}{g} = \frac{2}{5}\frac{v}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{5}v \Rightarrow v = \frac{5}{2}v_0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{v_0^2}{2g} \\ y_2 = \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{\frac{25}{4}v_0^2}{2g} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{\frac{25}{4}v_0^2}{2g}}{\frac{v_0^2}{2g}} = \frac{25}{4}$$

۴۰ گزینه ۳



از نقطهٔ اوج تا ارتفاع ۶۰ متری زمین ۲ ثانیه طول می‌کشد (چرا؟)

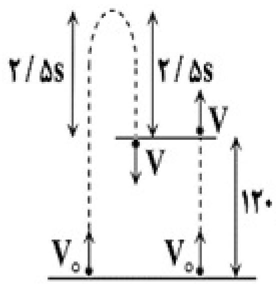
$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 = -5 \times 2^2 = -20\,m$$

$$H = 60 + 20 = 80\,m$$

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} \Rightarrow 80 = \frac{v_{0y}^2}{20} \Rightarrow v_{0y} = 40\,m/s \Rightarrow v_0 \sin 45^\circ = 40\,m/s$$

$$v_x = v_0 \cos 45^\circ = 40 \Rightarrow \Delta x = v_x \Delta t = 40 \times 4 = 160\,m$$

۴۱ **گزینه ۳**



چون گلوله‌ها از یک نقطه و با یک سرعت اولیه پرتاب شده‌اند، پس در لحظهٔ رسیدن به هم سرعت‌های برابر دارند (چرا؟) و سرعت هرکدام برابر است با:

$$v = \frac{g\Delta t}{۲} = ۱۰ \times \frac{۵}{۲} = ۲۵\ m/s$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \Rightarrow -۱۲۰ = \frac{-۱}{۲} \times ۱۰ \times t^۲ - ۲۵t$$

$$\Rightarrow ۵t^۲ + ۲۵t - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۵t - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (t+۸)(t-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۸ & \text{غ.ق.ق} \\ t = ۳\ s \end{cases}$$

۴۲ **گزینه ۴**

$$\text{ارتفاع اولیهٔ گلولهٔ } B : h = \frac{v_۰^۲}{۲g}$$

$$\text{برای گلولهٔ } A : \frac{۳}{۴} \times \frac{v_۰^۲}{۲g} = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t \Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲ - v_۰t + \frac{۳v_۰^۲}{۸g} = ۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_۰ \pm \sqrt{v_۰^۲ - \frac{۱۲v_۰^۲g}{۱۶g}}}{g} = \frac{v_۰ \pm \frac{v_۰}{۲}}{g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳v_۰}{۲g} & \text{غقق} \\ \frac{v_۰}{۲g} \end{cases}$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{۰B}t + y_{۰B} = -\frac{۱}{۲}g \times \left(\frac{v_۰}{۲g}\right)^۲ - \frac{v_۰}{۲}\left(\frac{v_۰}{۲g}\right) + \frac{v_۰^۲}{۲g}$$

$$= -\frac{v_۰^۲}{۸g} - \frac{v_۰^۲}{۴g} + \frac{v_۰^۲}{۲g} = \frac{v_۰^۲}{۸g}$$

$$y_A = \frac{۳}{۴} \times \frac{v_۰^۲}{۲g} = \frac{۳v_۰^۲}{۸g}$$

$$y_A - y_B = \left(\frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۸}\right)\frac{v_۰^۲}{g} = \frac{v_۰^۲}{۴g}$$

۴۳ **گزینه ۴**

رابطهٔ مستقل از شتاب $\left(\Delta x = \frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t\right)$ را برای هر مرحله به کار می‌بریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{\text{مرحله اول}} &= \frac{۰+۴۰}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow \Delta x_{۰\to۱۰\,s} = ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰\ m \\ \Delta x_{\text{مرحله دوم}} &= \frac{۴۰+۲۴}{۲} \times ۲ \Rightarrow \Delta x_{۱۰\,s\to۱۲\,s} = ۲ \times ۳۲ = ۶۴\ m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_{۰\to۱۲\,s} = ۲۰۰ + ۶۴ = ۲۶۴\ m$$

$$\Rightarrow \bar{v}_{۰\to۱۲\,s} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۶۴}{۱۲} = ۲۲\ m/s$$

۴۴ **گزینه ۴**

ابتدا حرکت را از لحظهٔ $t = ۴s$ تا $t = ۰$ برعکس در نظر می‌گیریم که در این صورت سـرعت اولیه صفر خواهد بود و متحرک در مدت ۴ ثانیه ۲۴ متر جابه‌جا شده است.

$$۳۰ - ۶ = ۲۴ = \frac{۱}{۲}a \times ۴^{۲} \Rightarrow a = ۳\, m/s^{۲}$$

حال از نقطهٔ $t = ۴s$ تا $t = ۱۰s$ به مدت ۶ ثانیه حرکت را بررسی می‌کنیم که بازهم سرعت اولیهٔ آن صفر می‌شود.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶^{۲} = ۵۴\, m \Rightarrow x_{۱۰} = ۵۴ + ۶ = ۶۰\, m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۰ - ۳۰}{۱۰} = ۳\, m/s$$

۴۵ **گزینه ۱**

$$t = ۰ \xrightarrow[\Delta x_{۱} = \frac{۰ + v_{۱}}{۲}\Delta t_{۱}]{\text{حرکت با شتاب ثابت}} t = ۲۰s \xrightarrow[\Delta x_{۲} = v_{۱}\Delta t_{۲}]{\text{حرکت با سرعت ثابت}} t = ۴۰s \xrightarrow[\Delta x_{۳} = \frac{v_{۱} + ۰}{۲}\Delta t_{۳}]{\text{حرکت با شتاب ثابت}} t = ۴۴s$$

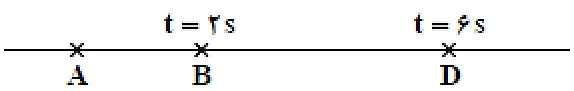
برای کل مدت ۴۴ ثانیه می‌توان گفت $\Delta x = \bar{v}.\Delta t$ درنتیجه:

$$۴۴ \times ۳۲ = ۲۰ \times \frac{۰ + v_{۱}}{۲} + ۲۰v_{۱} + ۴ \times \frac{v_{۱} + ۰}{۲} \Rightarrow ۴۴ \times ۳۲ = ۳۲v_{۱} \Rightarrow v_{۱} = ۴۴\, m/s$$

در قسمت کندشوندهٔ حرکت، سرعت از $v_{۱}$ به صفر می‌رسد:

$$v = at + v_{۰} \Rightarrow ۰ = ۴a + ۴۴ \Rightarrow a = -۱۱\, m/s^{۲} \Rightarrow |a| = ۱۱\, m/s^{۲}$$

۴۶ **گزینه ۱**



متحرک اول : $\Delta x = \frac{v_{۰} + v}{۲}\Delta t$

$$\left.\begin{array}{l} AD = \dfrac{۰ + v_D}{۲} \times ۶ = ۳v_D \\ \left.\begin{array}{l} v = at + v_{۰} \Rightarrow v_{۱} = v_B = ۲a \\ v_D = ۶a \end{array}\right\} \Rightarrow v_D = ۳v_{۱} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = ۳ \times ۳v_{۱} = ۹v_{۱} \qquad (۱)$$

متحرک دوم : $\Delta x = v.\Delta t \Rightarrow AD = ۶v_{۲} \xrightarrow{(۱)} ۹v_{۱} = ۶v_{۲} \Rightarrow v_{۱} = \frac{۲}{۳}v_{۲}$

بیان دوم: $v_{۲}$ با سرعت متوسط متحرک اول برابر است.

$$\bar{v} = \frac{v_A + v_D}{۲} = v(۳) \Rightarrow v_{۲} = v(۳) = ۳a$$

$$v_{۱} = v(۲) = ۲a \Rightarrow v_{۱} = \frac{۲}{۳}v_{۲}$$

۴۷ **گزینه ۲**

فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر یعنی: $|y_B - y_A|$

$$\left.\begin{array}{l} y_B = \frac{1}{2}at^2 + v_\circ t = -5t^2 + 30t \\ y_A = \frac{1}{2}at^2 + v_\circ t = -5t^2 + 20t \end{array}\right\} \Rightarrow |y_B - y_A| = 10t$$

با گذشت زمان، فاصلهٔ A و B از یکدیگر زیاد می‌شود و این وضعیت تا زمانی که A به زمین برسد ادامه دارد، پس بیشترین فاصلهٔ دو گلوله در زمانی است که A به زمین می‌رسد.

$$\text{زمان رسیدن } A \text{ به زمین}: t = \frac{2v_\circ}{g} = \frac{2\times 20}{10} = 4\,s$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{فاصلهٔ گلوله در } t = 4\,s: 10 \times 4 = 40\,m \\ \text{ارتفاع اوج گلولهٔ } A: H = \frac{v_\circ^2}{2g} = \frac{20 \times 20}{20} = 20\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{40}{20} = 2$$

(تذکر: به این موضوع فکر کنید که اگر $v_{\circ A} = 10\,m/s$ و $v_{\circ B} = 60\,m/s$، بیشترین فاصلـهٔ دو گلوله از یکدیگر چند متر می‌شود؟ پاسخ: ۱۸۰ متر)

۴۸ **گزینه ۴**

$$\text{ارتفاع نقطهٔ اوج نسبت به محل پرتاب } H = \frac{v_\circ^2}{2g} = \frac{15\times 15}{20} = 11/25\,m$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 + v_\circ t = -5 \times 4^2 + 15 \times 4 = -20\,m$$

یعنی زمین از محل پرتاب ۲۰ متر پایین‌تر است.

$$\text{کل مسافت}: 2 \times 11/25 + 20 = 22/5 + 20 = 42/5\,m$$

ثانیـهٔ آخر مـدتی است که متحرک از محل پرتاب تا زمین را طی می‌کند (زمان رفت‌وبرگشت تا محل پرتاب $3\,s$ است. $\left(\frac{2v_\circ}{g} = \frac{2\times 15}{10} = 3\,s\right)$ که در این مدت ۲۰ متر طی می‌شود.

$$\frac{\text{مسافت ثانیهٔ آخر}}{\text{مسافت کل}} = \frac{20}{42/5} = \frac{8}{17}$$

۴۹ **گزینه ۳**

$$x_A = 20\,t$$

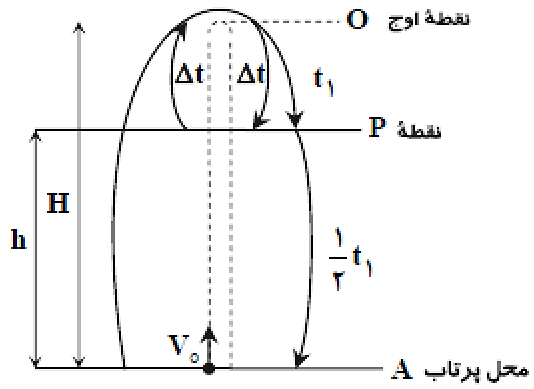
ده ثانیه طول می‌کشد تا سرعت B به $40\,m/s$ برسد $(v = at + v_\circ \Rightarrow 40 = 4t)$ یعنی در $t = 10\,s$ سرعت آن به $40\,m/s$ می‌رسد و از آن به بعد با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

$$x_B = \frac{0+40}{2} \times 10 + 40(t - 20) \Rightarrow x_B = 200 + 40t - 800 = 40t - 600$$

$$\text{به هم رسیدن } A \text{ و } B \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow 40t - 600 = 20t \Rightarrow 20t = 600 \Rightarrow t = 30\,s$$

$$\Rightarrow x_B = x_A = 30 \times 20 = 600\,m$$

۵۰ گزینه ۲



اگر زمان رسیدن به نقطهٔ اوج را T و مدت حرکت از نقطهٔ P تا اوج را Δt بنامیم می‌توان گفت:

$$\begin{cases} t_1 = T + \Delta t \\ \frac{t_1}{2} = T - \Delta t \end{cases}$$

(مدت حرکت از محل پرتاب تا P با مدت حرکت از P تا محل پرتاب برابر است)

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{4}{3}T \\ \Delta t = \frac{1}{3}T \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} OP = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ OA = \frac{1}{2}gT^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OP = \frac{1}{9}H \Rightarrow h = \frac{8}{9}H \Rightarrow \frac{8}{9}\frac{v_0^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{9g}$$

۵۱ گزینه ۲

$v = 4t + v_0$

جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ سوم $: \Delta x = \frac{v(8)+v(12)}{2} \times 4 = 2[v(8) + v(12)]$

جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول $: \Delta x = \frac{v(0)+v(4)}{2} \times 4 = 2[v(0) + v(4)]$

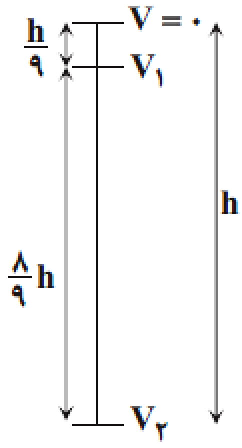
$$\Rightarrow 3 = \frac{v(8)+v(12)}{v(0)+v(4)} = \frac{(4\times 8+v_0)+(4\times 12+v_0)}{v_0+(4\times 4+v_0)} = \frac{80+2v_0}{16+2v_0}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{v_0+40}{v_0+8} \Rightarrow 3v_0 + 24 = v_0 + 40 \Rightarrow 2v_0 = 16 \Rightarrow v_0 = 8\,m/s$$

$$\bar{v}_{(0\to 10\,s)} = \frac{v(0)+v(10)}{2} = \frac{8+48}{2} = 28\,m/s$$

۵۲ گزینه ۴

$$\frac{v_1+v_2}{2} = 60 \Rightarrow v_1 + v_2 = 120\, m/s \qquad (1)$$



یک بار برای $\frac{h}{9}$ اول و بار دیگر برای کل حرکت، رابطهٔ مستقل از زمان می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 - 0 &= 2g \times \frac{h}{9} \\ v_2^2 - 0 &= 2gh \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\div} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_2 = 3v_1 \qquad (2)$$

$$(1), (2) : 4v_1 = 120 \Rightarrow v_1 = 30\, m/s \quad , \quad v_2 = 90\, m/s$$

$$v_2^2 - 0 = 2gh \Rightarrow 90^2 = 2 \times 10 \times h \Rightarrow h = 405\, m$$

۵۳ گزینه ۱

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -gt + v_0 = -10t - 5 \\ v_2 &= -gt + v_0 = -10t + 45 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = -v_1 \Rightarrow -10t + 45 = 10t + 5 \Rightarrow 20t = 40 \Rightarrow t = 2\, s$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 = -5 \times 2^2 - 5 \times 2 + 112 = 82\, m \\ y_2 &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = -5 \times 2^2 + 45 \times 2 = 70\, m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta y = 82 - 70 = 12\, m$$

۵۴ گزینه ۲

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-(-4)}{5-0} = 1\, m/s^2 \Rightarrow v_A = at + v_0 \Rightarrow v_A = t - 4$$

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-1}{7-5} = -\frac{1}{2}\, m/s^2 \Rightarrow v_0 = -at = -(-\frac{1}{2}) \times 7 = 3/5\, m/s \Rightarrow v_B = -\frac{1}{2}t + 3/5$$

برای تغییر جهت A:

$$v_A = 0 \Rightarrow t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4\, s$$

$$v_B = -\frac{1}{2} \times 4 + 3/5 = -2 + 3/5 = 1/5\, m/s$$

۵۵ **گزینه ۲**

راه‌حل اول:

از معادلهٔ مسیر نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

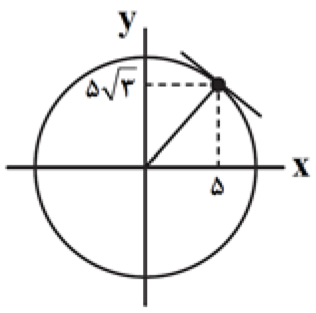
$$x^{۲} + y^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow ۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = ۰ \Rightarrow xv_x + yv_y = ۰ \Rightarrow ۵v_x + ۵\sqrt{۳}v_y = ۰ \Rightarrow v_x = -\sqrt{۳}v_y$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^{۲} + v_y^{۲}} \Rightarrow ۲۰ = \sqrt{v_y^{۲} + ۳v_y^{۲}} = ۲|v_y| \Rightarrow |v_y| = ۱۰\,m/s$$

$$(v_y = ۱۰\,m/s \text{ و } v_x = -۱۰\sqrt{۳}\,m/s) \text{ یا } (v_y = -۱۰\,m/s \text{ و } v_x = ۱۰\sqrt{۳}\,m/s)$$

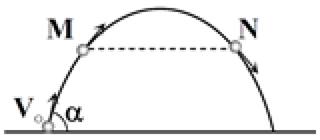
راه‌حل دوم:

در این حرکت، سرعت بر مسیر مماس است؛ پس مطابق شکل زیر، سرعت بر خط $y = x\sqrt{۳}$ عمود است، یعنی سرعت موازی خط $y = \frac{-۱}{\sqrt{۳}}x$ است، یعنی $v_x = -v_y\sqrt{۳}$ و از اینجا به بعد مثل راه‌حل قبلی عمل می‌کنیم.



۵۶ **گزینه ۲**

در نقاط هم‌تراز مانند M و N اندازهٔ سرعت گلوله برابر است و فاصلهٔ زمانی بین این دو موقعیت برابر است با $\Delta t = \frac{۲v_y}{g}$؛ بنابراین داریم:



$$۶ = ۲\frac{v_y}{g} \Rightarrow v_y = ۳۰\,m/s$$

$$v^{۲} = v_x^{۲} + v_y^{۲} \Rightarrow (۱۰\sqrt{۱۳})^{۲} = (۳۰)^{۲} + (v_x)^{۲} \Rightarrow v_x = ۲۰\,m/s$$

$$v_x = v_{۰x} = v_۰ \cos\alpha \Rightarrow ۲۰ = ۵۰\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۲}{۵}$$

۵۷ گزینه ۳

$$A = ۴\,cm$$
$$\frac{۳}{۲}T = ۳\,s \Rightarrow T = ۲\,s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \pi\,rad/s$$
$$v_{\max} = A\omega = ۴\pi\,cm/s$$
$$\left.\begin{array}{l} t_۱ : v = -v_{\max}\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{-۴\pi\sqrt{۳}}{۲}\,cm/s \\ t_۲ : v = +v_{\max}\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{۴\pi\sqrt{۳}}{۲}\,cm/s \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta v = v_۲ - v_۱ = ۴\pi\sqrt{۳}\,cm/s$$
$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۱۲} + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۱۲} = \frac{۲}{۳}T = \frac{۴}{۳}\,s$$
$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴\pi\sqrt{۳}}{\frac{۴}{۳}} = ۳\pi\sqrt{۳}\,cm/s^۲$$

۵۸ گزینه ۳

مسئله را از لحظهٔ $t = ۴\,s$ تا لحظهٔ $t = ۰$ برعکس نگاه می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \Rightarrow (۲ - ۲۶) = \frac{۱}{۲} \times a \times ۴^۲ + ۰ \times ۴ \Rightarrow -۲۴ = ۸a \Rightarrow a = -۳\,m/s^۲$$

لحظهٔ $t = ۳\,s$ نسبت به لحظهٔ $t = ۴\,s$ یک ثانیه قبل‌تر است، پس می‌توان آن را به‌عنوان $v_۰$ انتخاب کرد و باتوجه‌به اینکه سرعت در لحظهٔ $t = ۴\,s$ صفر است، از رابطهٔ سرعت- زمان استفاده کرد:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۳ \times ۱ + v_{t=۳\,s} \Rightarrow v_{t=۳\,s} = ۳\,m/s$$

۵۹ گزینه ۱

برای اینکه قطار B کاملاً از A عبور کند باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_B = \Delta x_A + (۱۲۰ + ۱۸۰) \Rightarrow \dfrac{۱}{۲}at^۲ = ۲۰t + ۳۰۰ \\ \Delta x_B = ۹۰۰\,m \end{array}\right\} \Rightarrow ۹۰۰ = ۲۰t + ۳۰۰ \Rightarrow ۲۰t = ۶۰۰ \Rightarrow t = ۳۰\,s$$
$$۹۰۰ = \frac{۱}{۲} \times a \times ۳۰^۲ \Rightarrow a = ۲\,m/s^۲$$

۶۰ **گزینه ۱**

در مدت ۰/۵ ثانیه، اتومبیل A مسافت ۲۵ متر جلو می‌رود $(\Delta x = ۵۰ \times ۰/۵ = ۲۵\,m)$، پس لحظهٔ شروع ترمز، فاصلهٔ ماشین‌ها از یکدیگر ۸۰ متر است.

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \frac{۱}{۲}at^۲ + ۵۰t \\ x_B &= ۱۰t + ۸۰ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x_A = x_B} \frac{۱}{۲}at^۲ + ۴۰t - ۸۰ = ۰$$

باید این معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب نداشته باشد.

$$\Delta = ۱۶۰۰ + ۴ \times \frac{۱}{۲}a \times ۸۰ < ۰ \Rightarrow a < -۱۰\,m/s^۲$$

یعنی اندازهٔ شتاب A باید حداقل $۱۰\,m/s^۲$ باشد.

۶۱ **گزینه ۴**

بیان اول:

$$\left.\begin{aligned} v_۱ &= -۱۰t - ۱۰ \\ v_۲ &= -۱۰(t-۱) + ۳۰ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{v_۲ = -v_۱} ۱۰(t-۱) - ۳۰ = -۱۰t - ۱۰ \Rightarrow ۲۰t = ۳۰ \Rightarrow t = ۱/۵\,s$$

یعنی ۱/۵ ثانیه بعد از انداختن گلولهٔ اول به هم رسیده‌اند.

$$\left.\begin{aligned} y_۱ &= -۵t^۲ - ۱۰t + h \\ y_۲ &= -۵(t-۱)^۲ + ۳۰(t-۱) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{در } t=۱/۵\,s \text{ به هم می‌رسند؛ یعنی } y_۱ = y_۲} -۵ \times ۱/۵^۲ - ۱۰ \times ۱/۵ + h = -۵ \times ۰/۵^۲$$

$$+ ۳۰ \times ۰/۵$$

$$\Rightarrow -۵ \times (۱/۵^۲ - ۰/۵^۲) - ۱۵ - ۱۵ + h = ۰ \Rightarrow h = ۴۰\,m$$

بیان دوم: وقتی گلوله‌ها از کنار هم می‌گذرند، سرعت آن‌ها هم‌اندازه است؛ پس وقتی گلوله‌ای که از پایین پرتاب شده به محل انداختن دیگری برسد، سرعتش هم‌اندازهٔ سرعت پرتاب آن است (چرا؟)؛ یعنی می‌توان گفت که گلوله از پایین برج با سرعت $۳۰\,m/s$ پرتاب شده و با سرعت $۱۰\,m/s$ به بالای برج رسیده است.

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow ۱۰^۲ - ۳۰^۲ = ۲ \times (-۱۰) \times h \Rightarrow h = ۴۰\,m$$

۶۲ **گزینه ۲**

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \ , \ v = at + v_0 \ , \ \Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot \Delta t \ , \ x_0 = 10\,m$$

با توجه به تقارن سهمی، لحظهٔ $t = 3\,s$ متناظر رأس سهمی است؛ یعنی زمانی که سرعت صفر می‌شود.

$$v(3) = 0 \Rightarrow 3a + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = -3a$$

$$19 - 10 = \frac{0 + v_0}{2} \times 3 \Rightarrow 9 = \frac{3}{2}v_0 \Rightarrow v_0 = 6\ m/s \ \Rightarrow a = -2\ m/s^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 - 6^2 = 2 \times (-2) \times (0 - 10) \Rightarrow v^2 = 76 \Rightarrow |v| = 2\sqrt{19}\ m/s$$

۶۳ **گزینه ۱**

حرکت در ۱۰ ثانیهٔ نخست دارای شتاب ثابت است و از $t = 10\,s$ به بعد سرعت متحرک ثابت است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15-(-10)}{10} = \frac{5}{2}\ m/s^2, \ \ v_0 = -10\ m/s, x_0 = +15\,m$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{4}t^2 - 10t + 15 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 15 \times \frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}$$

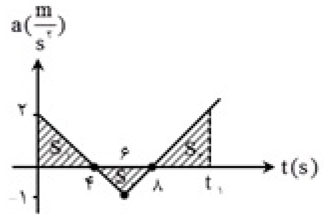
$$t = \frac{5 \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{\frac{5}{4}} = \frac{5 \pm \frac{5}{2}}{\frac{5}{4}} = 4 \pm 2 = \begin{cases} 2\,s \\ 6\,s \end{cases}$$

از $t = 6\,s$ به بعد همواره علامت سرعت (v) مثبت است؛ یعنی جهت حرکت دیگر تغییر نمی‌کند و متحرک به $x = 0$ بازنخواهد گشت.

۶۴ **گزینه ۳**

جهت حرکت زمانی تغییر می‌کند که علامت v عوض شود.

مساحت زیر نمودار شتاب - زمان برابر Δv است. یعنی باید زمانی را روی نمودار پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار برابر $+6$ باشد.



$$S_1 = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \Rightarrow \Delta v = +4\ m/s$$

$$S_2 = 1 \times \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \Delta v = -2\ m/s$$

$$S_1 - S_2 + S_3 = +6$$

$$4 - 2 + S_3 = 6 \Rightarrow S_3 = 4 \Rightarrow t_1 = 12\,s$$

با توجه به مساوی بودن شیب خط‌ها و اینکه $S_1 = S_3$ می‌توان گفت که مثلث قسمت سوم و اول برابرند و $t_1 = 12\,s$.

۶۵ **گزینه ۴**

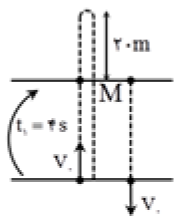
$\Delta y = \bar{v} \cdot \Delta t \Rightarrow -۱۲۰ = -۱۰ \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = ۱۲\,s$ کل زمان حرکت

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow -۱۲۰ = -۵ \times ۱۲^۲ + ۱۲v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۵۰\ m/s$$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \Delta y = -۵ \times ۳^۲ + ۳ \times ۵۰ = -۴۵ + ۱۵۰ = ۱۰۵\,m$$

یعنی ۳ ثانیه پس از پرتاب، ۱۰۵ متر بالاتر از نقطهٔ پرتاب است و درنتیجه ارتفاع آن تا زمین $۲۲۵\,m$ خواهد شد.

۶۶ **گزینه ۴**



حرکت گلوله از اوج تا M یک سقوط آزاد بدون سرعت اولیه است.

$$\Delta y = -\tfrac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۲۰ = -۵t^۲ \Rightarrow t = ۲s$$

از اوج تا M دو ثانیه طول می‌کشد، پس در هنگام بالا رفتن هم از M تا اوج دو ثانیه طول کشیده است.

$$T_{\text{اوج}} = ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow \frac{v_۰}{g} = ۶ \Rightarrow v_۰ = ۶۰\frac{m}{s} \Rightarrow H = \frac{v_۰^۲}{۲g} = ۱۸۰\,m$$

$$t_۲ = ۶ + ۲ = ۸\,s$$

۶۷ **گزینه ۲**

$$\Delta y = \tfrac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow -۷۵ = -۵t^۲ - ۱۰t \Rightarrow ۵t^۲ + ۱۰t - ۷۵ = ۰t^۲ + ۲t - ۱۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳\,s \\ t = -۵\,s \end{cases}$$

یعنی مجموع زمان رفت و برگشت گلولهٔ B هم ۳ ثانیه است.

$$۲T_{\text{اوج}} = ۳ \Rightarrow \frac{۲v_۰}{g} = ۳ \Rightarrow v_۰ = ۱۵\ m/s\ ,\ H = \frac{v_۰^۲}{۲g} = \frac{۱۵ \times ۱۵}{۲۰} = \frac{۴۵}{۴}m$$

مسافت طی شده دو برابر ارتفاع اوج است.

$$d = ۲ \times \tfrac{۴۵}{۴} = \tfrac{۴۵}{۲}m$$

۶۸ **گزینه ۳**

$$y = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t$$

اگر $t = ۰$ را زمان رهاشدن سنگ B در نظر بگیریم:

$$y_A = \frac{۱}{۲}(-۱۰)(t+۲)^{۲} = -۵(t+۲)^{۲} \quad y_B = \frac{۱}{۲}(-۱۰)t^{۲} = -۵t^{۲}$$

چون سنگ A همیشه پایین‌تر از سنگ B است. وقتی فاصلهٔ دو سنگ ۳۰ متر شود به این معنا است که A از B سی‌متر پایین‌تر است، یعنی $y_A - y_B = -۳۰\,m$.

$$y_A - y_B = -۳۰ \Rightarrow -۵(t+۲)^{۲} - (-۵t^{۲}) = -۳۰ \Rightarrow (t+۲)^{۲} - t^{۲} = ۶ \Rightarrow ۲t + ۲ = ۳ \Rightarrow t = ۰/۵\,s$$

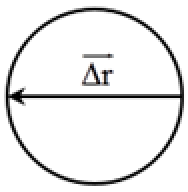
باید کنترل کنیم که آیا این جواب قابل‌قبول هست یا خیر؛ یعنی باید دید که آیا $(t = ۲ + ۰/۵ = ۲/۵)$ قبل از رسیدن A به زمین هست یا خیر.

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^{۲} \Rightarrow -۶۰ = -۵t^{۲} \Rightarrow t = \sqrt{۱۲} > ۲/۵$$

یعنی جواب به‌دست آمده قابل قبول است.

۶۹ **گزینه ۲**

در مدتی که نصف دایره طی می‌شود، اندازهٔ جابه‌جایی برابر قطر دایره و مسافت طی‌شده نصف محیط دایره است.



$$d = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi R = \pi R = ۳۰\pi\,m$$

$$d = v \cdot \Delta t \Rightarrow ۳۰\pi = ۱۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۳\pi\,s$$

$$\vec{\bar{v}} = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{۲R}{\Delta t} = \frac{۶۰}{۳\pi} = \frac{۲۰}{\pi}\,m/s$$

۷۰ **گزینه ۳**

$$v = at + v_{۰} \Rightarrow a = ۱۰\,m/s^{۲}\;,\; v_{۰} = -۵۰\,m/s$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t + x_{۰} \Rightarrow x = ۵t^{۲} - ۵۰t + x_{۰}$$

در مدتی که جهت حرکت ثابت باشد (علامت v تغییر نکند)، مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است. علامت سرعت در $t = ۵\,s$ تغییر می کند $(v = ۱۰t - ۵۰ = ۰ \Rightarrow t = ۵\,s)$

$$d = |x(۵) - x(۰)| + |x(۱۲) - x(۵)| = |-۱۲۵| + |۱۲۰ - (-۱۲۵)| = ۱۲۵ + ۲۴۵ = ۳۷۰\,m$$

۷۱ **گزینه ۳**

حرکت A یکنواخت است.

$$x = v \cdot t + x_\circ \Rightarrow x = ۱۰t + ۱۰۰$$

حرکت B یک حرکت با شتاب ثابت است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ \;,\; v = at + v_\circ \Rightarrow ۱۰ = ۵a + ۰ \Rightarrow a = ۲\ m/s^۲$$

$$x_B = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ + ۲۵ = t^۲ + ۲۵$$

وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، $x_A = x_B$ می‌شود.

$$x_A = x_B \Rightarrow t^۲ + ۲۵ = ۱۰t + ۱۰۰ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t - ۷۵ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵-(-۷۵)}}{۱} = ۵ \pm ۱۰ = ۱۵, -۵ \Rightarrow t = ۱۵s$$

۷۲ **گزینه ۲**

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ$$

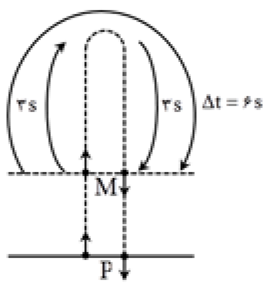
دو ثانیه سوم : $\Delta x = x(۶) - x(۴) = (۱۸a + ۶v_\circ) - (۸a + ۴v_\circ) = ۱۰a + ۲v_\circ = ۲۰$

دو ثانیهٔ پنجم : $\Delta x = x(۱۰) - x(۸) = (۵۰a + ۱۰v_\circ) - (۳۲a + ۸v_\circ) = ۱۸a + ۲v_\circ = ۲۴$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۵a + v_\circ = ۱۰ \\ ۹a + v_\circ = ۱۲ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times(+۹) \\ \times(-۵) \end{array}$$

$$\Rightarrow ۴v_\circ = ۳۰ \Rightarrow v_\circ = ۷/۵\ m/s$$

۷۳ **گزینه ۳**



از نقطهٔ اوج (O) تا نقطهٔ M (محل به‌هم‌رسیدن دو گلوله) ۳ ثانیه طول می‌کشد.

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \Rightarrow \Delta y = -۵ \times ۳^۲$$

$$\Rightarrow OM = ۴۵\,m \Rightarrow OP = ۴۵ + ۱۵ = ۶۰\,m$$

۷۴ **گزینه ۱**

اگر نقطهٔ $y = ۰$ را محل پرتاب و جهت مثبت را رو به پایین در نظر بگیریم، معادلهٔ مکان - زمان سنگ به‌صورت زیر می‌شود:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{۰}t$$

$$\left.\begin{matrix} t = T \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}gT^{۲} + v_{۰}T = \frac{H}{۳} \\ t = ۲T \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}g(۲T)^{۲} + v_{۰}(۲T) = H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{۱}{۲}gT^{۲} + v_{۰}T = \frac{H}{۳} \\ ۲gT^{۲} + ۲v_{۰}T = H \end{matrix}\right\} \times(-۳)$$

$$\frac{۱}{۲}gT^{۲} - v_{۰}T = ۰ \Rightarrow v_{۰} = \frac{۱}{۲}gT$$

از سوی دیگر معادلهٔ سرعت - زمان سنگ به‌صورت زیر است:

$$v = gt + v_{۰}$$

در $t = ۲T$ به زمین می‌رسد $\Rightarrow v = ۲gT + v_{۰} = ۴v_{۰} + v_{۰} = ۵v_{۰}$

۷۵ **گزینه ۳**

با توجه به مشتق ضمنی خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_y = (\frac{۴}{۳}x) \times v_x \xrightarrow{x=۱m} v_y = \frac{۴}{۳}v_x \Rightarrow v_y = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴m/s$$

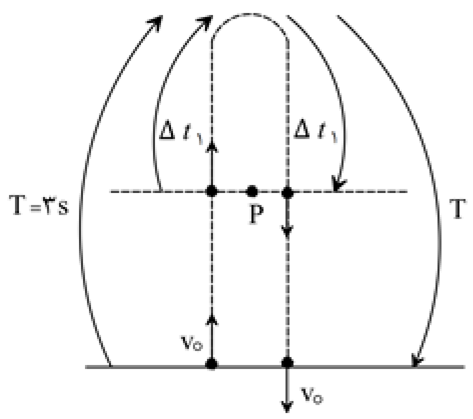
$$v = \sqrt{v_x^{۲} + v_y^{۲}} = \sqrt{۳^{۲} + ۴^{۲}} \Rightarrow |v| = ۵m/s$$

۷۶ **گزینه ۴**

در پرتاب قائم با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، مسیر رفت و برگشت نسبت به لحظهٔ اوج کاملاً قرینهٔ هم هستند. یعنی لحظهٔ اوج، وسط دو مرتبهٔ عبور از نقطهٔ P است.

زمان کل رفت و برگشت $= ۲T_{\text{اوج}} = ۲ + ۴ = ۶ \Rightarrow T_{\text{اوج}} = ۳s$

گلوله در $t = ۲s$ از P می‌گذرد. یعنی از اوج تا P یک ثانیه و از P تا اوج هم یک ثانیه طول می‌کشد. $(\Delta t_{۱} = ۱s)$



در نقطهٔ اوج سرعت برابر صفر است و از اوج تا P یک ثانیه سقوط آزاد داریم.

$$v_{۱} = g.\Delta t_{۱} = ۱۰ \times ۱ = ۱۰m/s$$

$$\Delta y_{۱} = \frac{۱}{۲}g(\Delta t_{۱})^{۲} = ۵m$$

یعنی نقطهٔ P با نقطهٔ اوج ۵ متر فاصله دارد و اندازهٔ سرعت گلوله هنگام عبور از P برابر $۱۰m/s$ است.

۷۷ **گزینه ۱**

$$\left.\begin{matrix} y_A = -۵t^{۲} \\ y_B = -۵(t-۱)^{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_B - y_A = -۵\left[(t-۱)^{۲} - t^{۲}\right] = -۵(-۲t+۱)$$

فاصله دو سنگ : $|y_B - y_A| = ۵(۲t - ۱)$

از لحظهٔ رها شدن B به بعد فاصلهٔ دو سنگ زیاد می‌شود و این وضع ادامه دارد تا زمانی‌که A به زمین برسد.

$$y_A = -80 \Rightarrow -5t^2 = -80 \Rightarrow t = 4s \Rightarrow |y_B - y_A| = 5(2 \times 4 - 1) = 35m$$

۷۸ گزینه ۳

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$x(0) = 30m\,,\, x(6) = 0\,,\, x(1) = 50m \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a \times 1 + v_0 \times 1 + 30 = 50 \\ \frac{1}{2}a \times 36 + v_0 \times 6 + 30 = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \times(-3) \end{matrix} \begin{cases} a + 2v_0 = 40 \\ 18a + 6v_0 = -30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 15a = -150 \Rightarrow \begin{cases} a = -10m/s^2 \\ v_0 = 25m/s \end{cases}$$

تغییر جهت حرکت در زمانی است که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت عوض می‌شود.

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - 25^2 = 2 \times (-10)(x - 30)$$

با توجه به نمودار، متحرک در لحظه‌ای بین $t = 1s$ و $t = 6s$ توقف کرده و تغییر جهت داده است.

$$x - 30 = \frac{25 \times 25}{20} = 31/25 \Rightarrow x = 61/25m$$

۷۹ گزینه ۳

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2}.\Delta t$$

$$\frac{v_A + v_B}{2} \times 2 = 78 - 30 \Rightarrow v_A + v_B = 48 \Rightarrow v_A = 48 - v_B \qquad (1)$$

$$\frac{v_B + v_C}{2} \times 2 = 134 - 78 \Rightarrow v_B + v_C = 56 \Rightarrow v_C = 56 - v_B \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta v = a.\Delta t \\ \Delta t_{AB} = \Delta t_{BC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_B - v_A = v_C - v_B$$

$$\Rightarrow v_A + v_C = 2v_B \xrightarrow{(1),(2)} (48 - v_B) + (56 - v_B) = 2v_B$$

$$\Rightarrow 104 = 4v_B \Rightarrow v_B = 26m/s$$