۱.گزینه ۲

تابع صعودی است پس

$$(x^2-x-2)' = (2x-1) \xrightarrow{x=2} = 3 > 0 \Rightarrow$$

وقتی $x \to 2^-$ آنگاه $x^2-x-2<0$ یعنی $|x^2-x-2| = -(x^2-x-2)$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2+x+2}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+1}{2-\frac{x}{\sqrt{x^2+12}}} = \frac{-3}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

۲.گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 3x}}{1-\cos x} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{2}+\frac{9x}{2}}{x} = 4$$

۳.گزینه ۳ ابتدا به هم‌ارزی فکر می‌کنیم. ضمناً می‌دانیم $\cos u \simeq 1-\frac{u^2}{2}$.

$$\text{هم ارزی}:\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-(1-\frac{9}{2}x^2)}{2-\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0}\frac{8x}{0-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{8\cancel{x}\cdot\sqrt{4-x^2}}{\cancel{x}} = 16$$

۴.گزینه ۲

برای محاسبه‌ی حد در $+\infty$ تابع $f(a_n)$ ابتدا جواب حد در $+\infty$ دنباله a_n را دقیق می‌یابیم و سپس آن عدد را در $f(x)$ قرار می دهیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{2n+1} = 4^- \Rightarrow f(a_n) = b+\left[\frac{8n+2}{2n+1}\right] \Rightarrow b+3=1 \Rightarrow b=-2$$

توجه: در دنباله ها برای اینکه تشخیص دهیم دنباله $\frac{4n+1}{2n+1}$ به عدد 4^+ میل می کند یا به 4^-، می توانیم به جای n یک عدد دلخواه مثلاً $n=10$ در دنباله قرار دهیم و با عدد ۴ مقایسه کنیم.

$$n=10 \Rightarrow \frac{4n+1}{2n+1} = \frac{41}{21} < 4 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{8n+2}{2n+1} \Rightarrow 4^-$$

۵.گزینه ۱

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{x-x^2}} \simeq \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{2}$$

۶.گزینه ۱

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 2^{-\infty} = 0$$

یادآوری: $|a|>1 \to \begin{cases} a^{+\infty}=+\infty \\ a^{-\infty}=0 \end{cases}$

۷.گزینه ۲

وقتی $x \to (-1)^+$ داخل قدر مطلق، منفی است و با عدد گذاری به ابهام $\infty - \infty$ می‌رسیم و برای رفع ابهام مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x\to(-1)^+}(\frac{2x}{x^2-1}-\left|\frac{x}{x+1}\right|)\lim_{x\to(-1)^+}(\frac{2x}{x^2-1}-(\frac{-x}{x+1}))=\lim_{x\to(-1)^+}(\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{x}{x+1})$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}(\frac{2x+x(x-1)}{(x-1)(x+1)})=\lim_{x\to(-1)^+}(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)})=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{x-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

۸.گزینه ۲

دنباله‌ی a_n یک دنباله‌ی صعودی و همگرا به ۲ است زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim\frac{4n+1}{2n+1}=2$$

$$a_n=\frac{4n+1}{2n+1}\to a'=\frac{2}{(2n+1)^2}>0$$

پس با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2}\_(x+1)[x]=(2+1)[2^-]=3\times 1=3$$

۹.گزینه ۱

نکته:در محاسبه‌ی حد، هرگاه x به سمت ریشه‌ی ساده قدر مطلق میل کرد، ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت و سپس حاصل حد را می یابیم.

$$x\to(\frac{1}{2})^+: x>\frac{1}{2}\Rightarrow \pi x>\frac{\pi}{2}\Rightarrow \text{ربع دوم } \pi x\Rightarrow \cos\pi x<0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{|\cos\pi x|}{1-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{-\cos\pi x}{1-\sqrt{2x}}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=\!=}\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{\pi\sin\pi x}{-\frac{2}{2\sqrt{2x}}}=-\pi$$

۱۰.گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\sin x+\sin 3x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\frac{-\cos x}{\cos x+3\cos 3x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{-\sin x-9\sin 3x}=\frac{+1}{-1+9}=+\frac{1}{8}$$

۱۱.گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1}4\tan^{-1}(x^2-2x+2)=4\tan^{-1}(1-2+2)=4\tan^{-1}(1)=4(\frac{\pi}{4})=\pi$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}\overset{\text{هم ارزی}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1}(\frac{\pi(1-x)}{1-x})=\pi$$

از آن جا که حد کران‌های پایین و بالای تابع f به ازای $x\to 1$ برابر π شد، طبق قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to 1}f(x)=\pi$.

۱۲.گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}\text{مبهم}$$

$$\text{هم ارزی}:\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

روش دوم: می‌توانیم از هم‌ارزی با دقت بالا حل کنیم همان طور که می‌دانید توابع $\sin x$ و $\tan x$ در نقطه‌ی $x=0$ هم ارزند با:

$$\begin{cases} \sin x \approx x - \frac{x^۳}{۶} \\ \tan x \approx x + \frac{x^۳}{۳} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳} = \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۳}{۶}}{x^۳} = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{x^۳}{۲}}{x^۳} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳.گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲}{ax^۲} = \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

وقتی $x \to (-۲)^+$ ، $x^۲-۴<۰$ بوده زیرا

$$\begin{array}{c|ccccc} & & -۲ & & +۲ & \\ \hline x^۲-۴ & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}$$

و لذا $|x^۲-۴| = ۴-x^۲$ می شود. بنابراین :

$$\lim_{x\to(-۲)^+} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-۲x}{-۲x-۱} = \frac{۴}{۳}$$

۱۴.گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x+\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} (\frac{\sin x}{۲\sqrt{\cos x}} + \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}})$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} + \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} = \frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{\frac{۱}{۲}}} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{-\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{-\frac{۱}{۴}} = ۲^a \to a = -\frac{۱}{۴}$$

۱۵.گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin x \times \cos(۱+\cos x)}{۲\underbrace{\sin ۲x}_{۲\sin x\cos x}} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin x \times ۱}{۴\sin x \cos x} = \frac{۱}{۴}$$

۱۶.گزینه ۱ با توجه به رابطه‌ی هم‌ارزی $۱-\cos^k u \sim \frac{k}{۲}u^۲$ ، $u\to ۰ \Rightarrow$ ، داریم:

$$\lim_{x\to ۰} (\frac{۱}{\cos x - ۱} - \frac{۱}{x}) = \lim_{x\to ۰} (\frac{۱}{-\frac{x^۲}{۲}} - \frac{۱}{x}) = \lim_{x\to ۰} (\frac{-۲}{x^۲} - \frac{۱}{x})$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{-۲-x}{x^۲} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

۱۷.گزینه ۱

یادآوری: $\boxed{|a|>۱ \to \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = ۰ \end{cases}}$

$$\begin{rcases} f(x) = ۲^{\frac{۱}{x}} \\ g(x) = \frac{۲x-۳}{x+۱} \end{rcases} \Rightarrow (gof)(x) = g\left(۲^{\frac{۱}{x}}\right) = \frac{۲\left(۲^{\frac{۱}{x}}\right)-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} (gof)(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲\left(۲^{\frac{۱}{x}}\right)-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱} = \frac{۲(۲^{-\infty})-۳}{(۲^{-\infty})+۱} = \frac{۲\times(۰)-۳}{۰+۱} = -۳$$

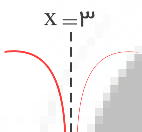
۱۸.گزینه ۲ بهترین روش محاسبه این حد استفاده از هم‌ارزی $\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲}$ است:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos^۲ x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\frac{x^۲}{۲})^۲-\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}}}{x^۲}$$

حال به کمک هم ارزی برنولی صورت را ساده می‌کنیم $(۱+x)^r = ۱+rx$ وقتی $(x\to ۰)$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-۲\times\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{x^۲}{۲})}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{(-۱+\frac{۱}{۴})x^۲}{x^۲}=\frac{-۳}{۴}$$

۱۹.گزینه ۳



تابع $\frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b}$ در حوالی $x=۳$ باید به صورت مقابل باشد زیرا در هر دو حالت $x\to ۳^-$, $x\to ۳^+$، $-\infty$ جواب حد است.

مقدار صورت در $x=۳$ منفی است بنابراین مخرج دارای ریشه ی مضاعف $x=۳$ است.

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۳)^۲=۲x^۲-۱۲x+۱۸\Rightarrow a=-۱۲,b=۱۸\Rightarrow a+b=۶$$

۲۰.گزینه ۱

برای به دست آوردن این حد ابتدا باید مقدار $[۴\cos^۲\pi x]$ را در همسایگی راست $x=\frac{۱}{۶}$ به دست آوریم، می دانیم تابع $\cos x$ و $\cos^۲ x$ در ربع اول نزولی است:

$$x\to(\frac{۱}{۶})^+\Rightarrow \cos\pi x<\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \cos^۲\pi x<\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴\cos^۲\pi x<۳\Rightarrow [۴\cos^۲\pi x]=[۳^-]=۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$$

صورت کسر در $x=\frac{۱}{۶}$ صفر است و حاصل حد مقداری غیرصفر، بنابراین مخرج نیز باید در $x=\frac{۱}{۶}$ صفر شود:

$$a(\frac{۱}{۶})+b=۰$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{ax+b}=\frac{۰}{۰}\overset{Hop}{=}\frac{-۱۲}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲۴\Rightarrow b=-\frac{a}{۶}=۴\Rightarrow a+b=-۲۰$$

۲۱.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\lim_{x\to ۰}|\sin x|<\lim_{x\to ۰}|x|<\lim_{x\to ۰}|\tan x|}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}<۱\ ,\ \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}>۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]+\lim_{x\to ۰}۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]=[۱^-]+۲[۱^+]=۰+۲=۲$$

۲۲.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۰^-}f(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳})=\lim_{x\to ۰^-}f(\frac{x^۲-۱}{x^۳})\Rightarrow f(\frac{-۱}{۰^-})=f(+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^۲+۱})=\lim_{x\to+\infty}(x-\left|x+\frac{۰}{۲}\right|)=۰$$

۲۳.گزینه ۴ برای $\{a_n\}$ دو زیر دنباله، برای حالت nهای زوج و برای nهای فرد در نظر می‌گیریم:

$$a_n=\frac{(-۱)^n}{۲n}=\begin{cases}\frac{-۱}{۲n} & ;\ n \text{ فرد}\\ \frac{۱}{۲n} & ;\ n \text{ زوج}\end{cases}$$

حالت اول: فرض می‌کنیم که n با اعداد فرد به بی نهایت میل می‌کند، در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{2n}=0^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left|\left[\frac{x}{2}\right]\right|=\left|\left[\frac{0^-}{2}\right]\right|=|-1|=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\left|\left[\frac{x}{2}\right]\right|=\left|\left[\frac{0^+}{2}\right]\right|=|0|=0$$

بنابراین مشاهده می شود که اگر n با اعداد زوج یا اعداد فرد به بی نهایت میل کنند $\{f(a_n)\}$ به اعداد متفاوتی همگرا می شود در نتیجه $\{f(a_n)\}$ واگراست.

۲۴.گزینه ۴ راه‌حل اول: کسر را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم و از هم‌ارزی $\cos u \approx 1-\frac{u^2}{2}$ به ازای $u\to 0$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x})x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{25x^2}{2})}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{24}{2}x^2}{2x^2}=6$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{-5\,\mathrm{Sin}\,5x}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2}+\frac{5(5x)}{2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{24}{2}x}{2x}=6$$

۲۵.گزینه ۲

می‌دانیم که هرگاه داخل جزء صحیح بی‌نهایت شود جزء صحیح به پرانتز تبدیل می‌شود.

$$\lim_{x\to 0}|x|\left[\frac{1}{x}\right]\quad \begin{cases}\xrightarrow{x>0} L_1=\lim_{x\to 0^+}(x)\times\frac{1}{x}=1\\ \xrightarrow{x<0} L_2=\lim_{x\to 0^-}(-x)\times\frac{1}{x}=-1\end{cases}\quad \xrightarrow{L_1\neq L_2} \text{حد ندارد}$$

۲۶.گزینه ۳

$$\lim_{x\to\infty} x(x+\sqrt{x^2+8})=(-\infty)\underbrace{(-\infty+\infty)}_{\text{ابهام}}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در $x-\sqrt{x^2-8}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{\to-\infty} x(x+\sqrt{x^2-8})\times\frac{(x-\sqrt{x^2-8}}{(x-\sqrt{x^2-8})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^2-(x^2-8))}{(x-\sqrt{x^2-8})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{\underbrace{x-(-x)}_{2x}}=4$$

۲۷.گزینه ۴

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x+1)(x-2)}\Rightarrow Df=R-(-1\ ,\ 2)$$

دنباله‌ی a_n به عدد ۲ همگراست. اما باید توجه داشت برای این‌که دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا باشد لازم است با توجه به دامنه‌ی تابع f وقتی $n\to+\infty$ دنباله‌ی a_n با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ همگرا باشد.

بنابراین داریم:

$$\frac{2n^2+b}{n^2+3n}>2\Rightarrow 2n^2+b>2n^2+6n\Rightarrow 6n<b$$

چون $n\to+\infty$، بنابراین با توجه به نامعادلات فوق b هیچ مقداری را نمی‌تواند اختیار کند.

۲۸.گزینه ۳

چون $x=\frac{\pi}{3}$ داخل جزء صحیح را صحیح می کند باید حد چپ و حد راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}^-} [\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x]=[-۱)(-۱)+۲=۳$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}^+} f(x)=[۰^+]\times(-۱)+[۳^+]=۳$$

۲۹. گزینه ۴

می‌دانیم $۰\leq u-[u]<۱$ در نتیجه با ضرب $\frac{۱}{x^۲}$ در عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\frac{۱}{x^۲}-\left[\frac{۱}{x^۲}\right]$$

$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}-\left[\frac{۱}{x^۲}\right]=[۰,۱)$ چون بیشمار حد در این بازه وجود دارد، پس یکتا نیست و حد وجود ندارد.

۳۰. گزینه ۴

$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۳\cdot\sin\frac{۱}{x}}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

چون کمان نسبت مثلثاتی صورت صفر می‌شود پس در عبارت صورت می‌توان از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده نمود.

هم ارزی : $\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{x^۳\cdot\sin\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{x\cdot\sin\frac{۱}{x}}=\frac{۲}{۰\times\sin\frac{۱}{۰}}=\frac{۲}{\text{صفر}\times\text{کراندار}}=\frac{۲}{۰}=\infty$