جزوهٔ کمک آموزشی

ریاضی ۳

فصل ۱

درس ۱: توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

تهیه و تنظیم:
علی افضل‌زاده

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

فصل ۱ ـ درس ۱ (توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی)

تابع چندجمله‌ای:

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ را که در آن a_n، $a_{n-۱}$، ...، $a_۱$ و $a_۰$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq ۰$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چندجمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

تست ۱) کدام‌یک از توابع زیر، یک تابع چندجمله‌ای نیست؟

۱) $y=\sqrt{۲}$ ۲) $y=\sqrt{۲}x+۳$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x+۱$ ۴) $y=\frac{۲}{x+۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

توابع سایر گزینه‌ها به‌ترتیب توابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر، یک و دو هستند که ضرایب آن‌ها کسری یا رادیکالی است اما تابع گزینهٔ ۴ یک تابع گویا است که متغیر (x) در مخرج قرار دارد.

تست ۲) درجهٔ کدام‌یک از توابع چندجمله‌ای زیر از بقیه کمتر است؟

۱) $y=x+x^۲-۳x^۵$ ۲) $y=(x+۲)^۳-(x-۲)^۳$

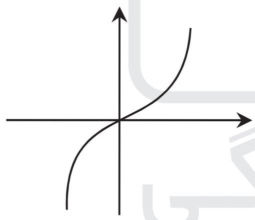
۳) $y=(۲x+۱)^۳-(x+۱)^۳$ ۴) $y=(x+۲)^۳+(x-۲)^۳$

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

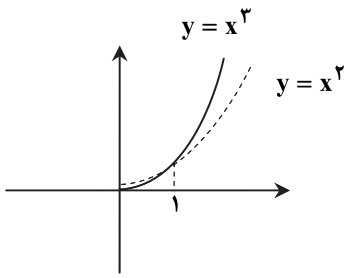
درجهٔ توابع گزینه‌ها به‌ترتیب برابر ۵، ۲، ۳ و ۳ است. بنابراین گزینهٔ ۲ کمترین درجه را داراست.

نمودار تابع درجه سوم $(y=x^۳)$

به‌کمک نقطه‌یابی نمودار تابع $y=x^۳$ به‌صورت زیر است:



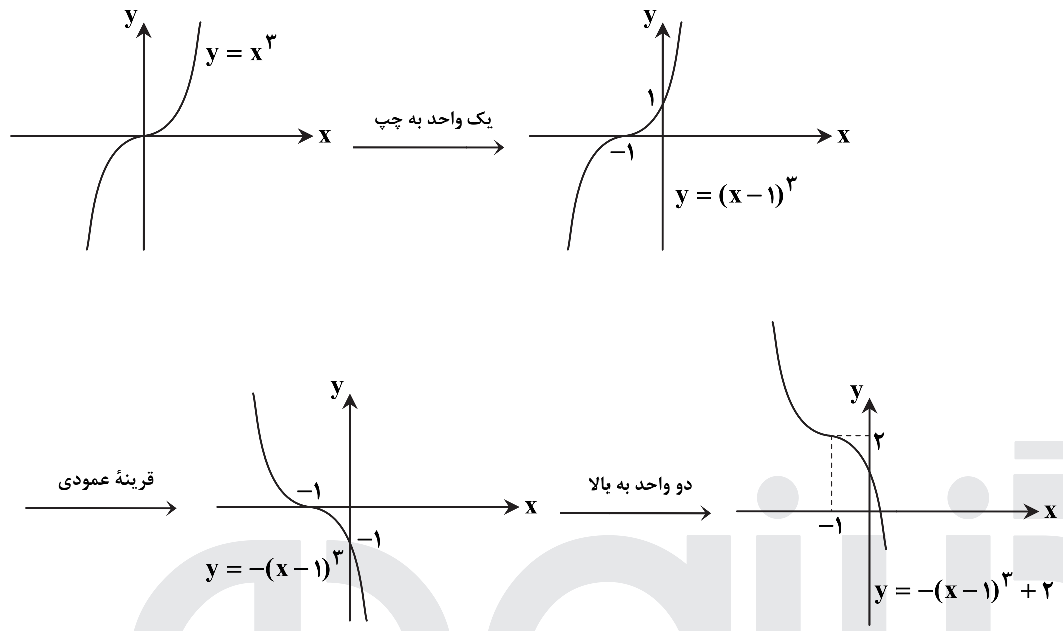
توجه کنید وقتی $x>۱$ نمودار تابع $y=x^۳$ بالاتر از سهمی $y=x^۲$ است و اگر $۰<x<۱$ نمودار تابع $y=x^۳$ از پایین‌تر از سهمی $y=x^۲$ است.



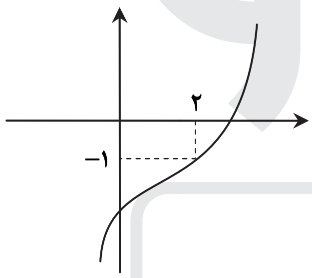
به‌کمک قوانین انتقال نمودار می‌توان نمودار توابع درجه ۳ دیگر را از روی نمودار $y=x^۳$ رسم کرد.

مثال ۱) تابع $y=-(x+1)^3+2$ را رسم کنید.

پاسخ:



تست ۳) نمودار یک تابع چندجمله‌ای درجه ۳ در شکل روبه‌رو رسم شده است. ضابطهٔ این تابع برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان باشد؟



۱) $y=-(x+2)^3+1$

۲) $y=(x+2)^3-1$

۳) $y=-(x-2)^3-1$

۴) $y=(x-2)^3-1$

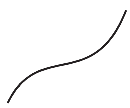
پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

نمودار داده شده مشابه یک تابع درجه ۳ است که دو واحد به راست رفته و یک واحد به پایین منتقل شده است. پس گزینهٔ ۴ درست است.

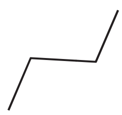
توابع صعودی و نزولی:

تعریف شهودی توابع صعودی و نزولی چنین است: هنگامی که روی نمودار تابع از چپ به راست حرکت می‌کنیم اگر:

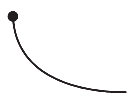
۱) نمودار تابع همواره بالا رود تابع اکیداً صعودی است، مانند:



۲) نمودار تابع پایین نیاید تابع صعودی است، مانند:



۳) نمودار تابع همواره پایین رود تابع اکیداً نزولی است، مانند:



۴) نمودار تابع بالا نرود تابع نزولی است، مانند:

تعریف دقیق ریاضی توابع صعودی و نزولی چنین است.

اگر برای هر دو نقطه با طول‌های x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f داشته باشیم:

تابع اکیداً صعودی است $\quad$ ۱) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

تابع صعودی است $\quad$ ۲) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$

تابع اکیداً نزولی است $\quad$ ۳) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

تابع نزولی است $\quad$ ۴) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$

تذکر: به تابعی که فقط اکیداً نزولی یا فقط اکیداً صعودی باشد، اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

مثال ۲) توابع $y = x^3$، $y = \sqrt{x}$ اکیداً یکنوا (از نوع اکیداً صعودی) هستند و تابع $y = [x]$ یکنوا (از نوع صعودی) است.

توابع $y = x^2$، $y = |x|$ غیریکنوا هستند، زیرا در بعضی بازه‌ها صعودی و در بعضی دیگر نزولی هستند.

مثال ۳) توابع نمایی و لگاریتمی $y = a^x$ و $y = \log_a x$ اکیداً یکنوا هستند. اگر $a > 1$ هر دو اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ اکیداً نزولی هستند.

تذکر: هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً یکنوا نیز هست اما عکس این مطلب درست نیست.

مثال ۴) تابع $y = [x]$ تابعی یکنوا (از نوع صعودی) است ولی اکیداً یکنوا نیست.

تذکر: تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی. تابعی وجود ندارد که هم اکیداً صعودی و هم اکیداً نزولی باشد.

مثال ۵) تابع خطی $y = ax + b$ وقتی $a = 0$ یکنواست (هم صعودی و هم نزولی) اما اکیداً یکنوا نیست. وقتی $a > 0$ اکیداً یکنوا (از نوع اکیداً صعودی) و وقتی $a < 0$ اکیداً یکنوا (از نوع اکیداً نزولی) است.

تذکر: صعودی و نزولی بودن را می‌توان در محدوده‌ای از دامنه نیز در نظر گرفت.

مثال ۶) تابع $y = \frac{1}{x}$ در محدودهٔ $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است و همچنین در محدودهٔ $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است اما در کل دامنه‌اش تابعی غیریکنوا است.

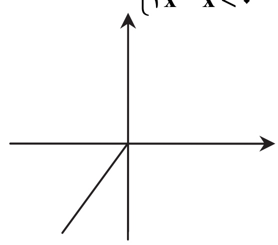
تست ۴) کدام‌یک از توابع زیر در $(-\infty, 0)$ صعودی است اما در کل دامنه‌اش صعودی نیست؟

۱) $y = x + |x|$ $\quad$ ۲) $y = x - |x|$ $\quad$ ۳) $y = 1 - \frac{1}{x}$ $\quad$ ۴) $y = \frac{1}{x} - 1$

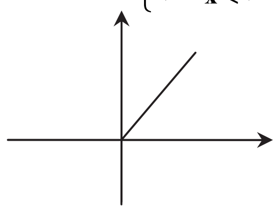
پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

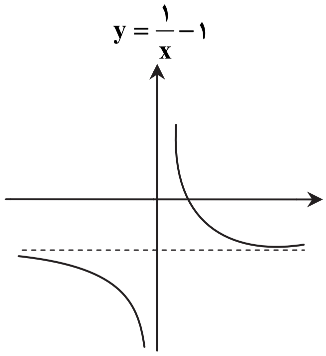
نمودار توابع موجود در گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

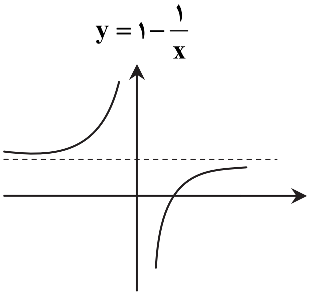
$$y = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \ge 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$



$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$







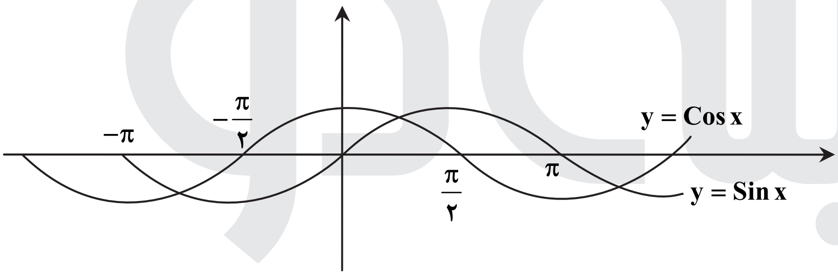
تابع $y=۱-\frac{۱}{x}$ در $(-\infty,۰)$ صعودی است اما در دامنه‌اش صعودی نیست.

تست ۵) در کدام‌یک از بازه‌های زیر توابع $y=\operatorname{Sin}x$ و $y=\operatorname{Cos}x$ هر دو اکیداً صعودی هستند.

۱) $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ ۲) $(-\frac{\pi}{۲},۰)$ ۳) $(-\pi,-\frac{\pi}{۲})$ ۴) $(۰,\frac{\pi}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

نمودار دو تابع سینوس و کسینوس مطابق شکل روبه‌رو است.



در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},۰)$ هر دو تابع صعودی هستند.

نکته: در اثر انتقال توابع، صعودی یا نزولی بودن آن‌ها تغییر نمی‌کند. یعنی اگر تابع $y=f(x)$ صعودی (یا نزولی) باشد، تابع $y=f(x+a)+b$ نیز صعودی (نزولی) است.

نکته: اگر تابع $y=f(x)$ صعودی (اکیداً صعودی) باشد، توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$ نزولی (اکیداً نزولی) هستند و اگر تابع $y=f(x)$ نزولی (اکیداً نزولی) باشد، توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$ صعودی (اکیداً صعودی) هستند.

تست ۶) توابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x+۱}-۳$ و $y=-\log_۳(x+۲)+۴$ به‌ترتیب چگونه هستند؟

۱) صعودی ـ صعودی ۲) صعودی ـ نزولی ۳) نزولی ـ صعودی ۴) نزولی ـ نزولی

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

از آنجا که $۰<\frac{۱}{۲}<۱$، تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ نزولی است، پس تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x+۱}-۳$ نیز نزولی است. همچنین تابع $y=\log_۳ x$ صعودی است زیرا $۳>۱$، پس تابع $y=-\log_۳ x$ نزولی است، بنابراین $y=-\log_۳(x+۲)+۴$ نیز نزولی است.

نکته: اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک به یک است. اما ممکن است تابعی یک به یک باشد ولی اکیداً یکنوا نباشد مانند تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$