۱. گزینه ۱

ضابطه‌ی $f-g$ را تشکیل داده و با توجه به آن، مجانب‌ها را می‌یابیم.

$$f-g=\frac{x+۱۱}{(x-۴)(x+۱)}-\frac{۳}{x-۴}=\frac{-۲(x-۴)}{(x+۱)(x-۴)}=\frac{-۲}{x+۱}$$

$$\begin{cases} \text{مجانب قائم: } x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \\ \text{مجانب افقی: } y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-۲}{x+۱}=۰ \end{cases}\Rightarrow(-۱,۰)\ \text{محل برخورد}$$

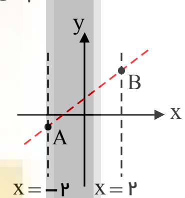
۲. گزینه ۴

$$x^۲-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=-۲\end{cases}\ \text{مجانب‌های قائم}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲ & x^۲-۴ \\ \vdots & x+۱ \\ \hline R & \end{array}\Rightarrow\frac{x^۳+x^۲}{x^۲-۴}=x+۱+\frac{R}{x^۲-۴}\Rightarrow y=x+۱\ \text{مجانب مایل}$$

چون‌که $\lim\limits_{x\to\pm۴}y=\infty$ لذا تابع فاقد مجانب افقی است.

سه مجانب را رسم می کنیم.




$$x=۲\xrightarrow{\text{خط}}y=۲+۱=۳\to B\Big|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}$$

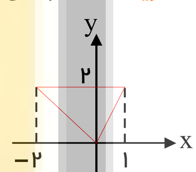
$$x=-۲\xrightarrow{\text{خط}}y=-۲+۱=-۱\to A\Big|\begin{matrix}-۲\\-۱\end{matrix}$$

$$|AB|=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۳-(-۱))^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

۳. گزینه ۱ ضابطه‌ی $(g-f)(x)$ را تشکیل داده و باتوجه به آن، مجانب‌ها را می‌یابیم.

$$y=g-f=\frac{x^۲}{x-۱}-\frac{x^۲+x}{x+۲}\Rightarrow y=\frac{۲x^۲+x}{(x-۱)(x+۲)}\Rightarrow x=۱,x=-۲\ \text{مجانب های قائم}$$

$$y=۲\ \text{مجانب افقی}\to S=\frac{۲\times۳}{۲}=۳\ \text{مجانب های قائم}$$





مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

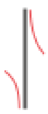
**۴. گزینه ۳**

$x^{3}+x=0 \rightarrow x(x^{2}+1)=0 \rightarrow x=0$

**توجه: برای بررسی رفتار یک تابع در اطراف مجانب قائم آن، باید حد چپ و راست تابع را به ازای ریشه‌ی مخرج بیابیم.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^{+}} \dfrac{x+1}{x(x^{2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^{+}} \dfrac{1}{x(1)} = \dfrac{1}{0^{+}} = +\infty \rightarrow \text{یعنی از راست به خط } x=0 \text{ نزدیک می شویم باید به سمت بالا برویم} \\ \lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{x+1}{x(x^{2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{1}{x(1)} = \dfrac{1}{0^{-}} = -\infty \rightarrow \text{یعنی از چپ به خط } x=0 \text{ نزدیک می شویم باید به سمت پایین برویم} \end{cases}$$

**در نتیجه تابع در اطراف مجانب قائم به شکل زیر می باشد:**



**۵. گزینه ۴**

**ابتدا کسر عبارت زیر رادیکال را تفکیک می‌کنیم و سپس حد در $\infty$ می گیریم و نیز می‌توانیم از هم ارزی رادیکالی استفاده کنیم.**

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^{3}+x^{2}}{x-2}}=\sqrt{x^{2}+3x+6+\frac{12}{x-2}}$$

$$y=\sqrt{x^{2}+3x+6}\sim\left|x+\frac{3}{2}\right| \Rightarrow \left(x\rightarrow-\infty \Rightarrow y=-x-\frac{3}{2} \Rightarrow 2y+2x+3=0\right)$$

**۶. گزینه ۴**

نکته:

$$f(x)=(ax+b)\cdot\sqrt[n]{\frac{x+M}{x+N}} \rightarrow y=ax+b+\frac{M-N}{n}\times a \quad \text{خط مجانب مایل}$$

$$f(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\frac{x+a}{x-1}} \rightarrow y=x-2+\frac{a-(-1)}{2}\times 1=x+\frac{a+1}{2}-2$$

با مقایسه خط $y=x+\frac{a+1}{2}-2$ با خط $y=x+2$ داریم:

$$\frac{a+1}{2}-2=2 \rightarrow \frac{a+1}{2}=4 \rightarrow a=7$$

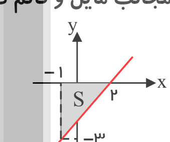
**۷. گزینه ۴**

$$y=(ax+b)\cdot\sqrt[n]{\frac{x+M}{x+N}} \xrightarrow{\text{خط مجانب مایل}} y=ax+b+\frac{M-N}{n}\times a$$

$$y=(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow \text{معادله ی مجانب مایل}: y=x-1+\frac{-1-1}{2}=x-2$$

**هم چنین $x=-1$ ریشه ی مخرج و خط $x=-1$ به عنوان مجانب قائم محسوب می شود، زیرا $\lim\limits_{x\to(-1)^{-}} y=-\infty$. با رسم مجانب مایل و قائم در یک دستگاه داریم:**

$$S=\frac{1}{2}(3)(3)=4/5$$




**۸. گزینه ۱** **اولاً: باید $a$ مثبت باشد، زیرا اگر $a<0$ باشد دامنه ی $f$ محدود خواهد بود و نمی تواند $x\rightarrow+\infty$ یا $x\rightarrow-\infty$ و در نتیجه $f$ مجانب افقی نخواهد داشت. در ضمن اگر $a=0$ باشد، آن گاه $f$ در بی نهایت نمی تواند حد متناهی (مثلاً $\frac{3}{2}$) داشته باشد.**

**پس $a$ حتماً مثبت است.**

**ثانیاً: تابع $f$ فقط در $x\rightarrow-\infty$ می تواند مجانب افقی داشته باشد، زیرا در $x\rightarrow+\infty$، حد تابع $f$ نامتناهی $(+\infty)$ می شود. بنابراین:**

مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(2x-1+\sqrt{ax^2+bx})=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(2x-1+\sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|)=\lim_{x\to-\infty}(2x-1-\sqrt{a}x-\frac{b\sqrt{a}}{2a})=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[(2-\sqrt{a})x+(-1-\frac{b}{2\sqrt{a}})]=\frac{3}{2}\Rightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{a}=0\Rightarrow a=4 \\ -1-\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{3}{2}\xrightarrow{a=4}\frac{-b}{4}=\frac{5}{2}\Rightarrow b=-10\end{cases}$$

**۹.گزینه ۳ روش اول: ابتدا مجانب افقی تابع را به دست آورده و سپس معادله ی تقاطع منحنی و مجانب افقی را حل می کنیم تا طول نقطه ی تقاطع به دست آید. داریم:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2-2x+1}\xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین توان}}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

**بنابراین$y=2$ مجانب افقی تابع است. حال به حل معادله‌ی تقاطع منحنی و مجانب افقی می پردازیم:**

$$\frac{2x^2-3x}{x^2-2x+1}=2\Rightarrow 2x^2-3x=2x^2-4x+2\Rightarrow x=2 \text{ طول نقطه ی تقاطع}$$

**خط $x=1$ به عنوان مجانب قائم است، زیرا:**

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\Rightarrow x=1 \text{ مجانب قائم}$$

بنابراین فاصله ی نقطه ی$A$ به طول ۲ از خط $x=1$ برابر است با: $d=|2-1|=1$

**روش دوم: در توابع کسری برای یافتن محل تلاقی نمودار تابع با مجانب افقی یا مایل، می توان صورت را بر مخرج تقسیم کرد و باقی مانده را به دست آورد. با مساوی صفر قرار دادن عبارت باقی مانده، طول نقطه ی تلاقی (در صورت وجود) به دست می آید:**

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x & x^2-2x+1 \\ \vdots & 2 \\ \hline x-2 & \end{array}$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2 \text{ طول نقطه ی تلاقی}$$

**۱۰.گزینه ۴ مجانب مایل منحنی تابع $f$ وقتی $x\to+\infty$، به صورت خطی گذرنده از مبدأ مختصات (با ضابطه ی کلی $y=mx$ ) می باشد و برای $x\to-\infty$، منحنی دارای مجانب افقی با ضابطه ی $y=0$ (محور $x$ ها) می باشد، لذا:**

$$\xrightarrow{\sqrt{x^2+bx+c}=\left|x+\frac{b}{2}\right|} y=ax+\left|x+\frac{b}{2}\right|=\begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} y=(a+1)x+\frac{b}{2} & (1)\ \text{مجانب مایل}\\ \xrightarrow{x\to-\infty} y=(a-1)x-\frac{b}{2} & (2)\ \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

**از مقایسه‌ی معادله‌ی (۲) با $y=0$ درمی‌یابیم باید $a=1$ باشد و $b=0$، یعنی ضابطه‌ی $f$ به فرم $f(x)=x+\sqrt{x^2+c}$ تبدیل می‌شود. پس گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) به سادگی حذف می‌شوند و گزینه‌ی (۴) به عنوان پاسخ تست انتخاب خواهد شد.**

**( در ضمن باید $c>0$ باشد تا هم $Df=\mathbb{R}$ باشد و هم منحنی بالای مجانب‌هایش قرار گیرد.)**

**۱۱.گزینه ۱ تابع $f$ مجانب قائم ندارد چون کسری نیست بنابراین مجانب های افقی و مایل را در صورت وجود به دست می‌آوریم و برای این کار حد تابع را وقتی $x\to\infty$ محاسبه می‌کنیم:**

**از هم‌ارزی مقابل کمک می‌گیریم:**

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}}\overset{n\ \text{فرد}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na})\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{-x^3+x^2})=\lim_{x\to\infty}(x-(x-\frac{1}{3}))=\frac{1}{3}$$

**بنابراین تابع مجانب افقی $y=\frac{1}{3}$ دارد و مجانب مایل ندارد و برای محاسبه محل برخورد منحنی و خط $y=\frac{1}{3}$ باید گزینه‌ها را در معادله $x+\sqrt[3]{x^2-x^3}=\frac{1}{3}$ امتحان کنیم آنگاه: $x=\frac{1}{9}$**

**۱۲.گزینه ۴ منحنی مجانب قائم ندارد چون کسری نیست برای محاسبه مجانب افقی و مایل از تابع حد در $\infty$ می‌گیریم.**

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})=\lim_{x\to\pm\infty}|x+1|-|x-1|$$

مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

$۱)\ x \to +\infty \quad y = x+۱-x+۱ = ۲$ مجانب افقی و $۲)\ x \to -\infty \quad y = -x-۱+x-۱ = -۲$ مجانب افقی

نیم ساز ناحیه اول و سوم خط $y=x$ است بنابراین نقاط برخورد $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۲ \end{vmatrix}$ , $B\begin{vmatrix} -۲ \\ -۲ \end{vmatrix}$ می‌باشد.

$$dAB = \sqrt{(۲-(-۲))^۲ + (۲-(-۲))^۲} = \sqrt{۱۶+۱۶} = ۴\sqrt{۲}$$

۱۳. گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲-۱}} \to \text{مجانب‌های قائم} \to \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$$\text{مجانب مایل} \to f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲-۱}} = \sqrt{\frac{x^۴}{x^۲-۱}} = \sqrt{x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲-۱}} \to y=|x| \to \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases} \text{مجانب‌های مایل}$$

هر کدام از مجانب‌های مایل را با مجانب‌های قائم تقاطع می‌دهیم و نقاط با عرض مثبت را انتخاب می‌کنیم.

$$x=۱ \to \begin{cases} y=x \to y=۱ \to A(۱,۱) \\ y=-x \to y=-۱ \ \times \end{cases} \quad , \quad x=-۱ \to \begin{cases} y=x \to y=-۱ \times \\ y=-x \to y=۱ \to B=(-۱,۱) \end{cases}$$

$$|AB| = \sqrt{۴+۰} = ۲$$

۱۴. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} Df = (۰,+\infty) \\ Dg = (۰,+\infty) - \{۱\} \end{array}\right\} \Rightarrow Df+g = Df \cap Dg = (۰,+\infty) - \{۱\}$$

$$(f+g)(x) = \frac{x+۱}{x+\sqrt{x}} + \frac{۱-x}{x-\sqrt{x}} = \frac{(x+۱)(x-\sqrt{x}) + (۱-x)(x+\sqrt{x})}{x^۲-x}$$

$$= \frac{x^۲ - x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x^۲ - x\sqrt{x}}{x(x-۱)} = \frac{۲x - ۲x\sqrt{x}}{x(x-۱)} = \frac{۲x(۱-\sqrt{x})}{x(x-۱)} = \frac{۲(۱-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)} = \frac{-۲}{\sqrt{x}+۱}$$

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = ۰ \to y = ۰ \quad \text{مجانب افقی}$$

مخرج ریشه ندارد پس مجانب قائم ندارد گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۱۵. گزینه ۴ ابتدا تابع $y = x \cdot f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$y = x \cdot f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}}$$

مجانب قائم: $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$ خط مجانب قائم

مایل و افقی: $x \to \infty \quad y = \infty \times \sqrt{\frac{x}{x}} = \infty \times ۱ = \infty$

افقی ندارد شاید مایل داشته باشد.

توجه:

$$y = mx \cdot \sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} \to y = mx + \frac{a-b}{n} \times m \quad \text{خط مجانب مایل}$$

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}} \to y = x + \frac{۱-(-۲)}{۲} \Rightarrow y = x + \frac{۳}{۲}$$

خط مجانب مایل

$$\text{خط مجانب قائم } x=۲ \xrightarrow{\text{خط مایل}} y = ۲ + \frac{۳}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir