



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

تست های طبقه بندی شده کتاب ریاضیات ۳

( فصل سوم - حد و پیوستگی )

رشته علوم تجربی داخل و خارج از کشور

از سال ۱۳۷۶ تا سال ۱۳۹۶

کاری از سید علی موسوی فوق لیسانس ریاضی محض

دبیر ریاضی دبیرستان های مشهد

@dostaneriazi - ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

<p>سراسری تجربی ۹۶</p> <p>حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)</math> ، کدام است ؟</p> <p>(۱) <math>-\frac{5}{2}</math>      (۲) <math>-\frac{3}{2}</math>      (۳) <math>\frac{1}{2}</math>      (۴) <math>\frac{3}{2}</math></p> <p><b>نکته:</b> برای رفع ابهام <math>\infty - \infty</math> ، ابتدا مخرج مشترک گرفته و عامل صفر شونده را در صورت و مخرج کسر پدید آورده و آن را حذف کرده و حاصل حد را می یابیم .</p> $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \infty - \infty$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - (x^2 + x)}{x(x-2)}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = -\frac{5}{2}$	<p>۱</p>
<p>سراسری تجربی ۹۶</p> <p>تابع با ضابطه <math>f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} &amp; , x \neq 0 \\ a &amp; , x = 0 \end{cases}</math> ، به ازای کدام مقدار <math>a</math> ، در نقطه <math>x = 0</math> پیوسته است ؟</p> <p>(۱) <math>-2</math>      (۲) <math>-1</math>      (۳) <math>1</math>      (۴) <math>2</math></p> <p><b>نکته:</b> قاعده هویتال یعنی به طور جداگانه از صورت و مخرج کسر مشتق گرفته و حد کسر حاصل را بیابیم .</p> $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad f(0) = a \quad (1)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = 2 \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a = 2$ <p>توجه داشته باشیم که در این تابع ، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست .</p>	<p>۲</p>
<p>سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور</p> <p>حاصل <math>\lim_{x \rightarrow (-1)} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right)</math> ، کدام است ؟</p> <p>(۱) <math>-2</math>      (۲) <math>-\frac{3}{2}</math>      (۳) <math>1</math>      (۴) <math>\frac{3}{2}</math></p> $\lim_{x \rightarrow (-1)} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) = \infty - \infty$ $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2 - x^2 + x}{(x-1)(x+1)}$ $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{-(x-2)}{(x-1)} = \frac{-(-1-2)}{(-1-1)} = -\frac{3}{2}$	<p>۳</p>

<p>سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور</p> <p>تابع با ضابطه <math>f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}, &amp; x &gt; 1 \\ ax - a + 2, &amp; x \leq 1 \end{cases}</math> به ازای کدام مقدار <math>a</math>، در نقطه <math>x = 1</math> پیوسته است؟</p> <p>(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هر مقدار <math>a</math> (۴) هیچ مقدار <math>a</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)</math> <math>\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a - a + 2 = 2</math> (۱)</p> <p>(۱), (۲) <math>\rightarrow a \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2</math> (۲)</p>	<p>۴</p>
<p>سراسری تجربی ۹۵</p> <p>در تابع با ضابطه <math>f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}</math> اگر <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}</math> باشد، آنگاه حد <math>f(x)</math> وقتی <math>x \rightarrow (-1)</math> کدام است؟</p> <p>(۱) <math>\frac{2}{3}</math> (۲) <math>\frac{5}{6}</math> (۳) <math>\frac{3}{2}</math> (۴) <math>\frac{5}{4}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{5}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax +  2x }{2x} = \frac{5}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \frac{5}{2}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-4}{3}}{2} = \frac{5}{6}</math></p>	<p>۵</p>
<p>سراسری تجربی ۹۵</p> <p>به ازای کدام مقدار <math>a</math>، تابع با ضابطه <math>f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, &amp; x \neq 0 \\ a, &amp; x = 0 \end{cases}</math> در نقطه <math>x = 0</math> پیوسته است؟</p> <p>(۱) <math>-\frac{1}{4}</math> (۲) <math>-\frac{1}{2}</math> (۳) <math>\frac{1}{2}</math> (۴) هیچ مقدار <math>a</math></p>	<p>۶</p>

**نکته:**  $\cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx 1 - \frac{u^2}{2} \longleftrightarrow 1 - \cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx \frac{u^2}{2}$        $\sqrt[n]{1 \pm u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx 1 \pm \frac{u}{n}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad f(0) = a \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{4} \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$

**روش دوم:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^{\frac{1}{2}} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2})}{x^2} = -\frac{1}{4}$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $b$  کدام است؟

- ۲ (۴)      ۱ (۳)      -۱ (۲)      -۲ (۱)

**نکته:** چون صورت کسر به ازای  $x = 2$  برابر صفر شده است پس باید مخرج کسر نیز برابر صفر باشد زیرا اگر مخرج

کسر مخالف صفر باشد حاصل حد برابر صفر می باشد، در صورتی که حاصل حد برابر  $\frac{1}{2}$  است.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{2a + b} \rightarrow 2a + b = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = -1$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      -۱ (۳)      ۴ (۴) هیچ مقدار  $a$

توجه داشته باشیم که در این تابع، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad f(0) = a \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a \notin \mathbb{R}$

حد تابع در  $x = 0$  وجود ندارد. چون حاصل حد  $\infty$  شده است، بنابراین تابع هیچ گاه تابع پیوسته نیست.

سراسری تجربی ۹۴

در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - |2x|} = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x} = -1 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{8x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

سراسری تجربی ۹۴

به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & , 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & , x > 6 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی

۱۰

بزرگتر از یک پیوسته است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

$$f(6) = \lim_{x \rightarrow 6} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x)$  کدام است؟

۱۱

- (۱)  $-\frac{1}{6}$  (۲)  $-\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6} = -\frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} = -\frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -6 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}}{-6} = \frac{2 + \frac{-5}{4}}{-6} = -\frac{1}{8}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x} & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & , \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  بر روی بازه  $[0, 2\pi]$  پیوسته است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**نکته:** هرگاه بخواهیم پیوستگی تابع را در یک بازه بررسی کنیم، پیوستگی تابع را در شکستگی دامنه مورد بررسی قرار می دهیم.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \sin \frac{5\pi}{2} - a = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - a = \sin \frac{\pi}{2} = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = -3 \quad 1 - a = -3 \rightarrow a = 4$$

سراسری تجربی ۹۳

حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$  کدام است؟

۱ (۱)  $-\frac{7}{12}$       ۲ (۲)  $-\frac{5}{12}$       ۳ (۳)  $\frac{5}{12}$       ۴ (۴)  $\frac{7}{12}$

**نکته:** برای رفع ابهام  $\infty - \infty$ ، مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x-2) - 4(2x+1)}{(x+2)(2x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x - 10}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5(x+2)}{(x+2)(2x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{5}{12}$$

سراسری تجربی ۹۳

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & , 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & , \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  پیوسته است؟

۱ (۱)  $-2\sqrt{2}$       ۲ (۲)  $-1$       ۳ (۳)  $\sqrt{2}$       ۴ (۴)  $2$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = a \cos \frac{3\pi}{4} = a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -a \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{-2(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)}{-2 \sin 2x} = 2$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \longrightarrow a = -2\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$  ، کدام است ؟

$\frac{1}{6}$  (۴)                       $\frac{1}{12}$  (۳)                       $-\frac{1}{12}$  (۲)                       $-\frac{1}{6}$  (۱)

۱۵

**نکته:** هرگاه زیر رادیکال صفر شد ، نمی توان از قاعده هوییتال استفاده کرد .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1} = -\frac{1}{12}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & , \pi < x \leq 2\pi \\ a \cos \frac{2x}{3} & , 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = \pi$  پیوسته است ؟

$\sqrt{2}$  (۴)                       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)                       $-\sqrt{2}$  (۲)                       $-2\sqrt{2}$  (۱)

۱۶

**نکته:** هرگاه بخواهیم پیوستگی تابع را در یک بازه بررسی کنیم ، پیوستگی تابع را در شکستگی دامنه مورد بررسی قرار می دهیم .



$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \quad f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = a \cos \frac{2\pi}{3} = a \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -a \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{x - \pi} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \times (-\frac{1}{2}) \sin \frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow a = -\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۹۲

اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3$  باشد، آنگاه حد این کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = 3 \rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = 4$$

۱۷

سراسری تجربی ۹۲

به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , x < 2 \\ a & , x = 2 \\ x + 2 & , x > 2 \end{cases}$  پیوسته است؟

۱ (۱)      ۴/۵ (۲)      ۵ (۳)      ۴ (۴) هیچ مقدار  $a$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad f(2) = a \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x^-]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 6 - 1 = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

۱۸

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

حد عبارت  $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است )

۱ (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)      ۱ (۳)       $+\infty$  (۴)

۱۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[2^-]}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{2}{x-2} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} & , x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & , x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در بازه  $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$  پیوسته است؟

(۱) -۱      (۲) ۰      (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۱

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2x}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x = -1 \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \quad (2) \qquad (1), (2) \longrightarrow a = -1$$

سراسری تجربی ۹۱

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳) ۱      (۴)  $\frac{3}{2}$

روش اول:

$$\cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 - \frac{u^2}{2} \longleftarrow 1 - \cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2} \qquad \cos^n u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 - \frac{u^2}{2} \times n$$

نکته:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0} \longrightarrow \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos 2x \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - \frac{4x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{4x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 4\cos 2x}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۹۱

۲۲ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$  از نقطه  $(2,1)$  می‌گذرد،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴) ۱

$$f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} \xrightarrow{(2,1)} 1 = \frac{2a+1+5}{6-2} \rightarrow 2a+6=4 \rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+|2x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۹۱

۲۳ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & , x > 2 \\ ax - 1 & , x \leq 2 \end{cases}$  همواره روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است؟

- (۱) هر مقدار حقیقی  $a$       (۲) هیچ مقدار  $a$       (۳) فقط  $a = -2$       (۴) فقط  $a = 2$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \quad (2) \quad \xrightarrow{(1),(2)} 2a - 1 = 2a - 1 \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

۲۴ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

- (۱)  $-1$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{-2\sin 2x} = \frac{1+1}{-2} = -1$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$  باشد، آنگاه  $f(-1)$  کدام است؟

(۱) -۲      (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳) ۲      (۴) ۳

۲۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x} = \frac{2}{3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{3x^2} = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \rightarrow f(-1) = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = 3$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & , x < 2 \end{cases}$  با شرط  $f(2) = 5$  بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد،  $a$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

۲۶

$$f(2) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b + 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + b$$

$$2b + 3 = 5 \rightarrow b = 1 \quad 2a + b = 5 \xrightarrow{b=1} a = 2$$

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{3}{4}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

۲۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} = \frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}}{-2} = \frac{2}{2} = \frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۹۰

تابع باضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x - 2| & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$  ، به ازای کدام مقدار  $a$  ، بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است؟

(۱) هر مقدار  $a$       (۲)  $-3$       (۳)  $3$       (۴) هیچ مقدار  $a$

۲۸

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f(1) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x+2) = -3$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $1$       (۴)  $2$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{4x^2}{2})}{x \times x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

۲۹

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

تابع باضابطه  $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & , \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & , \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$  در نقطه  $x = \frac{3\pi}{4}$  پیوسته است ،  $a$  کدام است؟

(۱)  $-1$       (۲) صفر      (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $1$

۳۰

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^+} f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} f(x) = a \sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a \quad -a = -1 \longrightarrow a = 1$$

سراسری تجربی ۸۹

حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$  ، کدام است ؟

۳۱

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (+∞)      ۴ (-∞)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$$

سراسری تجربی ۸۹

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & , \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$  با شرط  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$  ، در بازه  $[0, 2\pi]$  پیوسته است ،

۳۲

$a - b$  کدام است ؟

۱ (-۵)      ۲ (-۴)      ۳ (۴)      ۴ (۵)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = b \cos \pi = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1$$

$$\begin{cases} -b = 2 \longrightarrow b = -2 \longrightarrow a - b = 5 \\ a - 1 = 2 \longrightarrow a = 3 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

در تابع  $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$  ، اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$  باشد ، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است ؟

۳۳

۱ (۰)      ۲ (۲/۳)      ۳ (۳/۴)      ۴ (۳/۲)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = 3 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 3 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{ax} = 3 \longrightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( 2 - \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}} \right) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

۳۴ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & , x > 2 \\ 2x + b & , x \leq 2 \end{cases}$  ، به ازای کدام مقدار  $b$  ، همواره پیوسته است ؟

۴ (۴)                      ۲ (۳)                      -۲ (۲)                      -۴ (۱)

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 6x}{1} = 0 \quad 4 + b = 0 \longrightarrow b = -4$$

سراسری تجربی ۸۸

۳۵ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$  کدام است ؟

۲ (۴)                      ۱ (۳)                       $\frac{1}{2}$  (۲)                      -۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(2)(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)}{-2 \sin 2x} = \frac{(2)(1+1)(-1)}{-2(-1)} = -2$$

سراسری تجربی ۸۸

۳۶ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , |x| > 1 \\ 2x & , |x| \leq 1 \end{cases}$  ، از نظر پیوستگی در دو نقطه ، به طول های ۱ و -۱ چگونه است ؟

- (۱) در (-۱) ناپیوسته - در (۱) ناپیوسته                      (۲) در (-۱) ناپیوسته - در (۱) پیوسته
- (۳) در (-۱) پیوسته - در (۱) پیوسته                      (۴) در (-۱) پیوسته - در (۱) ناپیوسته

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \qquad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \qquad f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x}{1} = -2$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}}$  ، کدام است ؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار  $a$  ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  همواره پیوسته است ؟

۳۸

هیچ مقدار  $a$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{3}{2}$  (۱)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = a + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2} \qquad a + \frac{1}{2} = -1 \longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$



<p>سراسری تجربی ۸۷</p> <p>در تابع با ضابطه <math>f(x) = (x+a)[x]</math>، اگر <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3</math> باشد، عدد حقیقی <math>a</math> کدام است؟</p> <p>۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2+a)(2) = 4 + 2a</math>      <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2+a)(1) = 2 + a</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \longrightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \longrightarrow a = 1</math></p>	<p>۳۹</p>
<p>سراسری تجربی ۸۷</p> <p>در تابع با ضابطه <math>f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2-x}, &amp; x \neq 2 \\ a, &amp; x = 2 \end{cases}</math>، به ازای کدام مقدار <math>a</math> در نقطه <math>x = 2</math> پیوسته است؟</p> <p>۱ (۴)      <math>-\frac{1}{2}</math> (۳)      ۱ (۲)      ۲ (۱)</p> <p><math>f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)</math>      <math>f(2) = a</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2-x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}</math>      <math>a = -\frac{1}{2}</math></p> <p><b>نکته:</b> توجه داشته باشیم که در این تابع، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست.</p>	<p>۴۰</p>
<p>سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور</p> <p>حاصل <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}</math>، کدام است؟</p> <p>۱ (۳)      ۲ (۴)      ۳ (۲)      ۴ (۱)</p> <p>چون <math>x \rightarrow \frac{\pi}{4}</math> پس <math>x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 0</math>، بنابراین <math>\sin(x - \frac{\pi}{4}) \approx x - \frac{\pi}{4}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 + \tan^2 x)}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{-(1+1)}{1} = -2</math></p>	<p>۴۱</p>

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  
 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & , x \geq -1 \\ x^2 + ax & , x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته است؟

۴۲

(۱)  $\{1, \sqrt{2}\}$  (۲)  $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $\mathbb{R}$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 - a \quad \frac{1}{-1+a} = 1 - a \rightarrow (1-a)^2 = -1 \xrightarrow{\Delta < 0} \emptyset$$

سراسری تجربی ۸۶

در بازه  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  همواره داریم:  $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)) = 0$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

کدام است؟

۴۳

(۱)  $-\pi$  (۲)  $0$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

**نکته: (قضیه فشردگی)** اگر در بازه  $[a, b]$ ،  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = k$

و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k$  (عدد منحصر به فرد است)، اگر  $g$  در همسایگی محذوف  $x_0$  تعریف شده باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x}) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x}) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = -\pi \cos \pi = \pi$$

سراسری تجربی ۸۶

تابع با ضابطه  
 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & , x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}) & , x \leq 0 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در  $x = 0$  پیوسته است؟

۴۴

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) هیچ مقدار  $a$  (۴) هر مقدار

$$f(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x) \qquad f(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = 2$$

$$\frac{1}{2}a = 2 \longrightarrow a = 4$$

در این جا می توان از هم ارزی نیز استفاده کرد .

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$  ، کدام است ؟

۴۵

نکته: (هم ارزی رادیکالی) وقتی  $x \longrightarrow \pm\infty$  داریم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$\frac{2}{3}$  (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $-\frac{1}{4}$  (۲)       $-\frac{1}{3}$  (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - |2x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 1 & , x > 1 \\ ax - a + 3 & , x \leq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  ، در نقطه  $x = 1$  پیوسته است ؟

(۱) فقط  $\frac{1}{2}$       (۲) فقط ۲      (۳) هیچ مقدار  $a$       (۴) هر مقدار  $a$

۴۶

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \qquad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a + 3 = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 1}{1} = 3 \quad (2) \quad (1), (2) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$$

بنابراین تابع  $f$  همواره در  $x = 1$  پیوسته است و پارامتر  $a$  ، هر مقدار دلخواهی می تواند باشد .

سراسری تجربی ۸۵

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$  ، کدام است؟

۴۷

$\frac{1}{16}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{3}{16}$  (۲)

$\frac{3}{8}$  (۱)

**نکته:** به منظور رفع ابهام  $\infty - \infty$  ، مخرج مشترک می گیریم .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \infty - \infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{16}$$

سراسری تجربی ۸۵

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+|x|} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$  از نظر پیوستگی در  $x=0$  ، چگونه است؟

۴۸

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad f(0) = 1 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x+|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3)$$

$$(1), (3) \longrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2+x}$  ، کدام است؟

۴۹

$\frac{5}{4}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{7}{4}$  (۱)

**نکته:** هرگاه در محاسبهٔ حدود کسری به عبارت مبهم  $\frac{0}{0}$  برسیم ، از قاعدهٔ هوییتال استفاده می کنیم . یعنی از صورت

و مخرج کسر به طور جداگانه مشتق گرفته و حد کسر حاصل را می یابیم .

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2 + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1} = -\frac{7}{4}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

اگر تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x^2 + x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

پیوسته باشد،  $a$  کدام است؟

(۱) ۰      (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳) ۱      (۴) ۲

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$        $f(0) = a$  (۱)

(۱), (۲)  $\rightarrow a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3x^2 + 1} = 2 \quad (۲)$$

سراسری تجربی ۸۴

حد کسر  $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$  با شرط  $n > 3$ ، وقتی  $x \rightarrow +\infty$  برابر  $(-2)$  است.  $m + n$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$       (۲) ۴      (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴) ۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2 \rightarrow \begin{cases} m+3 = n-2 \rightarrow n = m+5 \\ \frac{1}{m} = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$n = \frac{9}{2}$        $m + n = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4$

سراسری تجربی ۸۴

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ ax + 5x - a, & x < 1 \end{cases}$  به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  در بازه  $[-2, 2]$  پیوسته است؟

(۱)  $\emptyset$       (۲)  $\mathbb{R}$       (۳)  $\{0, 1\}$       (۴)  $\{-2, 2\}$

**نکته:** در تعیین پیوستگی توابع دو یا چند ضابطه ای، ابتدا پیوستگی تابع را در هر یک از ضابطه ها یافته و سپس پیوستگی تابع را در مرز ناحیه بررسی می کنیم.

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 4 = 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 5 - a = 5$

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \emptyset$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

۵۳ در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < -2 \\ 3x + 4, & x > -2 \end{cases}$  مقدار حد چپ در نقطه  $x = -2$  عکس مقدار حد راست در این

نقطه است، مقدار  $a$  کدام است؟

$-\frac{9}{2}$  (۴)

$-4$  (۳)

$\frac{7}{2}$  (۲)

$3$  (۱)

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 4 + a$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$

$4 + a = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{9}{2}$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

۵۴ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$  ، کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$3$  (۲)

$\infty$  (۱)

روش اول:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{(1 + 1)(1 + 1)} = \frac{1}{4}$

$\sqrt[n]{1 \pm u} \approx (1 \pm \frac{u}{n})$

نکته: هم ارزی برنولی: وقتی  $u \rightarrow 0$  داریم:  $(1 \pm u)^n \approx 1 \pm nu$

روش دوم:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{4})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{4}$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

۵۵ اگر  $f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ \frac{a}{x + 1}, & x \geq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f + g$  در  $x = 1$

پیوسته است؟

$2$  (۴)

$-2$  (۳)

$4$  (۲)

$-4$  (۱)

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+a+1, & x < 1 \\ \frac{a}{x+1}+1, & x \geq 1 \end{cases} \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{a}{2} + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3 \quad \frac{a}{2} + 1 = a + 3 \longrightarrow a = -4$$

سراسری تجربی ۸۳

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|}$  ، کدام است ؟

$\pi$  (۴)       $\frac{\pi}{2}$  (۳)       $-\frac{\pi}{2}$  (۲)       $-\pi$  (۱)

۵۶

چون  $x \rightarrow 1^+$  پس  $x > 1$  و لذا  $x^2 - 1 > 0$  بنابراین داریم:  $|x^2 - 1| = x^2 - 1$

**روش اول:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x} = \frac{\pi(1 + 0)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

**روش دوم:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\tan(\pi - \pi x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(\pi - \pi x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\pi}{2}$$

سراسری تجربی ۸۳

مجموعه طول نقاط ناپیوستگی نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4x}, & |x| > 1 \\ 2x - 1, & |x| \leq 1 \end{cases}$  ، کدام است ؟

$\emptyset$  (۴)       $\{-1\}$  (۳)       $\{1\}$  (۲)       $\{-1, 1\}$  (۱)

**نکته:** برای تعیین نقاط ناپیوستگی توابع دو ضابطه ای، ابتدا تعداد نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع را در دسته آن ها تعیین کرده و سپس پیوستگی را در مرز ناحیه مشخص می کنیم.

۵۷

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4x}, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ 2x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

if  $x = 1 \rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$        $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - 1 = 1$  (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{5 - 4} = 1$  (۲)      (۱), (۲)  $\rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

if  $x = -1 \rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3 \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \sqrt{5+4} = 3 \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

سراسری تجربی ۸۲

حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$  ، کدام است ؟

۵۸

- (۱) -۱      (۲) ۰      (۳) ۱      (۴) +∞

$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{1 + (-1)}{1 + (-1)} = \frac{0}{0} \rightarrow$  مبهم

روش اول:

$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\tan \frac{3\pi}{4}} = -1$

روش دوم:

$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{-(1+1)}{1+1} = -1$

دقت کنید در این تست نمی توانستیم از هم ارزی های مثلثاتی استفاده کنیم .

سراسری تجربی ۸۲

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} & , x > 1 \\ ax - a + 4 & , x \leq 1 \end{cases}$  ، به ازای کدام مقدار  $a$  ، در  $\mathbb{R}$  پیوسته است ؟

۵۹

- (۱) هیچ مقدار  $a$       (۲) هر مقدار حقیقی  $a$       (۳) فقط  $a = 0$       (۴) فقط  $a = 4$

تابع  $f$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است پس در نقطه مرزی  $x = 1$  نیز پیوسته می باشد . بنابراین داریم :

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a + 4 = 4 \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4 \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a \in \mathbb{R}$



چون  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$  و مقدار  $a$  هیچ تاثیری در پیوستگی تابع در  $x=1$  ندارد، پس به ازای هر مقدار حقیقی  $a$ ، تابع در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. توجه داشته باشید که تابع  $f$  در سایر نقاط  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

سراسری تجربی ۸۱

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$  ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{3}{4}$       (۳)  $\frac{4}{3}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

۶۰

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۱

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2\cos x & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & , \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$  با تعریف  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ، از نظر پیوستگی در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  چگونه است؟

۶۱

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\sin x + 2\cos x) = \sin \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (-\cos 2x) = -(\cos \pi) = -(-1) = 1 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 1$$

سراسری تجربی ۸۰

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & , x \geq -1 \\ 2x+1 & , x < -1 \end{cases}$  در نقطه  $x = -1$  حد دارد؟

- (۱)  $\{0\}$       (۲)  $\{2\}$       (۳)  $\emptyset$       (۴)  $\mathbb{R}$

۶۲

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+a)^2 = (-1+a)^2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+1) = -1 \quad (2)$$

$\xrightarrow{(1),(2)} (-1+a)^2 = -1 \rightarrow \emptyset$

سراسری تجربی ۸۰

حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1}$  ، کدام است ؟

- ۲ (۴)                      -۲ (۳)                       $\frac{1}{2}$  (۲)                       $-\frac{1}{2}$  (۱)

۶۳

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3x^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۷۹

حد عبارت  $\frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$  وقتی  $x \rightarrow (-2)$  برابر کدام است ؟

- $\frac{3}{2}$  (۴)                       $\frac{2}{3}$  (۳)                       $-\frac{2}{3}$  (۲)                       $-\frac{3}{2}$  (۱)

۶۴

**روش اول:** صورت و مخرج کسر را گویا می کنیم یعنی صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم .

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - (2x+8)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)}{(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

**روش دوم:**

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x+8}}\right) = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۷۹

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$  در مجموعه اعداد حقیقی کدام است ؟

- ۳ (۴)                      ۲ (۳)                      ۱ (۲)                      ۰ (۱)

۶۵

**روش اول:** توابع کسری در نقاطی به طول های ریشه های مخرج ناپیوسته می باشند .

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \rightarrow 1+|x| = 0 \rightarrow |x| = -1 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد .}$$

چون مخرج کسر ریشه ندارد، تابع نقطه ناپیوستگی ندارد.

**روش دوم:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x|}{1+|x|} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x}{1+x} = \frac{a}{1+a} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-x}{1-x} = \frac{-a}{1-a}$$

$$\frac{a}{1+a} = \frac{-a}{1-a} \rightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{-1}{1-a} \rightarrow 1-a = -1-a \rightarrow 1 \neq -1$$

سراسری تجربی ۷۸

حد عبارت  $(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+x}{x-1})$  وقتی  $x \rightarrow +\infty$  برابر کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۰ (۴) ۱

**نکته:** برای رفع ابهام  $\infty - \infty$ ، مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+x}{x-1}) = \infty - \infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x-1) - (x^2+x)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

سراسری تجربی ۷۸

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x \sin(x + \frac{\pi}{6}))]$  ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲) ۰ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x \sin(x + \frac{\pi}{6}))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

**نتیجه قضیه فشردگی:** اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و  $g(x)$  کران دار باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

سراسری تجربی ۷۸

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$  ، به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  در  $x=0$  پیوسته است؟

- (۱)  $\{0\}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $\{2\}$  (۴)  $\{0, 2\}$

$$f(0) = a \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-|x|}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x}{x} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x}{x} = 2 \quad (3) \quad (1), (2), (3) \rightarrow \emptyset$$

برای این که تابع در  $x = 0$  پیوسته باشد باید  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$  باشد که به ازای هیچ مقدار  $a$  این شرط برقرار نمی شود. زیرا اصلاً تابع در این نقطه حد ندارد.

سراسری تجربی ۷۸

اگر  $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$  باشد، آنگاه  $a$  کدام است؟

۶۹

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۵

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{a}{-\frac{5}{2\sqrt{5x + 16}}} = 2 \rightarrow \frac{a}{-\frac{5}{2}} = 2 \rightarrow a = -5$$

سراسری تجربی ۷۷

تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در نقطه  $x = 1$  پیوسته است؟

۷۰

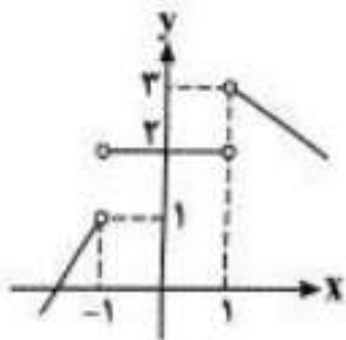
(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$f(1) = a \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{1} = -2$$

سراسری تجربی ۷۶

با توجه به شکل مقابل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ ، کدام است؟

۷۱



(۱) -۲ (۲) -۱

(۳) ۲ (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

**نکته:** اگر  $x_0$  یک نقطه انتهایی دامنه  $f$  باشد، یعنی  $f$  فقط در یک طرف  $x_0$  تعریف شده باشد، به طوری که در  $x_0$  فقط حد راست یا حد چپ وجود داشته باشد، در این حالت حد راست یا حد چپ همان حد تابع است.

سراسری تجربی ۷۶

حد عبارت  $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x^2 - 2x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

-۱ (۱)

۷۲

**نکته:** (قاعده کم توان): چند جمله ای های جبری، وقتی متغیر به سمت صفر میل می کند، هم ارز با جمله ای از کوچک ترین درجه اند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2}$$

**هم ارزی های برنولی:**

الف) اگر  $u$  تابعی از  $x$  بوده و  $\lim_{x \rightarrow a} u = 0$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} (1 \pm u)^n = \lim_{x \rightarrow a} 1 \pm nu$

ب) اگر  $u$  تابعی از  $x$  بوده و  $\lim_{x \rightarrow a} u = 0$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{1 \pm u} = \lim_{x \rightarrow a} 1 \pm \frac{u}{n}$

**نکته:** استفاده از هم ارزی در صورتی که منجر به صفر مطلق شود، اشتباه است که در این حالت بایستی از هم ارزی

کامل تر استفاده کنیم.

$$\sin u \approx u - \frac{u^3}{6} \quad \tan u \approx u + \frac{u^3}{3}$$

**نکته:** برای محاسبه ی حدهایی به صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  که منجر به عبارت مبهم  $1^\infty$  می شوند، ابتدا با محاسبه  $k = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1) \times g(x)$ ، حاصل حد برابر با  $e^k$  خواهد بود.

همکاران و دانش آموزان عزیز قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدرم است.

با تشکر: سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴) و یا به ایمیل [seyedalimousavi48@gmail.com](mailto:seyedalimousavi48@gmail.com) ارسال فرمائید. با تشکر