۱.گزینه ۳ اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ داریم:

$$f(x)+g(x)=[x]+\sqrt{x}\Rightarrow f(۰)+g(۰)=۰$$
$$\lim_{x\to ۰^+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۰^+}(\sqrt{x}+[x])=۰$$

در $x=۰$ پیوسته است (توجه شود که در $x=۰$ از چپ بررسی نمی‌شود چون در دامنه تابع $g(x)=\sqrt{x}$ قرار ندارد) لذا $f+g$ در $x=۰$ پیوسته هستند امّا یکی از آنها ($[x]$) در $x=۰$ پیوسته نیست.

۲.گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع را باز می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\leq -۱\ ,\ x\geq ۱\\ x\cdot[x] & -۱<x<۱\end{cases}$$

باید تابع در نقاط مرزی یعنی $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته باشد پس:

$$\begin{cases} x\to ۱^+=a(۱)+b=a+b\\ x\to ۱^-=۱[۱^-]=۰\end{cases}\to a+b=۰$$
$$\begin{cases} x\to -۱^+=-۱[-۱^+]=۱\\ x\to -۱^-=a(-۱)+b=-a+b\end{cases}\to -a+b=۱$$
$$\begin{cases} a+b=۰\\ -a+b=۱\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} a=-\frac{۱}{۲}\\ b=\frac{۱}{۲}\end{matrix}\to f(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & |x|\geq ۱\\ x\cdot[x] & |x|<۱\end{cases}$$

$$f(۳)=-\frac{۱}{۲}(۳)+\frac{۱}{۲}=-۱$$

برای محاسبه‌ی $f(۳)$ از ضابطه‌ی بالایی استفاده می‌کنیم.

۳.گزینه ۳ تابع $f(x)=[x^۲]-۳$ در نقاط $\{x^۲\in\mathbb{Z}:x\in\mathbb{R}\}$ ناپیوسته است و نیز دامنه تابع $۲\leq x<۲+k$ است و اولین عددی که در دامنه قرار دارد ۲ است.

$$[x]=۲\to[x^۲]=۴\Rightarrow ۴\leq x^۲<۵\Rightarrow ۲\leq x<\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow x\in[۲,\sqrt{۵})\xrightarrow{[۲,۲+k)}۲+k=\sqrt{۵}\Rightarrow k=\sqrt{۵}-۲$$

۴.گزینه ۱ نکته: تابع $y=g(x)\cdot[f(x)]$ به ازای ریشه های $g(x)$ همواره پیوسته است .

عدد -۱ از داخل براکت خارج می شود و نقشی در نقاط ناپیوستگی ندارد. توابع براکتی در نقاطی که عبارت داخل براکت مقداری صحیح باشد، ناپیوسته می‌باشند، لذا داریم:

$$[\frac{۱}{۳}x]\ :\ \frac{۱}{۳}x=k\in z\to x=۳k\to ۰<۳k<۹\to ۰<k<۳\to k=۱,۲\to x=۳,۶$$

از طرفی چون تابع $y=(x-۳)[\frac{۱}{۳}x-۱]$ است، در نتیجه تابع در نقطه $x=۳$ پیوسته می باشد چون ریشه‌ی ضریب جزء صحیح است و $x=۶$ تنها نقطه ناپیوستگی تابع است.

۵.گزینه ۴ از آنجا که تابع $\sin\frac{۱}{x}$ کراندار است $(-۱\leq\sin\frac{۱}{x}\leq ۱)$، در نتیجه طبق قاعده‌ی (صفر = کراندار × صفر) داریم:

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}x\sin\frac{۱}{x}=۰\times \text{کراندار}=۰\quad ,\quad f(۰)=۰$$

بنابراین تابع $f(x)$ از چپ و راست پیوسته می‌باشد.

۶.گزینه ۱ در نقاط صحیح باید بررسی کنیم که در بازه داده شده نقاط $x=۰$ و $x=۱$ هستند که تابع در نقطه به طول $x=۱$ پیوسته است و در نقطه به طول $x=۰$ ناپیوسته است. چون:

$$f(x)=[x]([x]-1)$$

$$f(0)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=2 \qquad f(1)=0\ ,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=0$$

۷.گزینه ۳ هردوضابطه پیوستگی دارند لذا کافی است شرط $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$ برقرار شود. لذا داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-1)|x| = (2-1)\times 2 = 2$$

حد راست و مقدار تابع $\quad f(2) = a + 2\sin\dfrac{\pi}{2} = a+2 \Rightarrow a+2 = 2 \Rightarrow a = 0$

۸.گزینه ۴ بنابر قضیه‌ی بولزانو باید ابتدا و انتهای بازه‌ها را در تابع قرار دهیم. هر کدام که مقادیرشان مختلف‌العلامت باشد در آن بازه حداقل یک ریشه دارد.

ابتدا بازه های داده شده را مرتب می کنیم:

$$\frac{1}{13} < \frac{1}{12} < \frac{2}{23} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

$$1)\ f(\frac{1}{13}) = \frac{1}{13^2} - \frac{12}{13} + 1 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13} > 0$$

$$2)\ f(\frac{1}{12}) = \frac{1}{12^2} - \frac{12}{12} + 1 = \frac{1}{12^2} > 0$$

$$3)\ f(\frac{2}{23}) = \frac{8}{23^2} - \frac{24}{23} + 1 = \frac{8}{23^2} - \frac{1}{23} = \frac{8-23^2}{23^2} < 0$$

همان‌طور که می‌بینید $f(\frac{1}{12})f(\frac{2}{23}) < 0$، پس تابع f در بازه‌ی $\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{23}\right]$ محور xها را قطع کرده و لذا کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت $f(x) = 0$ در این بازه است.

۹.گزینه ۴ می دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in z \\ -1 & x \notin z \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1$$ همواره پیوسته است

۱۰.گزینه ۳ با توجه به این که هر دو تابع f و g در $x = 0$ ناپیوسته‌اند، در مورد پیوستگی جمع و تفریق و تقسیم و نیز ترکیب آن‌ها با هم یعنی fog و gof و fof نمی‌توان اظهار نظر قطعی نمود و باید در هر گزینه ضابطه‌ی تابع داده شده را تشکیل و مورد بررسی قرار داد.

بررسی هر چهار گزینه:

$$1)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -2x - \dfrac{1}{2} & ; \quad x < 0 \\ 2x + 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$ تابع $f+g$ در $x = 0$ ناپیوسته است

$$2)\ (fof)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2} & ; \quad x < 0 \\ f(2x) = 4x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$ تابع fof در $x = 0$ ناپیوسته است

$$3)\ gof(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(-\dfrac{1}{2}) = -2(-\dfrac{1}{2}) = 1 & ; \quad x < 0 \\ g(2x) = 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$ ق ق $\Leftarrow$ تابع gof در $x = 0$ پیوسته است

$$4)\ fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(-2x) = 2(-2x) = -4x & ; \quad x < 0 \\ f(1) = 2(1) = 2 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$ تابع fog در $x = 0$ ناپیوسته است

۱۱.گزینه ۲ هر دو ضابطه در دامنه‌هایشان پیوسته هستند و برای اینکه در R پیوسته باشد فقط نقطه مرزی را بررسی می‌کنیم. برای پیوستگی تابع در یک نقطه باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در آن نقطه با هم برابر باشند، برای این تابع در نقطه‌ی $x = -1$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)} \frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to(-1)^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1} = \frac{1}{4} \\ \displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1) = -a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱۲.**گزینه ۴** **معادله‌ی $(a+2)x^2-7x+4=a$ را به صورت $(a+2)x^2-7x+4-a=0$ بازنویسی می‌کنیم و تعریف می کنیم:**

$$f(x)=(a+2)x^2-7x+4-a=0$$

تابع f یک تابع پیوسته است، بنابراین اگر $f(1)$ و $f(-1)$ مختلف العلامت باشند، بنابر نتیجه‌ی قضیه‌ی مقدار میانی در این صورت قطعاً در بازه‌ی $(-1,1)$ حداقل یک ریشه خواهد داشت. داریم:

$$f(1)=(a+2)1^2-7\times 1+4-a=-1$$

$$f(-1)=(a+2)(-1)^2-7\times(-1)+4-a=13$$

پس نمودار تابع f به ازای جمیع مقادیر a، از دو نقطه‌ی ثابت $(1,-1)$ و $(-1,13)$ می گذرد. بنابراین تابع f حداقل یک ریشه در بازه‌ی $(-1,1)$ دارد، در نتیجه a هر عددی می‌تواند باشد.

۱۳.**گزینه ۴** **شرط پیوستگی یعنی شرط $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ را بررسی می‌کنیم.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{3\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

چون حد تابع نامتناهی است بنابراین a هیچ مقدار حقیقی نمی تواند بپذیرد تا f در $x=1$ پیوسته باشد.

۱۴.**گزینه ۴**

برای پیوسته بودن باید: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3^+}\frac{-\dfrac{1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}}{1}=-\frac{1-\frac{1}{4}}{2}=-\frac{3}{8}$$

$$f(3)=3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}\quad \text{و}\quad \lim_{x\to 3^-}(ax-3a-\frac{3}{8})=-\frac{3}{8}$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر است پس به ازای هر مقدار a این تابع پیوسته است.

۱۵.**گزینه ۲** **ابتدا باید دامنه‌ی تابع را باز کنیم.**

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot[x] & -1<x<1\\ ax+b & x\geq 1\ ,\ x\leq -1\end{cases}$$

همانطور که می‌بینیم هر دو ضابطه در دامنه‌هایشان همواره پیوسته هستند لذا فقط پیوستگی نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\times[1^-]=0\end{cases}\Longrightarrow a+b=0$$

$$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-a+b$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-1\times[-1^+]=1\Longrightarrow -a+b=1\Rightarrow\begin{cases} a+b=0\\ -a+b=1\end{cases}\quad a=-\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{1}{2}$$