کاربرد مشتق

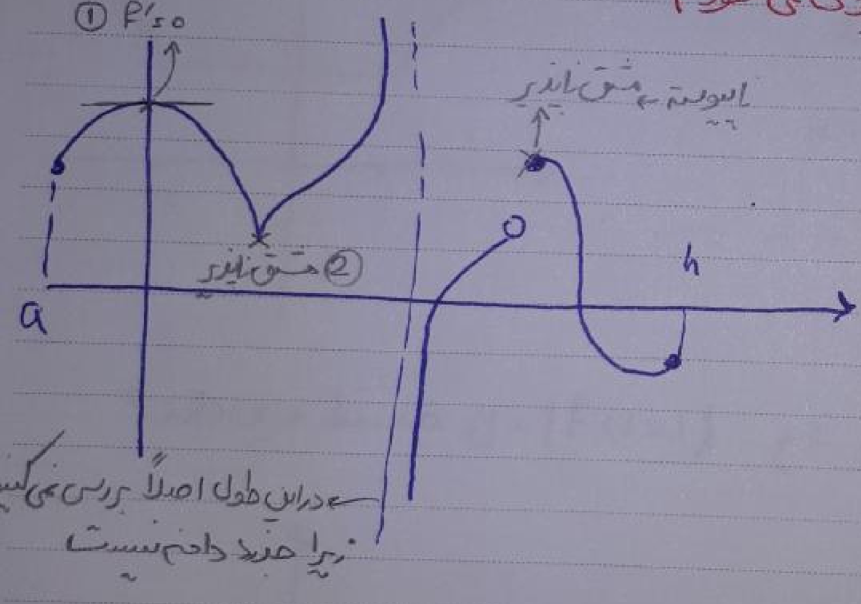
نقطه‌ی بحرانی: نقطه درونی $x=c$ را برای تابع f بحرانی می‌گوییم اگر

① $c \in D_f$ تابع f در نقطه c تعریف شده

② $f'_c = 0$ مشتق باید صفر باشد
یا
f'_c موجود نباشد

شرط ← حتماً نقطه بحرانی باید عضو دامنه باشد
و مشتق صفر باشد یا موجود نباشد (مشتق ناپذیر باشد)

← نقطه درونی یعنی اینکه اول و آخر بازه نمی‌تواند نقطه بحرانی باشد هر عددی درون بازه می‌تواند بحرانی باشد (اول و آخر هیچ‌گاه نقطه بحرانی نمی‌شود)



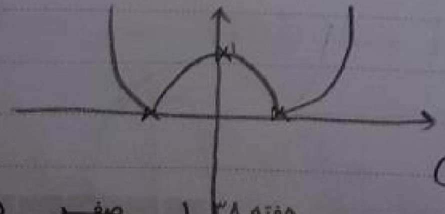
a و b ابتدا و انتهای بازه است

پس نقطه بحرانی نمی‌باشد

این تابع دارای ۳ نقطه بحرانی بود

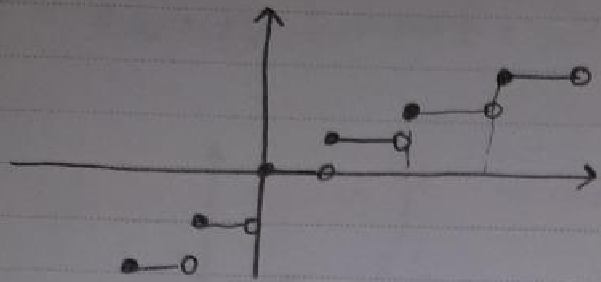
با رسم شکل نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید:

الف) $y=|x^2-1|$



۳ نقطه بحرانی

ب $y=[x]$

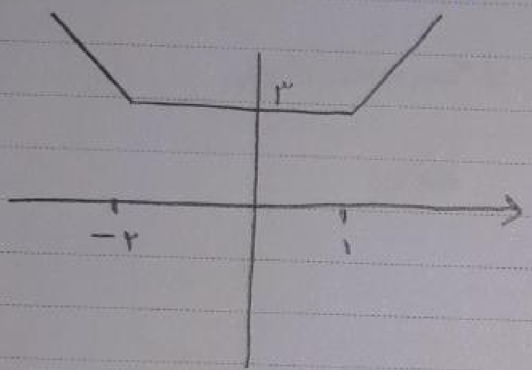


بحرانی ← مشتق ناپذیر ← $\mathbb{Z}$

بحرانی ← مشتق صفر ← $R-\mathbb{Z}$ اعداد غیرصحیح

$[x]$ در کل R بحرانی است

ج $y=|x-1|+|x+2|$

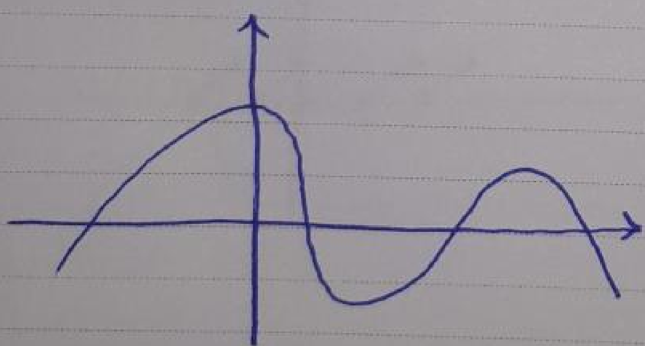


مشتق صفر ← $x\in(-2,1)$

مشتق ناپذیر ← $x=-2$ و $x=1$

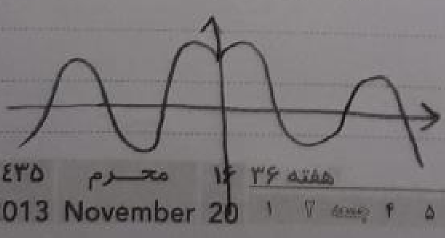
نقاط بحرانی ← $[-2,1]$ ←

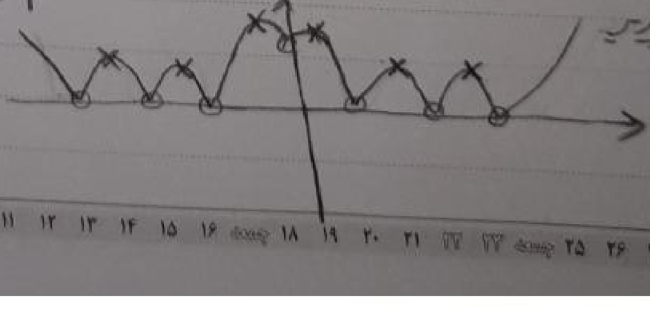
تست: اگر نمودار $f(x)$ به شکل مقابل باشد تابع $y=|f(|x|)|$ چند نقطه بحرانی دارد؟



۱۲
۷
۱۳ ✓
۱۴

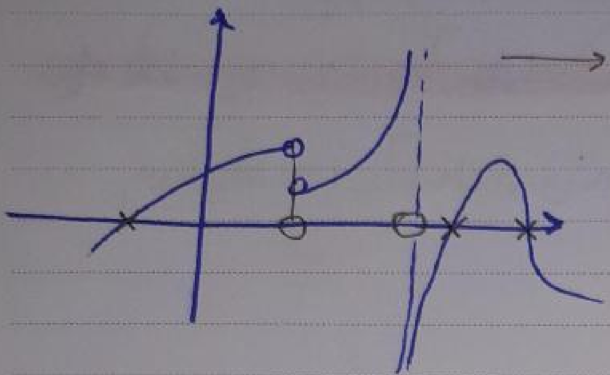
$f(x) \rightarrow f(|x|) \rightarrow |f(|x|)|$





x ← مشتق صفر
o ← مشتق ناپذیر

تست: اگر برای تابع پیوسته f در $\mathbb{R}$ نمودار f' به شکل زیر باشد، f چند نقطه بحرانی دارد؟



← نمودار f' است

نقاط بحرانی جایی است که f' ← صفر باشد
↙ ناموجود

○ ← مشتق تعریف نشده است
× ← مشتق صفر است

چون دامنه تابع را R تعریف کرده پس شرط عضو دامنه بودن را همه نقاط دارند

۲ ۳ ۴ ✓۵

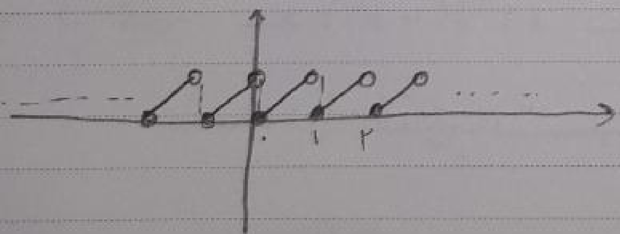
تست: مجموعه نقاط بحرانی تابع $y = x - [x]$ کدام است

$y = x - [x] \rightarrow$ تابع اره‌ای

۱) R

۲) Z ✓

در نقاط صحیح تابع ناپیوسته است



پس مشتق ناپذیر است ← بحرانی

۳) $R - Z$

۴) IN

یافتن نقاط بحرانی از روی ضابطه :

اول باید مشتق بگیریم و بررسی کنیم کجاها صفر است و کجاها ناموجود است

درعین حال باید به شرط اول یعنی عضو دامنه بودن هم توجه کنیم

اگر برای تابعی بازه هم داده بودند حواسمان باشد که اول و آخر بازه جز نقاط بحرانی

نیست (اگر هم برای تابعی بازه نداده بودند خودمان بازه‌اش را دامنه آن تابع درنظر بگیریم)

نقاط بحرانی توابع را بیابید

$$* \; f(x) = \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow D_f = R - \{1\}$$

$$f' = \frac{2x(x-1) - (1)(x^2)}{(x-1)^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f' = 0 \quad x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}, \; \boxed{x = 2}$$

نقاط بحرانی

$f' =$ موجود نیست $\longrightarrow (x-1)^2 = 0 \longrightarrow \cancel{\boxed{x = 1}}$

این نقطه جزء دامنه نیست پس نقطه بحرانی نیست

دامنه $\leftarrow R - 1$

$$2) \; f(x) = x^2 \sqrt{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x}}{1} + x^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x(1-x) - x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{4x - 4x^2 - x^2}{2\sqrt{1-x}} \longrightarrow f' = \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f' = 0 \longrightarrow 4x - 5x^2 = 0 \longrightarrow x(4 - 5x) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = \frac{4}{5}$$

$f' =$ موجود نیست $\rightarrow 2\sqrt{1-x} = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$

جایی که مخرج = ۰

$D_f : 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow (-\infty, 1]$

از سه نقطه به دست آمده هر سه عضو دامنه هستند اما 1 آخر بازه است و نقطه بحرانی به حساب نمی‌آید

۳ → $f(x) = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8\sqrt[3]{x^5}}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

می‌رود مخرج می‌توان مشترک

$= \frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f' = 0 \rightarrow 8x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{2}}$

جایی که صورت صفر

$f' =$ موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^8} - \sqrt[3]{x^2} \rightarrow D = \mathbb{R}$

پس هیچ محدودیتی نداریم و

هر سه نقطه $x = \pm\frac{1}{2}$ و $x = 0$ بحرانی است

$f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^x . x}{e^{2x}} \rightarrow \dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

$f' = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

f' موجود نیست $\rightarrow e^x = 0 \rightarrow$ X تابع‌های صفر نمی‌شود

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow x = 1$ بحرانی است

تست: تابع $y = Ln(x^2 - 4)$ چند نقطه بحرانی دارد

$f' = 2x \times \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x^2-4}$ ۰ ✓

۱

۲

۳

$f' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

$f' =$ ناموجود $\rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

$D_f \rightarrow Ln(x^2-4) \rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x > 2 \;,\; x < -2$

$D: (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

هیچ کدام از نقطه‌ها در دامنه وجود ندارد پس نقطه بحرانی نداریم

تست: تابع
$$y = \begin{cases} 2x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^2 - 9 & x < 2 \end{cases}$$
چند نقطه بحرانی دارد

برای هر ضابطه همه مراحل را می‌رویم ۰

$y = 2x^2 - 5x \rightarrow y' = 4x - 5 \rightarrow y' = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}}$ X $\rightarrow$ عضو دامنه نیست ۱

$y = x^2 - 9 \rightarrow y' = 2x \rightarrow y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \rightarrow$ عضو دامنه است بحرانی است ۲ ✓

۳

ادامه صفحه بعد

نقطه مرزی $x = 2$ است (یعنی جایی که ضابطه عوض می‌شود)

وقتی می‌خواهیم نقطه مرزی را بررسی کنیم در درجه اول پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم زیرا اگر پیوستگی نداشته باشد قطعاً مشتق‌پذیر نیست پس قطعاً بحرانی است

ولی اگر نقطه مرزی پیوستگی داشت به مرحله بعدی می‌رویم و مشتق چپ و راست را مقایسه می‌کنیم

اگر مشتق چپ و راست برابر نبودند ← مشتق ناپذیر و بحرانی ولی اگر برابر بودند مشتق‌ها را بررسی می‌کنیم اگر صفر بود ← بحرانی اگر صفر نباشند بحرانی نیستند

حد راست $\to 2(2^2) - 5(2) = -2 \to f(2^+)$

حد چپ $\to 2^2 - 6 = -2 \to f(2^-)$

پیوسته است

مرحله ۲ ← مشتق چپ و راست را بررسی می‌کنیم

$f'_+(2) = 4x - 5 = 3$

$f'_-(2) = 2x = 4$

مشتق‌ها نابرابر پس مشتق ناپذیر ← بحرانی

در کل ۲ نقطه بحرانی داریم

مجموع طول های نقاط بحرانی $y = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$ کدام است

$\{-2, 2\}$

$\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

$\{-2, 0, 2\}$

$\{-7, 0, 1\}$

$$y' = 2x \times \sqrt[3]{x} + (x^2 - 28)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{2x \times 3x + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$y' = 0 \rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

y' ناموجود $\rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

$D_f = R$ هر ۳ نقطه قابل قبول است

اکسترمم های مطلق و نسبی : برای تابع F در بازه [a,b]

اکسترمم مطلق

ماکسیمم مطلق : نقطه ای که از همه نقاط در بازه مذکور بالاتر و یا هم عرض باشد

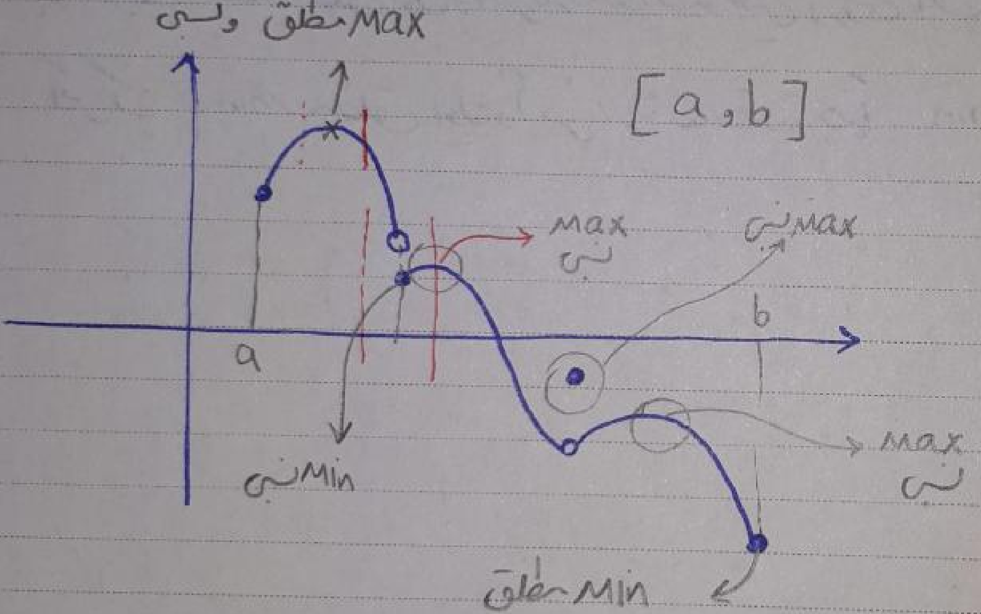
مینیمم مطلق : نقطه ای که از همه نقاط در بازه مذکور پایین تر و یا هم عرض باشد

که مساوی باشد

اکسترمم نسبی

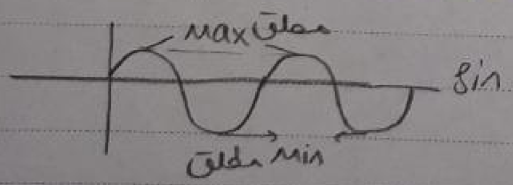
ماکسیمم نسبی : نقطه ای که از نقاط همسایگی اش بالاتر و یا هم عرض باشد

مینیمم نسبی : نقطه ای که از نقاط همسایگی اش پایین تر و یا هم عرض باشد

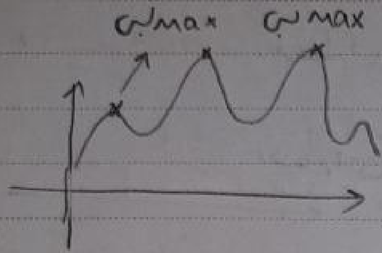


نتیجه گیری

۱- یک تابع می تواند چند max مطلق یا چند min مطلق داشته باشد (نقاطی که هم عرض اند)



در این صورت همه max ها هم عرض و همه min ها هم عرض هستند



۲ ← یک تابع می‌تواند چند یا بی‌نهایت اکسترمم نسبی داشته باشد

که لزومی ندارد همه نقاط نسبی هم عرض باشند حتماً

۳ ← اول و آخر بازه هیچ گاه اکسترمم نسبی نمی‌شود

چون گفتیم از همسایه‌هایش اول بازه سمت چپ ندارد و آخر سمت راست ندارد که بررسی شود

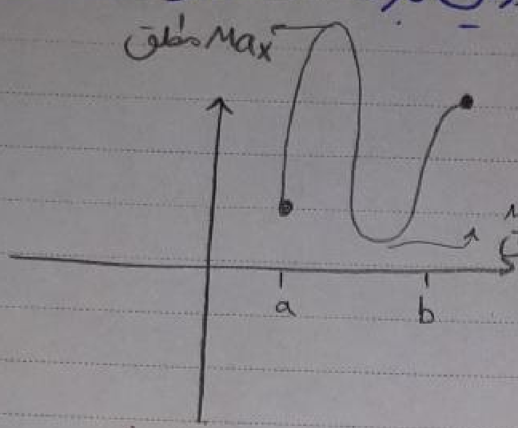
۴ ← اگر یک max مطلق اول و آخر بازه نباشد یعنی درونی باشد حتماً max نسبی هم هست

اگر یک min مطلق اول و آخر بازه نباشد حتماً min نسبی هم هست

قضیه:

اگر تابع f در بازه [a , b] پیوسته باشد در این بازه Max و Min مطلق داریم

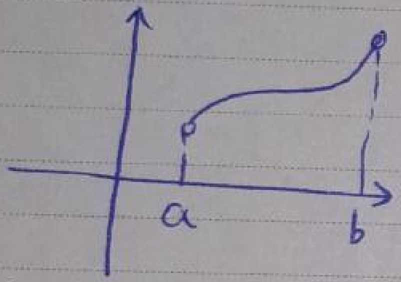
شرط ۱   شرط ۲



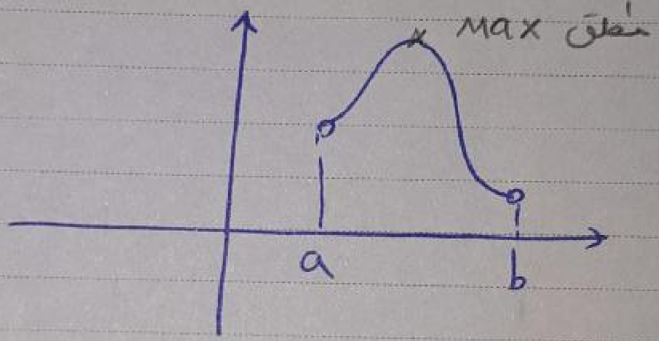
از a شروع می‌کنیم و بدون برداشتن قلم به b می‌رسیم

هرچقدر بالا یا پایین برویم نهایتاً به b می‌رسیم

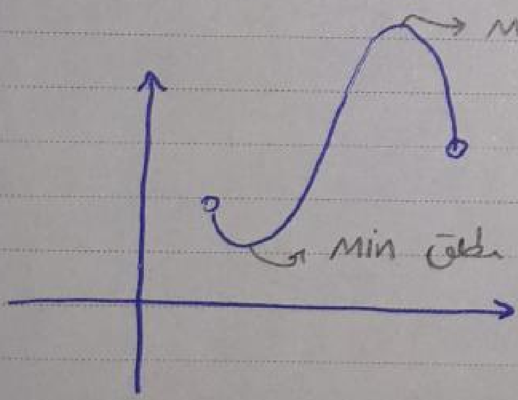
اگر یکی از این ۲ شرط نبود Max و Min مطلق ممکن است باشد یا نباشد

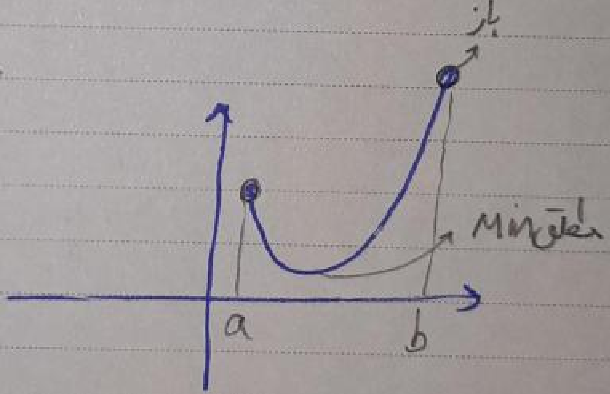


Max و Min مطلق ندار



Min مطلق ندارد

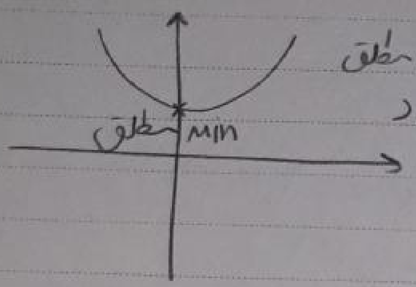




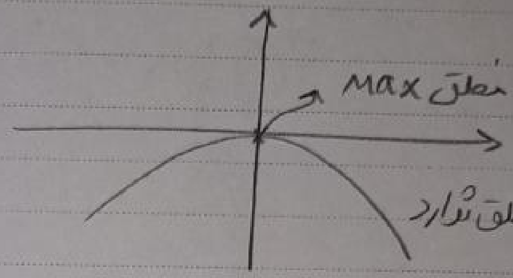
Max مطلق ندارد

تابع پیوسته در $\mathbb{R}$ ← همان تابع پیوسته در بازه باز است زیرا $R=(-\infty,+\infty)$

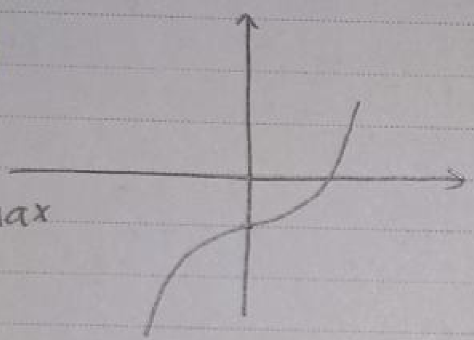
$y=x^2+1$



$y=-x^4$



$y=x^3-1$



نتیجه گیری ها: تابع چندجمله ای درجه فرد Max و Min مطلق در $\mathbb{R}$ ندارد $y=x^3$

← برای توابع چندجمله ای درجه زوج اگر ضریب بزرگترین توان مثبت باشد Min مطلق داریم و اگر منفی باشد Max مطلق داریم

x^4

$-x^4$

تست: کدام تابع Max مطلق دارد؟

$y=x^2+2x-1$ ← ضریب + است ← Min مطلق دارد

✓ $y=-x^4+2x^3+2$ ← ضریب ⊖ است ← Max مطلق دارد

$y=x^3-3x^2+4$ ← درجه فرد ← Max و Min ندارد

$y=-x^5+2x-7$ ← درجه فرد ← نه Max و نه Min

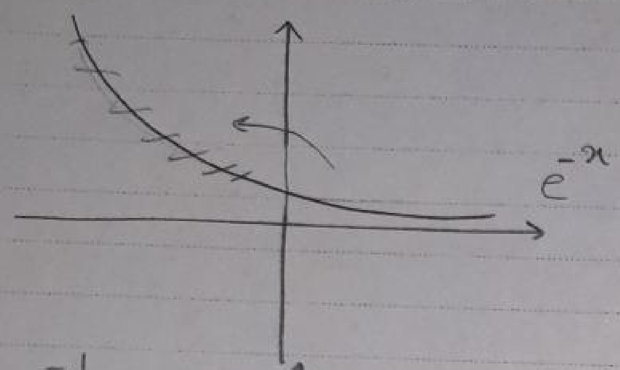
کدام گزینه max و min مطلق تابع $y = e^{-|x|}$ را بیان می‌کند

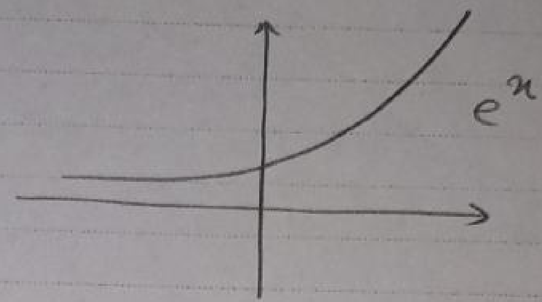
۱ ـ ۰

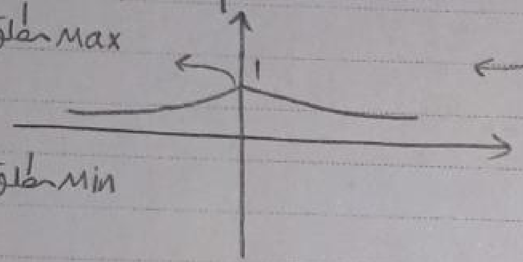
۱ ـ ندارد ✓

ندارد ـ ندارد

ندارد ـ صفر

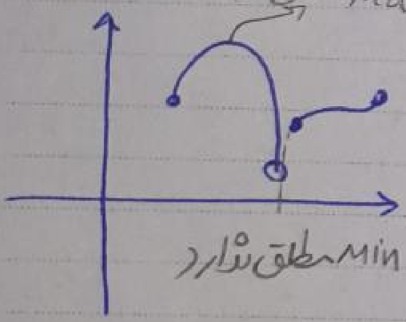


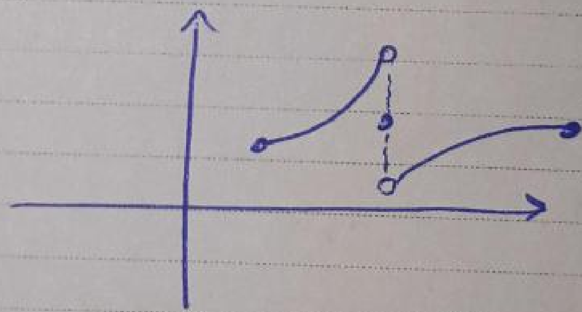


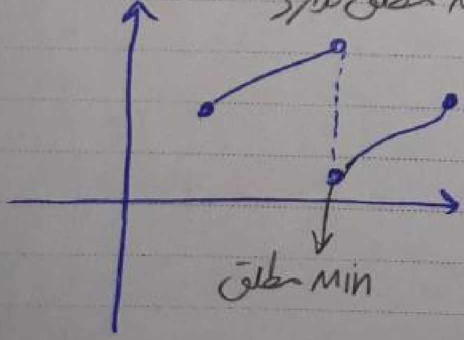


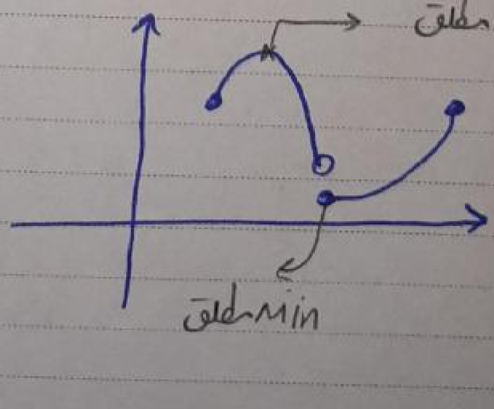
معمولاً با براکت تولید می‌شود

تابع ناپیوسته (نقض شرط دوم)





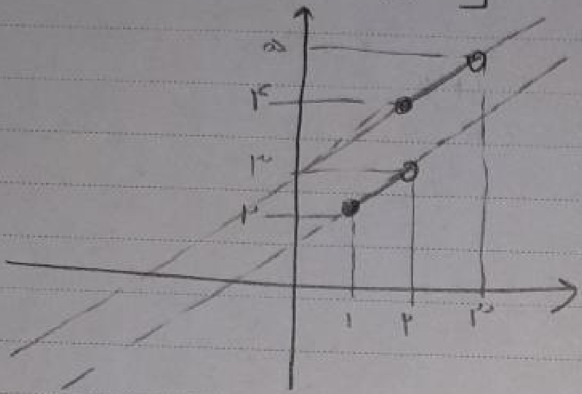




مثال: مقدار max و min مطلق تابع $y = x + [x]$ را در بازه $[1, 3)$ بیابید

$1 \le x < 2 \to [x] = 1 \to y = x + 1$

$2 \le x < 3 \to [x] = 2 \to y = x + 2$



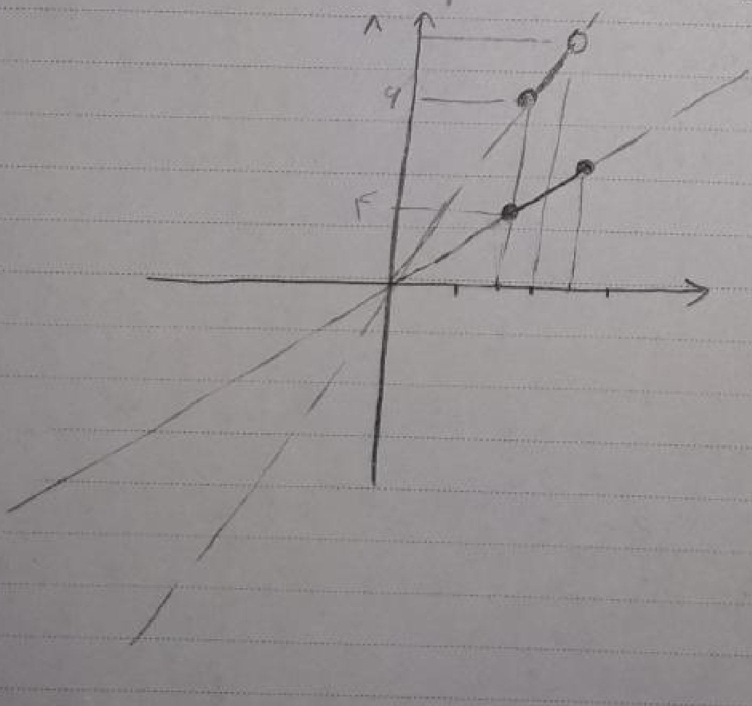
min مطلق $\to$ ۲

max مطلق $\to$ نداریم

مثال: مقدار max و min مطلق تابع $y = \frac{4x}{[x]}$ در بازه $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ بیابید

$\frac{3}{2} \le x < \frac{4}{2} \to [x] = 1 \to y = 4x$

$\frac{4}{2} \le x \le \frac{5}{2} \to [x] = 2 \to y = 2x$

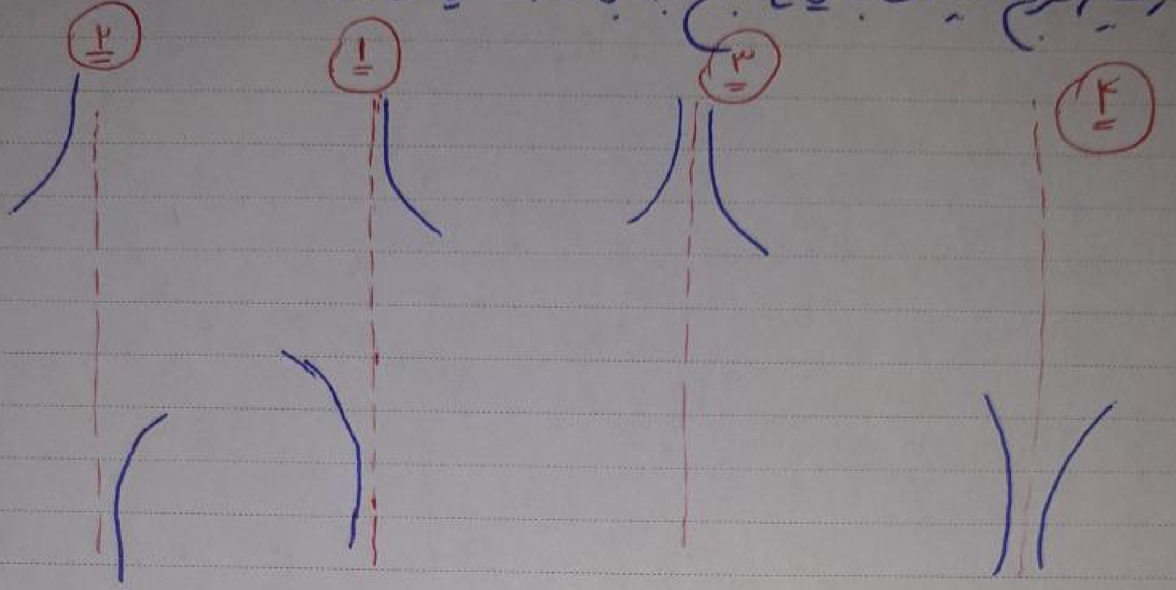


min مطلق $\to$ ۴

max مطلق $\to$ ندارد

توابع ناپیوسته: یکی از حالت‌های مهمی که ناپیوستگی می‌سازد مجانب قائم است

مجانب قائم یعنی ریشه مخرج یا آن جایی که تابع به بی‌نهایت میل می‌کند



۱: قطعاً نه max مطلق دارند نه min مطلق

۳: قطعاً max مطلق ندارد ولی در مورد min مطلق نمی‌توان اظهار نظر کرد

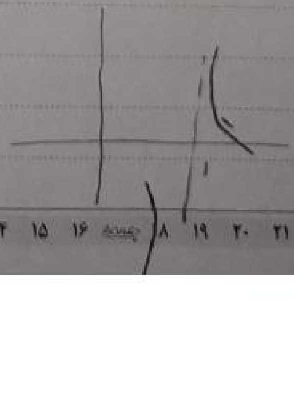
۴: قطعاً min مطلق ندارد ولی در مورد max مطلق نمی‌توان اظهار نظر کرد

نکته: توابع دارای مجانب قائم حداقل یکی از اکسترمم‌های مطلق را ندارد

تست: max و min مطلق تابع $y = \frac{x^2}{x-1}$ به ترتیب کدام است

مجانب قائم $\rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} \quad \begin{cases} 1^+ \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty \\ 1^- \rightarrow \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



۱) ندارد ـ ۰

۲) ندارد ـ ندارد ✓

۳) ندارد ـ ۸

۴) ۸ ـ (۱-)

روش یافتن اکسترمم های مطلق توابع پیوسته در بازه [a,b] ← شرط

۱ ـ نقاط بحرانی تابع را می یابیم ← مشتق می گیریم ← $=0$ / ناموجود

۲ ـ عرض نقاط بحرانی را می یابیم

۳ ـ عرض اول و آخر بازه را می یابیم

۴ ـ از بین عرض های مرحله ۲ و ۳ بزرگترین عرض ماکسیمم مطلق و کمترین عرض

* مینیمم مطلق است

مثال: کمترین و بیشترین مقدار تابع های زیر در بازه داده شده را بیابید

$f(x) = x^4 - 8x^2 \quad x \in [-1, 3]$

مرحله ۱ → $f' = 4x^3 - 16x$ → $4x(x^2-4)=0$ → $x=0$ ، $x = 2$ ، -2 → عضو دامنه نیست

مخرج ندارد ← ناموجود ندارد

مرحله ۲ و ۳ → عرض → x ها را به تابع می دهیم

بحرانی:
$x=0 \longrightarrow y=0$
$x=2 \longrightarrow y=-16$

اول $x=-1 \longrightarrow y=-7$
آخر $x=3 \longrightarrow y=9$

۹ ← از همه بزرگتر ← max مطلق

۱۶- ← کمتر از همه ← min مطلق

$R_f = [-16, 9]$

min مطلق ← -16 ، 9 → max مطلق

در واقع با بدست آوردن min و max مطلق تابع در این بازه برد تابع را در این بازه

بدست آورده ایم

۲ → $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ $\quad x \in [-4, 3]$

$f' : x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ → $x = 5$ × دربازه نیست

→ $x = -3$

بحرانی $x = -3 \rightarrow y = \frac{1}{3}(-27) - 9 + 45 = 27$

$x = -4 \rightarrow y = \frac{1}{3}(-64) - 16 + 60 = \frac{68}{3}$

$x = 3 \rightarrow y = \frac{1}{3}(+27) - 9 - 45 = -45$

عرض ها $\quad 27 \quad -45 \quad \frac{68}{3}$

max مطلق ← 27

min مطلق ← -45

$R_f = [-45, 27]$

مختصات min مطلق

تست: اگر نقطه (a, b) نقطه min مطلق تابع $f(x) = x^{10} + 10x - 1$ در بازه $[-2, 1]$ باشد حاصل $a+b$ کدام است

$f'(x) = 10x^9 + 10 = 0 \rightarrow 10x^9 = -10 \rightarrow x^9 = -1$

بحرانی ← دربازه هست ← $\boxed{x = -1}$

-1

-9

-10

-11 ✓

$x = -1 \rightarrow y = -10$

$x = -2 \rightarrow y = 1003$

$x = 1 \rightarrow y = 10$

min مطلق ← -10

مختصات min مطلق $(-1, -10)$

$(-1) + (-10) = -11$ ✓

تست: مقدار ماکسیمم مطلق تابع $y = xe^{-x^2}$ در بازه $[0 , 1]$ کدام است

$$y' = 1\times e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} \longrightarrow y' = e^{-x^2}(1-2x^2) = .$$ ۱

$$y' = 0 \longrightarrow e^{-x^2} \neq 0 \quad \text{پس} \quad 1 - 2x^2 = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$ $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ ✓

$x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓ $\frac{1}{e}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cancel{\in D_f}$ صفر

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$x = 0 \longrightarrow y = 0$$

$$x = 1 \longrightarrow y = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$$

وقتی مقایسه بین ۲ تا سخت است صحیح فرض می‌گیریم و حل می‌کنیم

ج

$$\frac{1}{\sqrt{2e}} > \frac{1}{e} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} \frac{1}{2e} > \frac{1}{e^2} \xrightarrow{\text{ساده}}$$

$\boxed{2 < e}$ ✓

تست: برد تابع $f(x) = x^3 - 12x + 8$ در بازه بسته $[-3 , 1]$ کدام است

$$f' = 3x^2 - 12 \longrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = +2 \times \longrightarrow \text{عضو دامنه نیست} \\ x = -2 \end{cases}$$ $[-8 , 17]$

بحرانی $x = -2 \longrightarrow y = -8 + 24 + 8 = 24 \longrightarrow$ max مطلق $[-8 , 24]$

ابتدا انتهای بازه
$$\begin{cases} x = -3 \longrightarrow y = -27 + 36 + 8 = 17 \\ x = 1 \longrightarrow y = 1 - 12 + 8 = -3 \longrightarrow \text{min مطلق} \end{cases}$$

$[-3 , 17]$

$[-3 , 24]$ ✓

تست: حداکثر تابع $y=\sin^2 x+\cos x$ کدام است

توابع مثلثاتی هستند و بازه نمی‌دهند خودمان $[0, 2\pi]$ را می‌گیریم

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{5}{4}$

۴) ۴

$y' = 2\sin x\cdot\cos x - \sin x$

اول و آخر بازه بحرانی است

$y' = \sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0 \to x=\cancel{0}, \pi, \cancel{2\pi}$

$2\cos x-1=0 \to \cos x=\frac{1}{2} \to x=\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

نقاط بحرانی:

$x=\pi \to y=-1$

$x=\frac{\pi}{3} \to y=\frac{5}{4}$

$x=\frac{5\pi}{3} \to y=\frac{5}{4}$

هر دو max مطلق

و هم عرض هستند

حداکثر $\frac{5}{4}$

اول و آخر بازه:

$x=0 \to y=1$

$x=2\pi \to y=1$

تست: برد تابع $y=2x\sqrt{4-x^2}$ در کدام گزینه آمده است

اگر برای تابعی بازه داده نشد ← مثلثاتی یک دوره تناوب

غیر مثلثاتی ← دامنه

$[0, 4]$

$[-2, 2]$

$[-4, 4]$ ✓

$[-4, 0]$

$4-x^2\ge 0 \to x^2\le 4 \to -2\le x\le 2 \to [-2, 2]$

$y' = 2\sqrt{4-x^2}+2x\times\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(4-x^2)-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

نقاط بحرانی:

$f'=0 \to 8-4x^2=0 \to x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2}$

ناموجود $\to \sqrt{4-x^2}=0 \to 4-x^2=0 \to \boxed{x=\pm 2}$ اول و آخر بازه بحرانی است

بحرانی:

$\sqrt{2} \to y=4 \to$ max

$-\sqrt{2} \to y=-4 \to$ min

اول آخر:

$2 \to y=0$

$-2 \to y=0$

حاصل کارگه کون و مکان این همه نیست — باده پیش آر که اسباب جهان این همه نیست — از دل و جان شرف صحبت جانان غرض است — غرض این است وگرنه دل و جان این همه نیست

تست: Min مطلق تابع $y = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است

$$y' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{8\sqrt[3]{x^5}}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{8x^2 - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

-1

$-\frac{1}{2}$

صفر

$\frac{-3}{4\sqrt[3]{4}}$ ✓

$$y' = 0 \rightarrow 8x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$y' =$ نامعین $\rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \longrightarrow x = 0$

$$\sqrt[3]{x^8} - \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^6 \times x^2} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$\rightarrow x^2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x^2}\,(x^2 - 1) =$$

حالا جاگذاری

بحرانی
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{-3}{4\sqrt[3]{4}} \\ x = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{-3}{4\sqrt[3]{4}} \\ x = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

Min مطلق

ابتدا و انتها
$$\begin{cases} x = -1 \longrightarrow y = 0 \\ x = 1 \longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

نام حافظ رقم نیک پذیرفت ولی   پیش رندان رقم سود و زیان این همه نیست

خواب آن نرگس فتان تو بی چیزی نیست   تاب آن زلف پریشان تو بی چیزی نیست

روز غزه