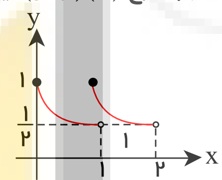
۱.گزینه ۲ با توجه به اینکه $(gof)(x)=2^{[x]-x}$ و تابع $f(x)=[x]-x$ متناوب با دوره‌ی تناوب ۱ $T=1$ است، لذا دوره‌ی تناوب تابع $(gof)(x)$ نیز برابر یک خواهد بود. بنابراین مسأله را در بازه‌ی $[0,2)$ بررسی می‌نماییم. لذا داریم:

$$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow (gof)(x)=2^{-x} \quad , A(0,1), B(1,\frac{1}{2})$$

$$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow (gof)(x)=2^{1-x} \quad , A'(1,1), B'(2,\frac{1}{2})$$



همانگونه که مشاهده می‌شود، اعداد با طول صحیح ماکزیمم نسبی می‌باشند و همچنین تابع فاقد مینیمم نسبی است.

۲.گزینه ۴

دامنه‌ی تابع برابر $x\in(0,+\infty)$ می‌باشد. در نتیجه نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم. لذا داریم:

$$y=\frac{3a}{\sqrt[4]{a^3\cdot x}}+\frac{x}{\sqrt[4]{a^3\cdot x}} \Rightarrow y=3a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y'=3a^{\frac{1}{4}}\times\frac{-1}{4}x^{-\frac{5}{4}}+\frac{3}{4}a^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{4}}=0$$

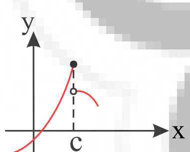
$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{x^5}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow x=a \Rightarrow f(a)=\frac{3a+a}{\sqrt[4]{a^3a}}=4$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لذا حداقل مقدار تابع برابر ۴ می‌باشد.

۳.گزینه ۲ در عبارت $\sqrt[3]{x^3-3x^2}$، از آن‌جا که $3x^2\ge 0$ لذا $\sqrt[3]{x^3-3x^2}\le\sqrt[3]{x^3}$ و به بیان دیگر $x\ge\sqrt[3]{x^3-3x^2}$، در نتیجه همواره $f(x)\ge 0$ بوده و مینیمم مطلق تابع برابر صفر است.

دقت نمایید با مشتق گیری از تابع $f(x)$ و به‌دست آوردن نقاط بحرانی، مسیر بسیار طولانی خواهد گردید.

۴.گزینه ۴



نقطه‌ای ماکسیمم سراسری (مطلق) است که بزرگتر یا مساوی همه‌ی نقاط دامنه باشد و نقطه‌ای مینیمم مطلق است که کوچکتر یا مساوی همه‌ی نقاط دامنه باشد.

نکته: اگر f در همسایگي c تعریف شده باشد و نقطه‌ي $M\Big|_{f(c)}^{c}$ اکسترمم سراسري باشد، در این صورت نقطه M اکسترمم موضعي f خواهد بود.

در گزینه‌های دیگر، در تابع $f(x)$ به شکل زیر، نقطه c ماکسیمم مطلق بوده ولی ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر می باشد و خط مماس نیز افقی نیست.

۵.گزینه ۲

همانگونه که می‌دانیم در توابع هموگرافیک به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ مرکز تقارن، محل برخورد مجانب های قائم و افقی می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$f(x)=\frac{(۲a-۱)x+۳}{۲x+a}\Rightarrow\begin{cases} \text{مجانب افقی} & y=\frac{۲a-۱}{۲}\\ \text{مجانب قائم} & x=-\frac{a}{۲}\end{cases}$$

مختصات مرکز تقارن را داخل خط محور تقارن قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow \text{مرکز تقارن } O(-\frac{a}{۲},\frac{۲a-۱}{۲})\xrightarrow{y=x+۴}\frac{۲a-۱}{۲}=\frac{-a}{۲}+۴\Rightarrow\frac{۲a-۱}{۲}=\frac{-a+۸}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a-۱=-a+۸\Rightarrow ۳a=۹\Rightarrow a=۳\Rightarrow O(-\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$$

از آنجا که دو محور تقارن توابع هموگرافیک بر یکدیگر عمودند لذا شیب دیگری (-۱) می‌باشد. لذا داریم:

$$y-\frac{۵}{۲}=-۱(x+\frac{۳}{۲})\Rightarrow y=-x+۱\Rightarrow \text{عرض از مبداء } (x=۰)\Rightarrow y=۱$$

۶.گزینه ۳ $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & x\geq -۱\\ -۱۳-\frac{۹}{x} & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۶x & x\geq -۱\\ \frac{۹}{x^۲} & x<-۱\end{cases}\qquad f'_+(-۱)=f'_-(-۱)=۹$$

$$f''(x)=\begin{cases} ۶x-۶ & x>-۱\\ \frac{-۱۸}{x^۳} & x<-۱\end{cases}\rightarrow f''(x)=۰\rightarrow ۶x-۶=۰\rightarrow x=۱$$

x		-۱		۱	
y''	+		−	۰	+
y	∪		∩		∪

از طرفی در $x=-۱$، مشتق دوم وجود ندارد زیرا:

$$f''_+(-۱)\neq f''_-(-۱)$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت $f''(x)$ مشاهده می شود تقعر تابع $f(x)$ در نقاط $x=-۱$ و $x=۱$ تغییر می کند و در هر نقطه خط مماس واحد وجود دارد، لذا دو نقطه عطف دارد.

۷.گزینه ۴ مجانب‌های تابع را در بی‌نهایت به کمک هم‌ارزی بدست می‌آوریم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} ax+\sqrt{x^۲+bx}=ax+\left|x+\frac{b}{۲}\right|=\begin{cases} ax+x+\frac{b}{۲}=x(a+۱)+\frac{b}{۲} & x\to+\infty\\ ax-x-\frac{b}{۲}=x(a-۱)-\frac{b}{۲} & x\to-\infty\end{cases}$$

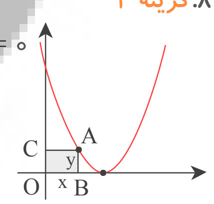
در $x\to+\infty$ مجانب افقی $y=-۱$ است. لذا داریم:

$$x\cdot(a+۱)+\frac{b}{۲}=-۱$$

$$a+۱=۰\Rightarrow a=-۱\ ,\ \frac{b}{۲}=-۱\Rightarrow b=-۲$$

توجه: در بی‌نهایت هرگز دو عبارت مساوی یکدیگر نیستند بلکه هم‌ارز یکدیگرند یعنی ضرایب متغیرهای هم‌درجه با هم برابرند.

۸.گزینه ۳



$$SOABC=\text{عرض}\times\text{طول}=x\times y\Rightarrow SOABC=x(x-۲)^۲\Rightarrow S'=(x-۲)^۲+۲x(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x-۲+۲x)=۰\Rightarrow\begin{cases} x=۲ & \text{غ ق ق}\\ x=\frac{۲}{۳} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{max}=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲}{۳}-۲\right)^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۲}{۲۷}$$

۹.گزینه ۱ توجه: عبارت‌هایی که نامثبت هستند (منفی و صفر) بیشترین مقدار آنها صفر است.

از آنجا که $[-۱,۱]\subset(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ بوده و در این بازه $\cos x>۰$، بنابراین از $-|x|\leq ۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$-|x|\cos x\leq ۰\Rightarrow f(x)\leq ۰\Rightarrow \max(f(x))=۰$$

۱۰.گزینه ۱ ابتدا $f(x)$ را تعیین علامت کرده و سپس مشتق گیری می کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=|x-2|x^{\frac{2}{3}}=\begin{cases}(x-2)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} & x\geq 2\\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}}=-x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{2}{3}} & x<2\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} & x>2\\ -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} & x<2\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0\Rightarrow 5\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow \frac{5x-4}{\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow \text{نقاط بحرانی}\begin{cases}f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{4}{5}\\ x=0\ \text{موجود نیست}\ f'\end{cases}$$

از طرفی در $x=2$ نیز مشتق‌ناپذیر می‌باشد $(f'_-(2)\neq f'_+(2))$، لذا تابع $f(x)$ در مجموع ۳ نقطه بحرانی دارد.

۱۱.گزینه ۴ تابع محور xها را در یک نقطه قطع کرده پس صورت تابع یک ریشه دارد.

$$x^2(x+a)=0\begin{cases}x=0\\ x=a\Rightarrow a=0\end{cases}$$

حال با توجه به مجانب مایل خواهیم داشت:

$$y=\frac{x^3}{x^2-2x+b}\Longrightarrow \begin{array}{l|l} x^3 & x^2-2x+b\\ \cline{2-2} -x^3+2x^2-bx & x+2\\ \vdots & \\ \hline x(4-b)-2b & \end{array}\Longrightarrow y=x+2+\frac{x(4-b)-2b}{x^2-2x+b}$$

از آنجا که منحنی، مجانب خود را قطع نمی کند لذا معادله تلاقی منحنی و مجانب مایل فاقد ریشه است.

$$\cancel{x+2}+\frac{x\cdot(4-b)-2b}{x^2-2x+b}=\cancel{x+2}\Rightarrow \frac{x\cdot(4-b)-2b}{x^2-2x+b}=0\Rightarrow x\cdot(4-b)-2b=0$$

برای اینکه این معادله ریشه نداشته باشد باید عبارت $x\cdot(4-b)-2b=0$ فاقد متغیر x باشد بنابراین باید:

$$4-b=0\rightarrow \boxed{b=4}$$

۱۲.گزینه ۱

پس از مخرج مشترک گیری و مرتب سازی خواهیم داشت:

می‌دانیم که تابع هموگرافیک در حالت کلی یک تابع کسری است که صورت درجه اول و مخرج نیز درجه اول است.

$$y=\frac{(a+2)x^2+(a+b)x+b}{x+1}$$

برای تبدیل شدن به تابع هموگرافیک باید $a+2=0$ ولذا $a=-2$ ،ازطرفی منحنی ازنقطه $A(1,0)$ عبورمی کند.

$$(1,0)\in f\Rightarrow (b-2)+b=0\Rightarrow b=1$$

۱۳.گزینه ۱ یادآوری: $\boxed{\begin{array}{l}1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\end{array}}$

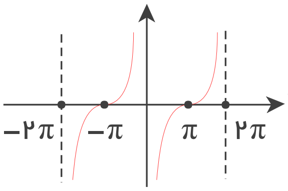
یادآوری: دوره تناوب اصلی تابع $f(x)=\tan(ax)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است $(a\neq 0)$

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}=\tan(\frac{x}{2})$$

نمودار تابع $f(x)=\tan(\frac{x}{2})$ به کمک انقباض با نسبت $\frac{1}{2}$ از تابع $y=\tan x$ مطابق شکل روبرو است. در نتیجه تابع در هر دوره‌ی متناوب، یک نقطه عطف دارد.

راه دوم:



۱۴.گزینه ۴ **راه حل اول: جهت تقعر تابع را در نقطه $x=۰$ بررسی می کنیم. لذا داریم:**

$$f(x)=۲+\sin x-x\cos x\Rightarrow f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x\Rightarrow f'(۰)=۰$$

$$f''(x)=\sin x+x\cos x=\cos x(x+\tan x)\Rightarrow\begin{cases}x>۰\Rightarrow x+\tan x>۰\Rightarrow f''(x)>۰ & \text{تقعر رو به بالا}\\ x<۰\Rightarrow x+\tan x<۰\Rightarrow f''(x)<۰ & \text{تقعر رو به پایین}\end{cases}$$

در نتیجه تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ ابتدا تقعر رو به پایین بوده و سپس رو به بالا می باشد. بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد.

راه حل دوم:

$$f(x)=۲+\sin x-x\cos x\Rightarrow f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x\Rightarrow f'(۰)=۰$$

چون $\sin x$ در اطراف نقطه صفر، هم ارز با x است پس $\sin x\simeq x$ و $f'(x)=x\times x=x^۲$ پس مشتق اول همواره مثبت است و تابع صعودی است پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۵.گزینه ۴ **از آنجا که $x=\frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم نمودار است لذا ریشه ی مخرج نیز می باشد، در نتیجه داریم:**

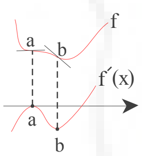
$$b+\cos(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow b=۰$$

در نقطه $x=\frac{۳\pi}{۲}$ تابع تعریف نمی شود لذا این نقطه نیز ریشه ی مخرج است ولی از آنجا که تابع در این نقطه مجانب قائم ندارد، لذا ریشه ی صورت نیز می باشد، لذا خواهیم داشت:

$$۱+a\sin(\frac{۳\pi}{۲})=۰\Rightarrow ۱+a-۱=۰\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\Rightarrow f(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۲+\sqrt{۳}$$

۱۶.گزینه ۴

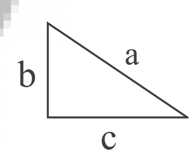


به کمک نمودار تابع $f(x)$، نمودار $f'(x)$ را رسم می کنیم. لذا خواهیم داشت:

مشاهده می‌شود نقطه a ماکزیمم نسبی صفر تابع $f'(x)$ و همچنین نقطه b مینیمم نسبی منحنی تابع $f'(x)$ می‌باشد.

توجه: در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا باشد، منحنی f' در آن بازه صعودی رسم می‌شود و در هر فاصله‌ای که تقعر f نزولی باشد، منحنی f' نزولی رسم می‌شود.

۱۷.گزینه ۲



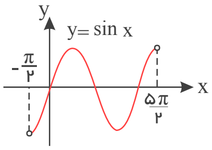
$$a+b=۶$$

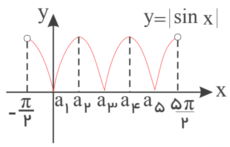
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=c^۲\Rightarrow(a+b)(a-b)=c^۲\Rightarrow ۶(a-b)=c^۲$$

$$\begin{cases}a-b=\frac{c^۲}{۶}\\ a+b=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=-\frac{c^۲}{۶}\\ a+b=۶\end{cases}\Rightarrow ۲b=۶-\frac{c^۲}{۶}\Rightarrow b=۳-\frac{c^۲}{۱۲}$$

$$S=\frac{bc}{۲}=\frac{۱}{۲}(۳-\frac{c^۲}{۱۲})c\Rightarrow S=\frac{۳}{۲}c-\frac{c^۳}{۲۴}\Rightarrow S'_c=۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}-\frac{c^۲}{۸}=۰\Rightarrow c=۲\sqrt{۳}\,,\ b=۲\Rightarrow S=۲\sqrt{۳}$$

۱۸.گزینه ۴





راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 نقاط بحرانی می باشند.

در نقطه a_1, a_3, a_5 مشتق ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط a_2, a_4 برابر صفر می باشد.

راه دوم: ریشه‌های قدرمطلق و ریشه‌های مشتق آن نقاط بحرانی تابع قدرمطلقی محسوب می‌شود.

$y=|\sin x| \quad \sin x=0 \to x=0,\pi,2\pi$

$(\sin x)'=0 \to \cos x=0 \to x=\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}$ **۵ نقطه بحرانی دارد.**

۱۹.گزینه ۲ **با توجه به نمودار تابع معادله‌ی $f(x)=0$ فقط یک ریشه دارد بنابراین:**

$$x^3+ax^2=0 \to x^2(x+a)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-a \end{cases} \to -a=0 \to a=0$$

حال با توجه به این که در اطراف مجانب قائم مقدار تابع $\underline{+\infty}$ است، لذا مخرج کسر باید ریشه مضاعف داشته باشد. لذا داریم:

$$x^2+bx+1=0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2-4=0 \Rightarrow b=\pm 2 \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} x=-\frac{b}{2}>0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow b=-2$$

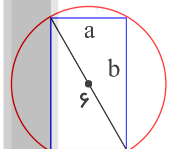
۲۰.گزینه ۳

$$y=\frac{2ax^2+2bx-ax-b+x^2}{2x-1}=\frac{(2a+1)x^2+(2b-a)x-b}{2x-1}$$

تابع هموگرافیک در حالت کلی صورت درجه اول و مخرج نیز درجه اول است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{تابع هموگرافیک} \Rightarrow 2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ A(0,1)\in y \Rightarrow 1=\frac{-b}{-1} \Rightarrow b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

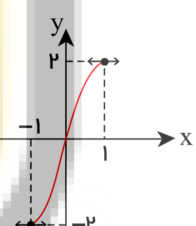
۲۱.گزینه ۲ **مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره را حول ضلع به طول b دوران می دهیم تا استوانه‌ای با ارتفاع b و شعاع قاعده‌ی a حاصل شود. بنابراین می‌خواهیم $V=\pi a^2 b$ ماکسیمم شود. از آنجا که $a^2+b^2=36$ در نتیجه داریم:**



$$a^2=36-b^2 \Rightarrow V=\pi a^2 b=\pi(36-b^2)b$$
$$\Rightarrow V'(b)=(36-b^2)-2b^2=-3(b^2-12)=0 \Rightarrow b^2=12 \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

۲۲.گزینه ۴ **از آنجا که به ازای مقادیر x در بازه‌ی $[-1,1]$, $x^2-3<0$ لذا خواهیم داشت:**

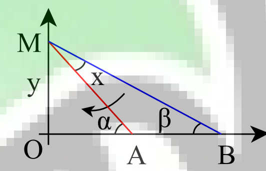
$$f(x)=x|x^2-3| \xrightarrow{x\in[-1,1]} f(x)=-x(x^2-3)=x(3-x^2)$$
$$\Rightarrow f'(x)=-3x^2+3 \xrightarrow{f'(x)=0} x=\pm 1$$
$$-1\le x\le 1 \to 0\le x^2\le 1 \to -3\le -3x^2\le 0 \to 0\le -3x^2+3\le 3$$



f در بازه‌ی $[-1,1]$ صعودی و پیوسته است و در این بازه نقطه‌ی بحرانی ندارد، پس نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[-1,1]$ اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع است.

در نتیجه تابع در $x=-1$، min مطلق و در نقطه‌ی $x=1$، max مطلق دارد و این نقاط طول اکسترمم‌های نسبی تابع نیز هست.

۲۳.گزینه ۲ **می‌خواهیم زاویه‌ی $A\hat{M}B=O\hat{M}B-O\hat{M}A$ ماکسیمم باشد.**



$\alpha = x + \beta \Rightarrow x = \alpha - \beta$

$\tan\hat{x} = \tan(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \dfrac{\tan\hat{\alpha} - \tan\hat{\beta}}{1 + \tan\hat{\alpha}\tan\hat{\beta}}$

$\tan\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{y}{4} \qquad \tan\beta = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{y}{9}$

$\tan x = \dfrac{\frac{y}{4} - \frac{y}{9}}{1 + \frac{y}{4}\cdot\frac{y}{9}} = \dfrac{5y}{y^2 + 36} = f(y)$

زاویه‌ی x زمانی ماکسیمم است که $\tan x$ ماکسیمم باشد:

$$f'(y) = 5\frac{(y^2+36) - 2y^2}{(y^2+36)^2} = 0 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

نکته: در حالت کلی وقتی x ماکسیمم است که $OM^2 = OA \times OB$ باشد.

۲۴.گزینه ۲   از آنجا که تابع بر محور طول ها مماس است لذا $y = 0$ ریشه مضاعف دارد. لذا داریم:

$$f(x) = \frac{ax^2 + 4x - 4}{x^2 + b} \Rightarrow ax^2 + 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} 16 - 4(-4a) = 0 \Rightarrow 16 + 16a = 0 \Rightarrow a = -1$$

از آنجا که $y = -1$ مجانب افقی تابع است لذا عرض از مبدأ منحنی کمتر از (-1) خواهد بود. لذا خواهیم داشت:

$$\text{عرض از مبدأ} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{-4}{b} < -1 \Rightarrow \frac{4}{b} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{b}{4} < 1 \Rightarrow 0 < b < 4$$

از میان گزینه ها فقط گزینه ۲ در شرایط ارائه شده صدق می کند.

۲۵.گزینه ۱

$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ابتدا و انتهای منحنی هم سطح است و روی محور xها قرار دارد بنابراین گزینه ۱ یا ۲ صحیح است.

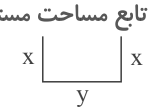
$f(\frac{\pi}{4}) = 1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$

نمودار f در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ بالای محور x ها قرار دارد.

۲۶.گزینه ۲

روش اول: با توجه به شکل و فرض مسئله، $2x + y = 88$ است، پس $y = 88 - 2x$.

تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$S(x, y) = xy \Rightarrow S(x) = x(88 - 2x) = 88x - 2x^2$

برای به دست آوردن بیش‌ترین مقدار تابع S، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$S'(x) = 88 - 4x = 0 \Rightarrow x = 22 \Rightarrow \max(S) = S(22) = 22(88 - 44) = 22 \times 44 = 968$

روش دوم:

نکته: اگر مجموع دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، آن گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو متغیر با هم برابر باشند.

$S(x) = x(88 - 2x) = 2(x)(44 - x)$

مجموع دو متغیر x و $44 - x$ برابر مقدار ثابت ۴۴ است. پس حاصلضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار است که $x = 44 - x$، یعنی $x = 22$ و در آن صورت:

$\max(S) = S(22) = 2 \times 22(44 - 22) = 968$

۲۷.گزینه ۱   از تابع f مشتق می گیریم:

$4a\sin 4x + 2b\cos 2x \quad (*)$

با توجه به نمودار، مقدار مشتق در $x = \frac{\pi}{12}$ برابر صفر است زیرا خط مماس بر تابع در این نقطه موازی محور xهاست.

$$f'(\frac{\pi}{۱۲}) = -۴a\sin\frac{\pi}{۳} + ۲b\cos\frac{\pi}{۶} = ۰ \Rightarrow -۴a(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۲b(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳}(-۲a+b) = ۰$$

$$\Rightarrow b = ۲a \xrightarrow{(*)} f'(x) = -۴a\sin ۴x + ۴a\cos ۲x$$

حال برای یافتن طول نقاط اکسترمم نسبی، مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \sin ۴x = \cos ۲x \Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x = \cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x\cdot(۲\sin x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \text{یا} \\ \sin ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ ,\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲}\ ,\ x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، مقدار تابع در اولین اکسترمم نسبی با طول منفی برابر -۳ است. طول این اکسترمم با توجه به مجموعه جواب‌های به دست آمده $x = -\frac{\pi}{۴}$ است، پس:

$$f(\frac{-\pi}{۴}) = -۳ \Rightarrow a\cos(-\pi) + b\sin(\frac{-\pi}{۲}) = -۳ \Rightarrow -a-b = -۳ \xrightarrow{b=۲a} -۳a = -۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۲(۱) = ۲$$

۲۸.گزینه ۳ چون تابع f در نقطه‌ی c مشتق راست دارد، پس از راست پیوسته است. هم چنین چون f در نقطه‌ی c می‌نیمم دارد، $\lim_{x\to c^+} f(x) \geq f(c)$ ، بنابراین داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\geq ۰}}{\underbrace{x-c}_{\geq ۰}} \geq ۰ \Rightarrow$$ علامت مشتق راست همواره نامنفی است.

۲۹.گزینه ۱

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰$$

$\Rightarrow$ جمع ضرایب صفر است. $\Rightarrow\ (x-۱)(x^۲+x-۲) = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲(x+۲) = ۰$

$x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف تابع مشتق $(f'(x))$ بوده و لذا در $x = ۱$ تابع اکسترمم نسبی ندارد و $x = -۲$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و از آزمون اول مشتق داریم:

x		-۲	
f'	−	۰	+
f	↘		↗

$\Rightarrow$ $x = -۲$ طول نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.

بنابراین این تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد.

توجه: ریشه‌ی ساده‌ی مشتق هرگز اکسترمم نسبی نیست چون علامت f' در اطراف آن تغییر نمی‌کند و اما ریشه‌ی ساده مشتق عطف است.

۳۰.گزینه ۱ $f(x)$ تابعی فرد است $(Df = \mathbb{R} - \{۰\}, f(-x) = -f(x))$ لذا برای یافتن نقاط بحرانی، کافی است نقاط بحرانی را برای $x > ۰$ یا $x < ۰$ بیابیم. به خاطر فرد بودن تابع هر نقطه به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ که نقطه‌ی بحرانی باشد، نقطه‌ی $A'(-\alpha, -f(\alpha))$ نیز نقطه‌ی بحرانی می‌شود. به ازای $x > ۰$ داریم:

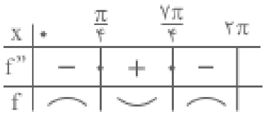
$$f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x} = \sqrt{\frac{۱+x^۲}{x^۲}} = \sqrt{\frac{۱}{x^۲}+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{۲}{x^۳}}{۲\sqrt{\frac{۱}{x^۲}+۱}} = \frac{-۱}{x^۳\sqrt{\frac{۱}{x^۲}+۱}}$$

به ازای هیچ $f'(x), x > ۰$ برابر با صفر نمی‌شود هم چنین نقطه‌ای با شرط $x > ۰$ وجود ندارد که $f'(x)$ در آن وجود نداشته باشد. بنابراین تابع برای $x > ۰$ و در نتیجه به خاطر فرد بودن تابع، برای $x < ۰$ نیز هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. لذا این تابع در کل دامنه‌ی تعریف خود هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۳۱.گزینه ۳

$$f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x \Rightarrow f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \Rightarrow f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x$$

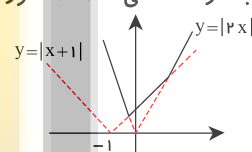
$$f''(x)=0 \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{7\pi}{4}$$



$\Rightarrow x\in(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ در این بازه تقعر منحنی رو به بالاست.

۳۲.گزینه ۲ ابتدا نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت که پایین‌تر است حذف شده و قسمتی که بالاتر است می‌ماند همانطور که می‌بینیم کم‌ترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت منفی است.

$$\xrightarrow{-1<x<0} -2x=x+1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow f(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$$

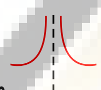


۳۳.گزینه ۴

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y'=4x^3+3ax^2+3x \Rightarrow y''=12x^2+6ax+3=3(4x^2+2ax+1)\geq 0$$

برای اینکه تقعر رو به بالا باشد باید $f''>0$ باشد.

شرط اینکه این معادله درجه دوم همیشه مثبت باشد $\begin{cases}\Delta\leq 0 \Rightarrow 4a^2-16\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq a\leq 2\\ a>0 \Rightarrow a=4>0\end{cases}$

۳۴.گزینه ۱ تنها مجانب قائم تابع $x=1$ است، که چون ریشه مضاعف است و تابع در اطراف مجانب قائم به صورت  می باشد، پس مخرج تابع برابر $(x-1)^2$ است، یعنی $b=-2$ و $c=1$ است. از طرفی تنها ریشه تابع $x=0$ است و باید $a=0$ باشد. پس:

$$(bc-a)=-2\times 1-0=-2$$

۳۵.گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x-[x] \\ g(x)=\frac{1}{x}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow gof(x)=g(x-[x])=\frac{1}{x-[x]}-1$$

می دانیم همواره $0\leq x-[x]<1$ است و از طرفی نباید $x-[x]=0$ باشد.

$$0<x-[x]<1 \Rightarrow \frac{1}{x-[x]}>1 \xrightarrow{-1} \frac{1}{x-[x]}-1>0$$

$$\Rightarrow gof(x)>0 \Rightarrow R_{gof}=(0,+\infty)$$

۳۶.گزینه ۱

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

برای این که این تابع صعودی باشد، باید $f'(x)>0$ باشد:

$$f'(x)>0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow 1>\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x>1 \text{ یا } x<-1 \quad (I)$$

لازم به ذکر است که مجموعه جواب فوق $x=0$ (مجانب قائم) را شامل نمی‌شود، بنابراین قابل قبول است.

برای این که این تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید $f''(x)<0$ باشد. داریم:

$$\frac{2}{x^3}<0 \Rightarrow x^3<0 \Rightarrow x<0 \quad (II)$$

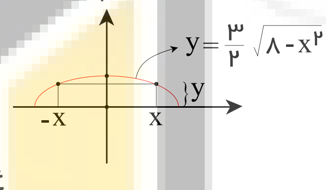
با توجه به اشتراک مجموعه‌های (I) و (II)، می‌توان گفت که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,-1)$ دارای تقعر رو به پایین بوده و صعودی است.

۳۷.گزینه ۴

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}\rightarrow y^2=\frac{3}{4}(8-x^2)\rightarrow 4y^2+3x^2=24$$

بنابراین نمودار تابع به صورت یک نیم بیضی به مرکز مبدأ مختصات است.

ابتدا نمودار $y=\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ را رسم می‌کنیم. طول و عرض مستطیل مطابق شکل، برابر $2x$ و $\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ است و داریم:



مستطیا $=2x\times\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}=3x\sqrt{8-x^2}\Rightarrow S=3\sqrt{8x^2-x^4}$

$$=3\times\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}=0\Rightarrow(4x-x^3)=0\Rightarrow(x)(4-x^2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق}\\ x=2\\ x=-2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\text{ax}=3\times2\times\sqrt{8-2^2}=3\times2\times2=12$$

۳۸.گزینه ۲ باتوجه به اکیداً صعودی بودن تابع $g(x)=x^3+x$ (زیرا $g'(x)=3x^2+1>0$)، هرچه x عدد بزرگ‌تری باشد $g(x)$ نیز بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین ماکسیمم $g(f(x))$ به‌ازای ماکسیمم $f(x)$ رخ می‌دهد. پس ابتدا ماکسیمم مطلق $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^3-3x\Rightarrow f'(x)=3x^2-3\xrightarrow{f'=0}x=1,-1$$

محاسبه‌ی بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x\leq 1$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(1)=-2\ ,\ f(-1)=2\ ,\ f(-\infty)=-\infty$$
$$\max f(x)=2$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم ماکسیمم $g(f(x))$ به ازای ماکسیمم تابع f یعنی $f(x)=2$ رخ می‌دهد که برابر است با:

$$g(2)=2^3+2=10$$

۳۹.گزینه ۳

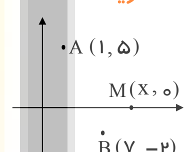
$$y=\begin{cases}x^3-3x^2\ ;x\geq3\\ 3x^2-x^3\ ;x<3\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-6x\ ;x>3\\ 6x-3x^2\ ;x<3\end{cases}$$

$$\Rightarrow y''=\begin{cases}6x-6\ ;x>3\rightarrow 6x-6<0\rightarrow x<1 & \text{غ ق ق}\\ 6-6x\ ;x<3\rightarrow 6-6x<0\rightarrow x>1\Rightarrow 1<x<3\end{cases}$$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع در بازه‌ی $(1,3)$ رو به پایین است. لذا $a=1,b=3$ و در نتیجه $b-a=2$ است.

۴۰.گزینه ۴ فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,x_2)$ و $B(y_1,y_2)$ برابر $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ می‌باشد.

$$d=AM-BM=\sqrt{(x-1)^2+25}-\sqrt{(x-7)^2+4}$$



می‌خواهیم d ماکسیمم شود، بنابراین:

$$d'=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+25}}-\frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+4}}=0\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+25}}=\frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+4}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+25}=\frac{(x-7)^2}{(x-7)^2+4}$$

$$\Rightarrow(x-1)^2(x-7)^2+4(x-1)^2=(x-7)^2(x-1)^2+25(x-7)^2$$

$$\Rightarrow 2|x-1|=5|x-7|\xrightarrow{x>7}2x-2=5x-35\Rightarrow x=11$$

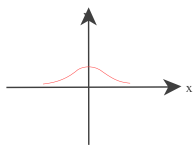
روش دوم:

قرینه‌ی BO نسبت به محور xها را $B'(7,2)$ در نظر بگیرید. محل برخورد AB' با محور xها جواب است.

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\xrightarrow{y=0}x=11$$

۴۱.گزینه ۲ وقتی $x\to\infty$ تابع $f(x)$ به دو خط افقی مجانب می‌شود و بنابراین شیب آن به صفر میل می‌کند. یعنی $y=0$ مجانب افقی تابع $f'(x)$ است.

$x=0$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است بنابراین طول اکسترمم نسبی تابع $f'(x)$ می‌باشد از طرفی در $x=0$، $f(x)$ صعودی است پس $f'(x)$ در $x=0$ یک مقدار مثبت دارد. بنابراین نمودار $f'(x)$ شبیه گزینه‌ی ۲ خواهد بود.



۴۲.گزینه ۳ نمودار تابع را در دوره تناوب $[0,2\pi]$ بررسی می کنیم:
نمودار مجانب قائم ندارد، بنابراین ریشه‌ی مخرج، ریشه‌ی صورت نیز هست.

$$\sin x+\cos x=0\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\Rightarrow a\sin 2(\frac{3\pi}{4})+b=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b$$

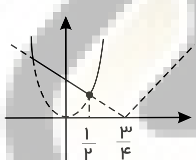
با توجه به نمودار، تابع اکسترمم نسبی برابر ۲ دارد. ابتدا طول اکسترمم را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{a\sin 2x+a}{\sin x+csox}=a\frac{\sin 2x+1}{\sin x+\cos x}=a\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

$$f'(x)=a(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=a\frac{\sin\frac{\pi}{2}+1}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2a}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

۴۳.گزینه ۱

ابتدا دو نمودار $\left|x-\frac{3}{4}\right|$ و x^2 را رسم می کنیم و $f(x)=\max\left\{x^2,\left|x-\frac{3}{4}\right|\right\}$ را مشخص می کنیم:



با توجه به نمودار، کم‌ترین مقدار تابع f در $0<x<\frac{3}{4}$ یعنی محل برخورد دو ضابطه است:

$$x^2=\left|x-\frac{3}{4}\right|\xrightarrow{x<\frac{3}{4}}x^2=\frac{3}{4}-x\Rightarrow x^2+x-\frac{3}{4}=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{2}=\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\xrightarrow{0<x<\frac{3}{4}}x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\Rightarrow\min f(x)=\frac{1}{4}$$

۴۴.گزینه ۴ تابع f یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین اگر $x=c$ طول اکسترمم نسبی آن باشد آنگاه $f'(c)=0$
طبق قضیه‌ی بولزانو برای این که تابع $f'(x)$ در $(1,4)$ دارای ریشه باشد باید $f'(1)f'(4)<0$

$$f'(x)=3x^2+2ax-8\Rightarrow f'(1)=2a-5\quad,\quad f'(4)=8a+40\Rightarrow(2a-5)(8a+40)<0\Rightarrow -5<a<2{,}5$$

۴۵.گزینه ۳ با تعیین علامت f' و f'' وضعیت یکنوایی و تقعر تابع را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-x} & x\geq 0\\ -x\cdot e^{-x} & x\leq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)\begin{cases}e^{-x}-e^{-x}\cdot x=(1-x)\cdot e^{-x} & x>0\\ -e^{-x}+x\cdot e^{-x}=(x-1)\cdot e^{-x} & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}-e^{-x}-e^{-x}\cdot(1-x)=e^{-x}\cdot(-1-1+x)=(x-2)\cdot e^{-x} & x>0\\ e^{-x}-e^{-x}\cdot(x-1)=e^{-x}\cdot(1-x+1)=(2-x)\cdot e^{-x} & x<0\end{cases}$$

ناحیه‌ای که $f'(x)<0$ و $f''(x)<0$ را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)<0\Rightarrow\begin{cases}1-x<0\Rightarrow x>1\xrightarrow{x>0}x>1\\ x-1<0\Rightarrow x<1\xrightarrow{x<0}x<0\end{cases}$$

$$f''(x)<0\Rightarrow\begin{cases}x-2<0\Rightarrow x<2\xrightarrow{x>0}0<x<2\\ 2-x<0\Rightarrow x>2\xrightarrow{x<0}\text{غیر ممکن}\end{cases}$$

اشتراک $x>1$ و $0<x<2$ پاسخ سؤال است که برابر بازه $(1,2)$ می‌باشد.

۴۶.گزینه ۲ باید $y'<0$ و $y''<0$ باشد.

x		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	
y′	+	0	−	‖	−	0	+
y″	−		−	‖	+		+

$$y = x\ln|x| = \begin{cases} x\ln x & x > 0 \\ x\ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 1 + \ln x & x > 0 \\ -1 + \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \to 1 + \ln x = 0 \to \ln x = -1 \to x = \frac{1}{e} \\ x < 0 \to -1 + \ln(-x) = 0 \to \ln(-x) = 1 \to x = -\frac{1}{e} \end{cases}$$

تابع در بازه‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ نزولی و تقعر رو به پایین دارد.

۴۷.گزینه ۲ **ابتدا محل تلاقی نمودار تابع $y = \frac{x+1}{1-2x}$ را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم: یعنی برای محاسبه محل برخورد با محور xها بجای y صفر و برای محاسبه محل برخورد با محور yها بجای x صفر قرار می‌دهیم.**

$A(-1, 0), B(0, 1)$

اکنون معادله خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$y - yA = \frac{yA - yB}{xA - xB} \cdot (x - xA)$$

$$y - 0 = \frac{0 - 1}{-1 - 0}(x - (-1)) \Rightarrow y = x + 1$$

باتوجه به این که مرکز تقارن تابع هموگرافیک به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است، مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x+1}{-2x+1}$، نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ است.

می‌دانیم فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

بنابراین فاصله نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ از خط $x - y + 1 = 0$ برابر است با:

$$D = \frac{\left|\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times (-\frac{1}{2}) + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۴۸.گزینه ۴ **باتوجه به این که** $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ **، داریم:**

$$\lim_{x\to\infty} \sin^{-1}\frac{ax+b}{x-2} = \sin^{-1}(\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x-2}) = \sin^{-1} a = 0$$

بنابراین $a = 0$ است. از طرف دیگر می‌دانیم $Df = \mathbb{R} - (1, 3)$ ، بنابراین داریم:

$$x \in (1,3) \Rightarrow \left|\frac{b}{x-2}\right| > 1 \Rightarrow \left|\frac{x-2}{b}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < |b| \Rightarrow -|b| < x - 2 < |b|$$

$$\Rightarrow -|b| + 2 < x < |b| + 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

با فرض $b = -1$ داریم:

$$y = \sin^{-1}(\frac{-1}{x-2}) \Rightarrow y(0) = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} > 0$$

در صورتی که در نمودار متن سؤال، $y(0) < 0$ است، بنابراین $b = -1$ غیر قابل قبول و در نتیجه $b = 1$ قابل قبول است.

۴۹.گزینه ۴ **تابع f در کل دامنه‌ی خود $(\mathbb{R} - \{0\})$ مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق آن در نقاط اکسترمم نسبی برابر صفر می باشد. حال طول اکسترمم نسبی تابع f را به دست می آوریم. داریم:**

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

نقطه‌ی $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ ، طول اکسترمم نسبی تابع f است. برای تشخیص نوع اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم نسبی بودن) از آزمون مشتق دوم کمک می گیریم، داریم:

$$f''(x)=۲+\frac{۲a}{x^۳}\Rightarrow f''(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})=۲+\frac{۲a}{\frac{a}{۲}}=۶>۰$$

بنابراین به ازای هر مقداری برای a، $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ **، طول نقطه‌ی مینیمم نسبی است، لذا به ازای هیچ مقدار** a، **تابع** f **ماکسیمم نسبی نمی‌تواند داشته باشد.**

۵۰.**گزینه ۳** می‌دانیم تابع درجه دوم و تابع هموگرافیک فاقد نقطه عطف هستند، **یعنی هر دو ضابطه به تنهایی فاقد عطف هستند.**

بنابراین تابع f **با ضابطه** $f(x)=\begin{cases}\frac{۳-x^۲}{۲} & ; \quad x<۱\\ \frac{۱}{x} & ; \quad x\geq ۱\end{cases}$ فقط در نقطه مرزی $(x=۱)$ **می‌تواند** نقطه عطف داشته باشد، بنابراین

گزینه‌های (۱) و (۲) مسلماً نادرست هستند. حال به بررسی نقطه ۱ $x=$ می‌پردازیم:

$\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)\Rightarrow$ **تابع در** $x=۱$ **پیوسته است.**

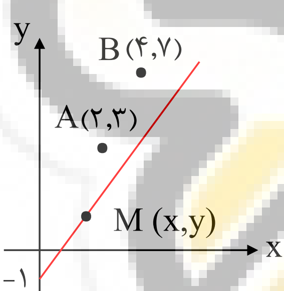
$$f'(x)=\begin{cases}-x & ; \quad x<۱\\ -\frac{۱}{x^۲} & ; \quad x>۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}f'(x)=\lim_{x\to ۱^-}f'(x)=-۱\Rightarrow f'(x)=-۱$$

بنابراین تابع f **در نقطه** $x=۱$ **دارای خط مماس واحد است. در نتیجه شرایط اولیه وجود عطف (دارا بودن خط مماس واحد) را دارد. با تشکیل ضابطه** f''، **داریم:**

$$f''(x)=\begin{cases}-۱ & ; \quad x<۱\to f''_-(۱)<۰\\ \frac{۲}{x^۳} & ; \quad x>۱\to f''_+(۱)>۰\end{cases}$$

باتوجه به این که تابع f'' **در اطراف** $x=۱$ **تغییر علامت می‌دهد، بنابراین** $x=۱$ **طول نقطه عطف است.**

۵۱.**گزینه ۲**



نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حاصل $|MA-MB|$ بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$f(x)=MA-MB=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۳)^۲}-\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۷)^۲}$$
$$\xrightarrow{y=x-۱}f(x)=\sqrt{(x-۲)^۲+(x-۴)^۲}-\sqrt{(x-۴)^۲+(x-۸)^۲}$$

از تابع f **مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه‌ی اکسترمم آن به دست آید:**

$$f'(x)=\frac{(x-۲)+(x-۴)}{\sqrt{(x-۲)^۲+(x-۴)^۲}}-\frac{(x-۴)+(x-۸)}{\sqrt{(x-۴)^۲+(x-۸)^۲}}=۰\Rightarrow\frac{۲(x-۳)}{\sqrt{۲\underbrace{(x^۲-۶x+۱۰)}_{(x-۳)^۲+۱}}}=\frac{۲(x-۶)}{\sqrt{۲\underbrace{(x^۲+۱۲x+۴۰)}_{(x-۶)^۲+۴}}}$$

برای تسریع در حل سؤال، تساوی اخیر را ساده و آن را معکوس کرده و به توان ۲ می‌رسانیم که در آن صورت داریم:

$$\frac{(x-۳)^۲+۱}{(x-۳)^۲}=\frac{(x-۶)^۲+۴}{(x-۶)^۲}\Rightarrow\frac{۱}{(x-۳)^۲}=\frac{۴}{(x-۶)^۲}$$

$$\Rightarrow|x-۶|=۲\,|x-۳|\Rightarrow\begin{cases}x-۶=۲(x-۳)\Rightarrow x=۰\Rightarrow|f(۰)|=۲\sqrt{۵}\\ x-۶=-۳(x-۳)\Rightarrow x=۴\Rightarrow|f(۴)|=۲\end{cases}$$

به ازای $x=۰$ **بیشترین مقدار تفاضل** M **از** A **و** B **و به ازای** $x=۴$ **کمترین مقدار برای تفاضل فواصل مورد نظر به دست می‌آید.**

۵۲.**گزینه ۲** **باتوجه به فرض، تابع** $f(x)=e^{x-۲x^۲}$ **صعودی و تقعرش رو به پایین است، پس:**

$$f'(x)>0\ ,\ f''(x)<0$$

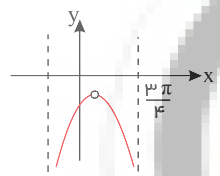
$$f'(x)=(1-4x)e^{x-2x^2}\xrightarrow{f'(x)>0}(1-4x)e^{x-2x^2}>0\xrightarrow{e^{x-2x^2}>0}1-4x>0\Rightarrow x<\frac{1}{4}\quad(1)$$

$$f''(x)=-4e^{x-2x^2}+(1-4x)^2e^{x-2x^2}=((1-4x)^2-4)e^{x-2x^2}\xrightarrow{f''(x)<0}(-1-4x)(3-4x)e^{x-2x^2}<0$$

$$\xrightarrow{e^{x-2x^2}}(4x+1)(4x-3)<0\Rightarrow-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\quad(2)$$

اشتراک (۱) و (۲): مجموعه جواب نهایی $=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

۵۳.گزینه ۲ چون $x=\frac{3\pi}{4}$ مجانب قائم تابع f است، پس ریشه مخرج آن است، یعنی:



$$(b+\cos 2x)\xlongequal{x=\frac{3\pi}{4}}0\Rightarrow b+\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}=0\Rightarrow b=0$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x)=\frac{a\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ می‌شود.

باتوجه به ریشه‌های معادله:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\to x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\to x=\frac{3\pi}{4}\ ,\ x=\frac{\pi}{4}$$

که در نمودار، تابع f به ازای این نقطه، تعریف نشده است (نقطه توخالی) و چون تابع در این نقطه حد دارد، پس صورت تابع f نیز باید به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ صفر شود، یعنی:

$$(a\sin x-\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=0\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow a=1$$

۵۴.گزینه ۴ با توجه به بازه‌ی داده شده تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-\sin\pi x & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ \sin\pi x & 1\leq x<2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

در بازه‌ی $[0\ ,\ 1)$ نمودار تابع f ثابت است. بنابراین بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

توجه: روی خط $y=c$ بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی وجود دارد. زیرا مشتق برابر صفر است.

۵۵.گزینه ۱ با توجه به شکل، نمودار تابع f بر محور xها در نقطه‌ی $x=0$ مماس است، بنابراین معادله‌ی تلاقی آن با محور xها $(y=0)$ ریشه‌ی مضاعف می‌دهد. از طرفی مجانب مایل تابع از نقطه‌ی $(0\ ,\ \frac{1}{2})$ می‌گذرد، داریم:

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲+ax}{۲x+b} \Rightarrow x^۲+ax=۰ \xrightarrow[\Delta=۰]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} a=۰ \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^۲}{۲x+b} \\ y=۰ \end{cases}$$

معادله مجانب مایل را به روش تقسیم به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۲ & ۲x+b \\ \hline x^۲+\frac{b}{۲}x & \frac{x}{۲}-\frac{b}{۴} \\ -\frac{b}{۲}x & \\ -\frac{b}{۲}x-\frac{b^۲}{۴} & \\ \hline \frac{b^۲}{۴} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ مجانب مایل $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}b \xrightarrow{(۰\,,\,\frac{۱}{۲})} \frac{۱}{۲}=۰-\frac{۱}{۴}b \Rightarrow b=-۲$

۵۶.گزینه ۳

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h\ ,\quad L^۲=h^۲+r^۲$$

$$\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h=\frac{\pi}{۳} \to r^۲h=۱ \to r^۲=\frac{۱}{h}$$

$S=\pi\sqrt{\frac{۱}{h}}\times\sqrt{h^۲+\frac{۱}{h}}=\pi\sqrt{h+\frac{۱}{h^۲}} \to S'=۰ \to$ کافیست مشتق زیر رادیکال را برابر صفر قرار دهیم

$$\to ۱-\frac{۲}{h^۳}=۰ \to h^۳=۲ \to h=\sqrt[۳]{۲}$$

۵۷.گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$$

مجانب قائم $x=-۳ \to \boxed{c=۳}$

مایل $y=x+a-۳ \xrightarrow{(۷\,,\,۰)} ۴+a=۰ \to \boxed{a=-۴}$

$f(x)=۰ \to$ ریشه‌ی مضاعف دارد زیرا مطابق شکل، تابع بر محور xها مماس است $\to a^۲-۴b=۰$

$\to ۱۶-۴b=۰ \to \boxed{b=۴}$

۵۸.گزینه ۱ در حالت کلی، برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی می‌توانیم مشتق تابع را در نقاط بحرانی تعیین علامت کنیم.

$$y'=۲(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}+(x-۱)^۲\times\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$y'=۲(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{x-۱}{۳\sqrt[۳]{x}})=\frac{۲(x-۱)(۳x+x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۴} \\ x=۰ \end{cases}$ نقاط بحرانی

x		۰		$\frac{۱}{۴}$		۱	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$ طول ماکسیمم نسبی

۵۹.گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه‌ی تابع هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است یا تابع در آن نقاط مشتق ندارد. ریشه‌های ساده‌ی قدرمطلق، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$f(x)=(x-۱)\cdot|x^۲+x-۲|$$

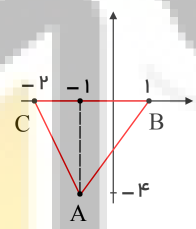
$$x^۲+x-۲=۰ \to x=۱\ ,\ x=-۲$$

برای محاسبه‌ی ریشه‌ی مشتق باید قدرمطلق را پرانتز در نظر بگیریم.

$f(x)=(x-۱)\cdot(x^۲+x-۲)=x^۳+x^۲-۲x-x^۲-x+۲$

$f(x)=x^۳-۳x+۲\rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳=۰\rightarrow x=\pm۱$

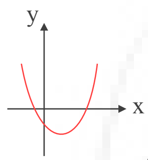
$A(-۱,-۴)\ ,\ B(۱,۰),(-۲,۰)$



$$S=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

۶۰.گزینه ۱

تابع $f=x^۴-۴x+a$ تنها یک نقطه‌ی اکسترمم دارد و با توجه به ضریب $x^۴$ این نقطه مینیمم نسبی است بنابراین شکل تابع به صورت زیر است:



بنابراین برای این که تابع f یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی داشته باشد باید مقدار مینیمم نسبی و عرض از مبدأ منفی باشند داریم:

$$\begin{cases} f(x)=x^۴-۴x+a\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۴=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow f(۱)=-۳+a<۰ \\ f(۰)=a<۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a<۳ \\ a<۰ \end{cases}\Rightarrow a<۰$$