۱. گزینه ۴ هر عددی که داخل براکت را صحیح کند تابع در آن ناپیوسته است و مشتق ندارد مگر آنکه آن عدد طول مینیمم نسبی تابع داخل براکت باشد. توجه کنیم که تابع $\frac{1}{x}$ مینیمم نسبی ندارد.

$$\frac{1}{x}=k\in Z\to x=\frac{1}{k}\quad \text{نقاط ناپیوستگی}=\{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$$

۲. گزینه ۴ ابتدا معادله‌ی خط مماس را از نقطه $A(0,\alpha)$ با شیب فرضی m می‌نویسیم:

$$y-\alpha=m(x-0)\Rightarrow y=mx+\alpha$$

و می‌دانیم معادله تلاقی خط مماس با منحنی ریشه‌ی مضاعف دارد پس:

$$\frac{1}{2}x^2+3=mx+\alpha\Rightarrow \frac{1}{2}x^2-mx-\alpha+3=0\Rightarrow x^2-2mx-2\alpha+6=0$$

$$\Delta'=0\Rightarrow m^2+2\alpha-6=0\Rightarrow \text{دو خط بر هم عمودند}\Rightarrow m_1m_2=\frac{c}{a}=\frac{2\alpha-6}{1}=-1\Rightarrow \alpha=\frac{5}{2}$$

روش دیگر: نقطه‌ی A باید روی خط هادی سهمی یعنی $y=\frac{5}{2}$ باشد پس $\alpha=\frac{5}{2}$

۳. گزینه ۳

$x=0$ ریشه‌ی درون قدر مطلق و نقطه زاویه‌دار تابع است.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+a)-0}{x-0}=a$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x+a)-0}{x}=-a$$

چون دو خط بر هم عمودند بنابراین باید حاصل‌ضرب شیب‌ها عدد -1 شود پس:

$$mm'=-1\Rightarrow -a^2=-1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$$

۴. گزینه ۱ اگر دو نقطه B, A باشند آنگاه مختصات آن دو نقطه $A\Big|_{a+3}^{1}$, $B\Big|_{a-3}^{-1}$ می‌باشد.

اگر خطی بر منحنی مماس باشد معادله تلاقی آن با منحنی ریشه ی مضاعف دارد پس ابتدا معادله خط مذکور را می نویسیم:

$$mAB=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{a+3-a+3}{2}=\frac{6}{2}=3\Rightarrow y-(a+3)=3(x-1)\Rightarrow y=3x+a$$

حال معادله این خط را با منحنی تلاقی می دهیم: (معادله تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد)

$$x^3+ax^2+2x=3x+a\Rightarrow x^3+ax^2-x-a=0\Rightarrow x^2(x+a)-(x+a)=0$$

$$(x+a)(x^2-1)=0\begin{cases}x=1\\ x=-1\Rightarrow a=-1, a=1\\ x=-a\end{cases}$$ برای وجود ریشه‌ی مضاعف باید ریشه‌های دو پرانتز برابر باشند.

۵. گزینه ۱ توابع به فرم $f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\in Q\\ f_2(x) & x\in Q'\end{cases}$ در صورتی پیوسته هستند که $f_1(x)=f_2(x)$ باشد و در صورتی مشتق پذیرند که $f'_1(x)=f'_2(x)$ هم برابر باشد.

این تابع تنها در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است $(x^2=0\Rightarrow x=0)$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x\in Q\\ 0 & x\in Q'\end{cases}\Rightarrow 2x=0\to x=0$$ پس فقط در $x=0$ مشتق دارد

۶.گزینه ۳

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_-(0)$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{x\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷.گزینه ۱

ابتدا با قرار دادن $x=2$ در منحنی، عرض نقطه را محاسبه می‌کنیم:

$x=2\xrightarrow{\text{تابع}}y+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}(1)\Rightarrow y=0\Rightarrow(2,0)$ مختصات نقطه

شیب خط مماس $y'=\dfrac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1+3x-5}\xrightarrow{x=2}y'=\frac{3}{4}=m$

معادله‌ی خط $y-y_0=m\cdot(x-x_0)\Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x-2)$

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

عرض از مبدأ برابر $-\frac{3}{2}$ است.

۸.گزینه ۳

$$C(1001)-C(1000)=C'(1000)$$

$$\Rightarrow C'(x)=150+75000\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow C'(1000)=150+75000\times\frac{1}{3\times 100}=400$$

۹.گزینه ۲

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'(\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$(f(\tan x))'=(1+\tan^2 x)f'(\tan x)=(1+\tan^2 x)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\sqrt{1+\tan^2 x}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$$

توجه کنیم که:

$$|x|<\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\to\cos x>0\to|\cos x|=\cos x$$

۱۰.گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\sqrt{x}=y\to x=y^2\xrightarrow{\text{جای } x\,,\,y \text{ عوض شود}}y=x^2\\ -\sqrt{-x}=y\to -x=y^2\xrightarrow{\text{جای } x\,,\,y \text{ عوض شود}}y=-x^2\end{array}\to f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ -2x & x<0\end{cases}\to(f^{-1})'_+(0)=(f^{-1})'_-(0)=(f^{-1})'(0)=0$$

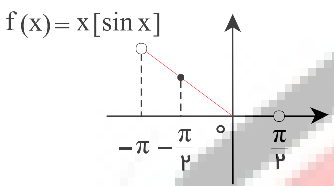
پس تابع $(f^{-1})'$ در $x=0$ پیوسته است و اجازه محاسبه $(f^{-1})''$ را هم داریم.

$(f^{-1})''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ & x=0\\ -2 & x<0\end{cases}\to(f^{-1})''_+(0)\neq(f^{-1})''_-(0)$ پس مشتق دوم تابع $(f^{-1})(x)$ وجود ندارد.

۱۱.گزینه ۳ **راه اول:** در بازه $(-\pi\,,\,\frac{\pi}{2})$ نقاط $\{-\frac{\pi}{2},0\}$ (نقاط مرز بین دو ناحیه مثلثاتی) باعث صحیح شدن عبارت داخل براکت می‌شوند بنابراین فقط این دو نقطه را بررسی می‌کنیم:

در $x=0$ پیوسته است چون عدد $x=0$ ریشه ضریب جزء صحیح می‌باشد اما مشتق‌پذیر نیست چون ریشه‌ی مکرر نمی‌باشد و نیز $x=-\frac{\pi}{2}$ مینیمم نسبی داخل براکت است و تابع در آن هم پیوسته و هم مشتق پذیر می‌باشد. بنابراین فقط در $\{0\}$ مشتق ناپذیر است.

راه دوم: رسم شکل



روي $(-\pi,\frac{\pi}{2})$ پیوسته و در صفر مشتق ناپذیر است.

۱۲.گزینه ۳

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}-2(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}})\frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=0\Rightarrow f(x)=cte \text{ تابع ثابت}$$

چون مشتق تابع در حالت کلی صفر است پس این یک تابع ثابت است یعنی به ازای جمیع مقادیر x ثابت است بنابراین یک عدد دلخواه مانند $x=1$ در تابع قرار می‌دهیم تا تابع $f(x)$ پیدا شود.

$$f(x)=f(1)=-\frac{\pi}{2}\rightarrow f'(x)-f(x)=0-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

۱۳.گزینه ۱

$$\begin{cases} fof(x)=\sin(\sin x)\\ f^2(x)=\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow y=\frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$y'=\frac{\cos x\ \cos(\sin x)\sin^2 x-2\sin x\ \cos x\ \sin(\sin x)}{\sin^4 x}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2})=0$$

۱۴.گزینه ۳ ابتدا شرط لازم برای مشتق‌پذیری (پیوستگی) را بررسی می‌کنیم.

$f(0)=0+1=1\ ,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=1$ در $x=0$ پیوسته است

$f(1)=4\ ,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=4\ ,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=2$ در $x=1$ ناپیوسته است

$f(2)=6\ ,\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=6\ ,\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=6$ در $x=2$ پیوسته است

پس تابع f در نقطه $x_0=1$ ناپیوسته است. حال باید مشتق پذیری تابع را در نقاط مرزی $x=2\ ,\ x=0$ بررسی کنیم.

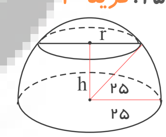
$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 2x & x>2\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} f'_+(0)=1\ ,\ f'_-(0)=0\\ f'_-(2)=2\ ,\ f'_+(0)=4\end{matrix}$$

f در نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=2$ مشتق پذیر نمی باشد.

۱۵.گزینه ۴

$$r^2+h^2=625$$

$$S=\pi r^2=\pi\left(625-h^2\right)\Rightarrow S't=\pi\left(-2hh't\right)=\pi\left(-2\times 12\times\frac{4}{100}\right)=-\frac{96}{100}\pi$$



۱۶.گزینه ۲

با توجه به فرض داریم:

$f(x)=x+1+(g(x))^5 \Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)\cdot(g(x))^4 \ (*)$

$\xrightarrow{x=0} f'(0)=1+5g'(0)(g(0))^4 \xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1=1+5g'(0) \Rightarrow g'(0)=0$

$(*) \Rightarrow$ مشتق $\Rightarrow f''(x)=5g''(x)(g(x))^4+5g'(x)(4g'(x)(g(x))^3)$

$\xrightarrow{x=0} f''(0)=5g''(0)(g(0))^4+20(g'(0))^2(g(0))^3 \Rightarrow f''(0)=5g''(0)(1)^4+20(0)^2(1)^3=5g''(0)$

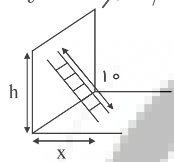
۱۷.گزینه ۲ طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ایجاد شده داریم:

$h^2+x^2=100 \ (*)$

چون انتهای نردبان با سرعت $0/5 m/s$ به زمین نزدیک می‌شود. پس:

$h'_t=-0/5 m/s$

وقتی $x=6m$ باشد، آن‌گاه $h=8m$ است. حال از رابطه‌ی (*) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:



$2hh'_t+2xx'_t=0 \Rightarrow 2(8)(-0/5)+2(6)(x'_t)=0 \Rightarrow x'_t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}m/s$

۱۸.گزینه ۱ چون نقطه‌ی تماس خط و منحنی روی منحنی قرار دارد، لذا می‌توان مختصات آن را به‌صورت $T(\alpha,\alpha^2-1)$ در نظر گرفت. از طرفی چون $f'(x)=2x$ ، شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی T برابر است با $m=2\alpha$. پس معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی T به صورت زیر است:

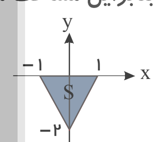
$y-y_T=m(x-x_T) \Rightarrow y-(\alpha^2-1)=2\alpha(x-\alpha)$

از طرف دیگر این خط باید از نقطه ی $(0,-2)$ هم بگذرد، پس:

$-2-(\alpha^2-1)=2\alpha(0-\alpha) \Rightarrow -2-\alpha^2+1=-2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1 \Rightarrow T(1,0)\\ \alpha=-1 \Rightarrow T(-1,0)\end{cases}$

بنابراین مساحت مثلثی که سه رأس آن $(1,0)$، $(-1,0)$ و $(0,-2)$ باشند، برابر است با:

$S=\frac{1}{2}(2)(2)=2$



۱۹.گزینه ۳ چون نقاط به طول‌های ۱ و $-\frac{1}{2}$ بر منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ واقع هستند، لذا با قرار دادن $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}$ در ضابطه‌ی تابع، مختصات این نقاط به صورت $A(1,1)$ و $B(-\frac{1}{2},4)$ به دست می‌آیند. شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

$m=\frac{4-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{-\frac{3}{2}}=-2$

فرض کنید طول نقطه‌ی تماس $x=\alpha$ باشد. در نقطه‌ی تماس شیب خط مماس باید با شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B برابر باشد، لذا داریم:

$y=\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'=\frac{-2}{x^3} \Rightarrow y'(\alpha)=-\frac{2}{\alpha^3}=-2 \Rightarrow \alpha^3=1 \Rightarrow \alpha=1$

بنابراین طول نقطه‌ی تماس $x=1$ می‌باشد.

۲۰.گزینه ۳ اگر $y=f(x)$ باشد، و x و y هر دو به متغیر t وابسته باشند، برای بررسی رابطه‌ی بین آهنگ های تغییر x و y از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم؛ یعنی $y'_t=f'(x)x'_t$. هم‌چنین می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از مبدأ برابر است با $D=\sqrt{x^2+y^2}$. با توجه به این‌که $y=x^2$ داریم:

$D^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow D = \sqrt{x^۲+(x^۲)^۲} \Rightarrow D = \sqrt{x^۲+x^۴}$

(ازطرفین نسبت به t مشتق می گیریم)$\Rightarrow D'_t = \frac{(۲x+۴x^۳)}{۲\sqrt{x^۲+x^۴}} \times x'_t = \frac{۲x(۱+۲x^۲)}{۲|x|\sqrt{۱+x^۲}} \times x'_t$

$$\xrightarrow[x=\frac{۱۲}{۵}]{x'_t=۰٫۰۵} D'_t = \frac{۱+۲(\frac{۱۲}{۵})^۲}{\sqrt{۱+(\frac{۱۲}{۵})^۲}} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۱+\frac{۲۸۸}{۲۵}}{\sqrt{\frac{۱۶۹}{۲۵}}} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{\frac{۳۱۳}{۲۵}}{\frac{۱۳}{۵}} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۳۱۳}{۱۳۰۰} \simeq ۰٫۲۴$$

بنابراین سرعت دور شدن M از مبدأ مختصات تقریباً ۰٫۲۴ است.

۲۱.گزینه ۱ با توجه به تعریف مشتق، باید $f'(-۱)$ را محاسبه کنیم. چون $x=-۱$ ریشه پرانتز قبل رادیکال است. پس کافیست فقط از پرانتز مشتق بگیریم و در رادیکال ضرب کنیم.

$$f'(x) = (۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲-۷x} \xrightarrow{x=-۱} f'(-۱) = (-۲-۱)\sqrt[۳]{۸} = -۶$$

نکته: مشتق تابع $f(x)=g(x)h(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ که در آن $g(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و $g(a)=۰$ و h در a پیوسته و کراندار باشد، به صورت $f'(a)=g'(a)h(a)$ است.

۲۲.گزینه ۲ می‌دانیم که عبارت $f'(g(x))\cdot g'(x)$ همان مشتق عبارت $fog(x)$ است بنابراین داریم:

$$f'(g(x))\cdot g'(x) = (f(g(x)))' = (۱-\frac{۳}{x})' = \frac{۳}{x^۲}$$

باید توجه داشته باشید که: $fog = f(g(x)) = f(\sqrt[۳]{x-۱}) = \frac{(\sqrt[۳]{x-۱})^۳-۲}{۱+(\sqrt[۳]{x-۱})^۳} = \frac{x-۳}{x} = ۱-\frac{۳}{x}$

۲۳.گزینه ۴ با برابر قرار دادن ضابطه‌های دو تابع f و g به معادله‌ی تلاقی دست پیدا می‌کنیم و به حل معادله‌ی حاصل می‌پردازیم:

$$\left.\begin{matrix} = -x^۴+۲x^۲+x \\ = x+۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{f=g} -x^۴+۲x^۲+x = x+۱ \Rightarrow x^۴-۲x^۲+۱=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)^۲=۰ \rightarrow (x+۱)^۲\cdot(x-۱)^۲=۰$$

دو نمودار در نقاط $x=۱$, $x=-۱$ بر هم مماسند بنابراین غیر قاطع محسوب می‌شوند.

۲۴.گزینه ۴ از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x=۲$ می باشد، پس کافی است $f'(۲)$ را محاسبه کنیم. از طرف دیگر چون $f(۲)=۰$ می شود، یعنی $x=۲$ ریشه ی تابع f می باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفر شونده در $x=۲$ (یعنی $\cot\frac{\pi}{۲}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x=۲$ ضرب کنیم.

$$(\cot\frac{\pi}{x})' = (-\frac{\pi}{x^۲})[-(۱+\cot^۲\frac{\pi}{x})] = \frac{\pi}{x^۲}(۱+\cot^۲\frac{\pi}{x}) \Rightarrow f'(۲) = \frac{\pi}{(۲)^۲}(۱+\cot^۲\frac{\pi}{۲})(\frac{۲+\sqrt{۲\times۲}}{۲-۱}) = \pi$$

نکته: مشتق تابع $f(x)=g(x)h(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ که در آن $g(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و $g(a)=۰$ و h در a پیوسته و کراندار باشد، به صورت $f'(a)=g'(a)h(a)$ است.

۲۵.گزینه ۱ نقطه‌ی $M(۰,۴)$ خارج از منحنی تابع $y=۲x-x^۲$ است. مختصات نقطه‌ی تماس فرضی واقع بر منحنی به صورت $T\left(\alpha,۲\alpha-\alpha^۲\right)$ می‌باشد. حال شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه را به دست می‌آوریم:

$y' = ۲-۲x \Rightarrow m = f'(\alpha) = ۲-۲\alpha$ شیب فرضی خط مماس

حال با داشتن مختصات نقطه‌ی تماس (T) و شیب خط مماس (m) ، معادله‌ی پارامتری خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_T = m(x-x_T) \Rightarrow y-\left(۲\alpha-\alpha^۲\right) = (۲-۲\alpha)(x-\alpha)$$

از طرف دیگر مختصات نقطه‌ی $(۰,۴)$ باید در معادله‌ی خط به دست آمده صدق کند. پس داریم:

$$۴-\left(۲\alpha-\alpha^۲\right) = (۲-۲\alpha)(۰-\alpha) \Rightarrow \alpha^۲-۲\alpha+۴ = ۲\alpha^۲-۲\alpha \Rightarrow \alpha^۲=۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=۲ \Rightarrow f(\alpha)=۰ \\ \alpha=-۲ \Rightarrow f(\alpha)=-۸ \end{cases}$$

همین جا معلوم است که ۸− جواب است چون صفر در گزینه‌ها نیست . اما برای تکمیل حل تست ادامه‌ی راه حل را هم می‌آوریم.

بنابر صورت مسأله باید αای را انتخاب کنیم که شیب مثبت تولید می‌کند:

$$m=۲-۲a \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{a=۲} m=-۲<۰ \text{ غ ق ق} \\ \xrightarrow{a=-۲} m=۶>۰ \text{ قابل قبول} \Rightarrow f(a)=-۸ \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

۲۶.گزینه ۴ روش اول: دسته خطوط گذرنده از مبدأ مختصات، دارای معادله‌ی کلی $y=mx$ هستند. برای این که معادله‌ی خط $y=mx$ بر منحنی $y=(x+۱)(x+۴)$ مماس باشد، باید معادله‌ی تقاطع دو تابع، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. داریم:

$$\begin{cases} y=(x+۱)(x+۴) \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow x^۲+۵x+۴=mx \Rightarrow x^۲+(۵-m)x+۴=۰$$

$$\Delta=۰ \Rightarrow (۵-m)^۲-۴\times۴=۰ \Rightarrow (۵-m)^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow m-۵=\pm۴ \Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=۹$$

با قرار دادن دو مقدار به دست آمده، داریم:

$$m=۹ \Rightarrow x^۲+(۵-۹)x+۴=۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow x=۲ \xrightarrow{y=۹x} A(۲,۱۸)$$
$$m=۱ \Rightarrow x^۲+(۵-۱)x+۴=۰ \Rightarrow x^۲+۴x+۴=۰ \Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{y=x} A(-۲,-۲)$$

بنابراین با قرار دادن $m=۱$ ، تماس در ربع سوم صورت می‌گیرد و قابل قبول نیست.

روش دوم: دو تابع f و g زمانی بر هم مماس‌اند که دو معادله‌ی $f(x)=g(x)$ و $f'(x)=g'(x)$ دارای ریشه‌ی مشترک باشند.

$$\begin{cases} f(x)=x^۲+۵x+۴ \\ g(x)=mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=۲x+۵ \\ g'(x)=m \end{cases} \Rightarrow ۲x+۵=m \Rightarrow x=\frac{m-۵}{۲}$$

طول نقطه‌ی تماس برابر با $\frac{m-۵}{۲}$ است. چون این نقطه باید در ربع اول باشد، پس طول آن مثبت می‌باشد، در نتیجه $m>۵$ ، که تنها گزینه (۴) در این شرط صدق می‌کند.

روش سوم: با توجه به این که مشتق تابع f به صورت $۲x+۵$ است، شیب مماس بر آن در ناحیه‌ی اول بزرگ‌تر از ۵ است، بنابراین مقدار m نیز بزرگ‌تر از ۵ است که تنها گزینه‌ی (۴) در این شرط صدق می‌کند.

۲۷.گزینه ۳ $f(\frac{\pi}{۴})$ به راحتی به دست می‌آید و داریم $f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}$ ، برای محاسبه‌ی $f'(\frac{\pi}{۴})$ ابتدا ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می دهیم:

$$f(x)=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin^۲ x}=\frac{-\sin^۲ x+۱}{\sin^۲ x+۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{(-۱\times۱)-(۱\times۱)}{(\sin^۲ x+۱)^۲}\times۲\sin x\cos x=\frac{-۴\sin x\cos x}{(\sin^۲ x+۱)^۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{-۴\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}}{((\sin\frac{\pi}{۴})^۲+۱)^۲}=\frac{-۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{((\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+۱)^۲}=\frac{-۲}{\frac{۹}{۴}}=\frac{-۸}{۹}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۴})-۳f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}-۳\times\frac{-۸}{۹}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$$

توجه: مشتق توابع به فرم $f(x)=\frac{au+b}{cu+d}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}u'_x$$

۲۸.گزینه ۱ ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(\cos x)=\sin(\pi\cos x)$$

در نقطه ی تلاقی gof با محور x ها مقدار $(gof)(x)$ صفر می شود، پس داریم:

$$gof(x)=۰ \Rightarrow \sin(\pi\cos x)=۰ \Rightarrow \pi\cos x=k\pi$$
$$\xrightarrow[k\in Z]{-۱\leq\cos x\leq۱} \cos x=k \quad ; \quad k=۰,۱,-۱$$

اگر $\cos x = 1$ یا -1 باشد، آن‌گاه معادله در بازه‌ی $(0,\pi)$ جواب ندارد. اما اگر $\cos x = 0$ باشد، آن‌گاه در فاصله‌ی $(0,\pi)$، جواب $x=\frac{\pi}{2}$ می‌شود. پس نقطه‌ی تلاقی $(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0)$ است.

برای محاسبه‌ی شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$(gof)'(x)=(-\pi\sin x)\cos(\pi\cos x)\Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{2})=-\pi\sin\frac{\pi}{2}\cos(\pi\cos\frac{\pi}{2})=-\pi(\cos(0))=-\pi$$

۲۹.گزینه ۴ ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول α محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}\Rightarrow m=f'(\alpha)=\frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به این که این خط از نقطه‌ی $(\alpha\ ,\ \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ می‌گذرد، معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha)$$

نقطه‌ی $(-1,0)$ روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه‌ی $(-1,0)$ به جای x و y در معادله‌ی این خط داریم:

$$0-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1-\alpha)\Rightarrow 2\alpha-1=3\Rightarrow\alpha=2$$

۳۰.گزینه ۲ می دانیم شیب خط مماس بر تابع f در نقطه ی $A(\alpha\ ,\ \beta)$ و شیب خط مماس بر تابع f^{-1} در نقطه ی $A'(\beta\ ,\ \alpha)$ معکوس یکدیگرند. با توجه به این که خط $2y-x=a$ (یا $y=\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$) مماس بر f^{-1} در $A'(\beta\ ,\ \alpha)$، دارای شیب $\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط مماس بر f در نقطه ی $A(\alpha\ ,\ \beta)$ برابر ۲ می باشد. یعنی:

$$f(x)=x-\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow m=f'(\alpha)=1+\frac{1}{\alpha^2}=2\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=-1\ \text{غقق}\end{cases}$$

با توجه به این که طبق صورت تست باید $x>0$ باشد، پس $\alpha=-1$ قابل قبول نیست. بنابراین نقطه ی A به مختصات $(1\ ,\ 1-\frac{1}{1})$ می باشد و در نتیجه $A'(0,1)$ روی خط $2y-x=a$ است:

$$2(1)-0=a\Rightarrow a=2$$

۳۱.گزینه ۴ با توجه به این که تابع داده شده مجموع دو تابع $y_1=[x]$ و $y_2=\left[x+\frac{1}{3}\right]$ می باشد، ابتدا نقاط مشتق ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه‌ی $(0,3)$ مشخص می کنیم. با توجه به ساختار توابع y_1 و y_2، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق ناپذیرشان هم هست:

$$y_1=[x]\Rightarrow x=k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in(0,3)}x=1,2$$

$$y_2=\left[x+\frac{1}{3}\right]\Rightarrow x+\frac{1}{3}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k-\frac{1}{3}\xrightarrow{x\in(0,3)}x=\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}$$

y_2 در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_1 در آن ها پیوسته است.

در هر یک از نقاط به طول ۱ ، ۲ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ و $\frac{8}{3}$ یکی از دو تابع y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)=y_1+y_2$ در هر یک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

۳۲.گزینه ۲ ابتدا با توجه به رابطه‌ی نقاط متناظر A و A' واقع بر منحنی توابع f و f^{-1} عرض نقطه‌ی تماس واقع بر منحنی f^{-1} (طول نقطه‌ی متناظر واقع بر منحنی f) را به دست می‌آوریم:

$$A'(2,?)\in f^{-1}\Leftrightarrow A'(?,2)\in f$$

$$f(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{y=2}2=x+\sqrt{x}\Rightarrow x=1\Rightarrow A'(2,1),A(1,2)$$

حال با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشتق‌های f و f^{-1} در نقاط متناظر داریم:

$$A'(b,a)\in f^{-1}\Leftrightarrow A(a,b)\in f:\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=1}f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

در نتیجه شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطه‌ی $A'(2,1)$ برابر با $\frac{2}{3}$ است، پس:

معادله‌ی خط مماس بر f^{-1} در نقطه‌ی $A'(2,1)$ $\quad y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-1=\frac{2}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

عرض از مبدأ این خط برابر با $-\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۳۳. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{(\cos^2(u))'=-2u'\sin u\cos u=-u'\cdot\sin 2u}$ بنابراین:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\times(-\sin(2\tan^{-1}x))\Rightarrow y'(1)=\frac{-1}{1+1}\times\sin(2\times\frac{\pi}{4})=\frac{-1}{2}$$

۳۴. گزینه ۳ فرض کنیم شیب خط مماس بر تابع $y=\frac{1}{2}x^2-x$ برابر m باشد. معادله ی آن برابر خواهد بود با:

$$y+1=m(x-2)\Rightarrow y=mx-2m-1$$

این خط بر تابع $\frac{1}{2}x^2-x$ مماس است، بنابراین معادله ی $\frac{1}{2}x^2-x=mx-2m-1$ دارای ریشه ی مضاعف خواهد بود:

$$x^2-2(m+1)x+4m+2=0\Rightarrow\Delta'=(m+1)^2-(4m+2)=0\Rightarrow m^2-2m-1=0$$

این معادله دو جواب دارد که برابر شیب های دو خط مماس رسم شده است.

$$m_1m_2=\frac{c}{a}=-1\Rightarrow \text{دو مماس عمود برهم}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم: خط $y=-1$ خط هادی سهمی داده شده است و چون نقطه ی A روی خط هادی قرار دارد پس خطوط مماس برهم عمودند.

۳۵. گزینه ۲ در همسایگی راست $x=-3$ ابتدا براکت را تعیین عدد و قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x\to(-3)^+\Rightarrow\{[x]=-3\quad |x|=-x\quad\Rightarrow f(x)=(-3+x)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{9x}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3+x)\Rightarrow f'(-3)=\sqrt[3]{-27}+\frac{3}{(\sqrt[3]{-27})^2}(-3-3)=-3-\frac{6}{3}=-5$$

۳۶. گزینه ۱ $y=\frac{-1}{2}x+\frac{7}{2}$ خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی $x=3$ است، بنابراین:

$$f(3)=\frac{-3}{2}+\frac{7}{2}=2\Rightarrow f^{-1}(2)=3$$

$$f'(3)=\frac{-1}{2}\Rightarrow(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(3)}=-2$$

$$g(x)=\frac{1}{x}f^{-1}(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{x^2}f^{-1}(x)+\frac{1}{x}(f^{-1})'(x)\Rightarrow g'(2)=\frac{-1}{4}f^{-1}(2)+\frac{1}{2}(f^{-1})'(2)=\frac{-3}{4}+\frac{-2}{2}=-\frac{7}{4}$$

۳۷.گزینه ۳

طبق گفته‌ی سؤال مقدار $f'(۱)$ موجود است، بنابراین باید شرط پیوستگی تابع در $x=۱$ و نیز برابری مشتق‌های چپ و راست در $x=۱$ برقرار باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱ \Rightarrow f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱-۱=۰ \\ x^۲+ax+b & x<۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۱+a+b \end{cases} \Rightarrow a+b+۱=۰$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۱+\frac{۱}{x^۲} & x\geq ۱ \Rightarrow f'_+(۱)=۱+۱=۲ \\ ۲x+a & x<۱ \Rightarrow f'_-(۱)=۲+a \end{cases} \Rightarrow ۲+a=۲ \Rightarrow a=۰, b=-۱$$

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱ \\ x^۲-۱ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

۳۸.گزینه ۲ **می‌دانیم معادله خط $y-y_۰=m\cdot(x-x_۰)$ و شیب خط** $m=\frac{yA-yB}{xA-xB}$

ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ را به دست می‌آوریم.

$$y-۱=\frac{۲-۳}{۱+۱}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

این خط در $x=۳$ بر تابع f مماس است، بنابراین:

$$f(۳)=\frac{-۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱ \quad , \quad f'(۳)=m=-\frac{۱}{۲}$$

حال حد خواسته شده را که ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد، به کمک قاعده‌ی هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{-x+۳} \overset{Hop}{=\!=} \frac{۲f(۳)\cdot f'(۳)+۴f'(۳)}{-۱}=\frac{۲\times ۱\times(\frac{-۱}{۲})+۴(\frac{-۱}{۲})}{-۱}=۳$$

۳۹.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{f'(x)\cdot g'(f(x))=(g(f(x)))'}$

$$g(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{۱+f^۲(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱-x^۲+x^۲}{۱-x^۲}}}=x \Rightarrow (g(f(x)))'=۱$$

۴۰.گزینه ۴ **نقطه $x=۱$ طول تابع $f^{-۱}(x)$ است پس عرض تابع $f(x)$ می‌باشد بنابراین داریم:**

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}=۱ \Rightarrow x=۳ \rightarrow (۱,۳)\in f^{-۱}(x) \rightleftharpoons (۳,۱)\in f(x) \quad , \quad f'(x)=\frac{۵}{(x+۲)^۲}$$

$f^{-۱}$ شیب خط مماس بر تابع $=(f^{-۱})'(۱)=\frac{۱}{f'(۳)}=\frac{۱}{\frac{۵}{(۳+۲)^۲}}=۵$

$f^{-۱}$ شیب خط قائم بر تابع $=\frac{-۱}{(f^{-۱})'(۱)}=\frac{-۱}{۵}$

$$y-y_۰=-\frac{۱}{۵}(x-x_۰) \rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۵}(x-۱) \xrightarrow{y=۰} x=۱۶$$

۴۱.گزینه ۴ **نماد $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ یعنی مشتق دوم y نسبت به متغیر x پس:**

$$x^۲y - y^۲ - ۲\sqrt{x} + ۴ = ۰ \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x\cdot y - \frac{۱}{\sqrt{x}}}{x^۲ - ۲y} \xrightarrow{y=۲\ ,\ x=۱} y' = -\frac{۴-۱}{۱-۴} = ۱$$

توجه داشته باشید که مشتق دوم یکبار مصرف است یعنی فقط یکبار از فرمول ضمنی استفاده می‌کنیم برای بار دوم باید از قوانین معمولی مشتق استفاده کنیم.

$$y'_x = \frac{\frac{۱}{\sqrt{x}} - ۲x\cdot y}{x^۲-۲y} \Rightarrow y''_x = \frac{(\frac{-۱}{۲x\cdot\sqrt{x}} - ۲y - ۲x\cdot y')\cdot(x^۲-۲y) - (۲x-۲y')\cdot(\frac{۱}{\sqrt{x}} - ۲x\cdot y)}{(x^۲-۲y)^۲}$$

اگر قرار دهیم $x=۱$ و $y=۲$ و $y'=۱$ آنگاه y'' به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$y'' = \frac{(-\frac{۱}{۲} - ۴ - ۲)\cdot(-۳) - (۰)}{۹} = \frac{۱۳}{۶}$$

روش دوم:

می‌دانیم: $y''_x = \frac{d^۲y}{dx^۲}$

$$x^۲y - y^۲ - ۲\sqrt{x}+۴=۰ \Rightarrow ۲xy + x^۲y' - ۲yy' - \frac{۱}{\sqrt{x}} = ۰ \xrightarrow[y=۲]{x=۱} ۴ + y' - ۴y' - ۱ = ۰ \Rightarrow y'=۱$$

$$۲y + ۲xy' + ۲xy' + x^۲y'' - ۲y'y' - ۲yy'' + \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x} = ۰$$

$$\xrightarrow[y'=۱]{x=۱\ ,\ y=۲} ۴+۲+۲+y''-۲-۴y''+\frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۳y'' = \frac{۱۳}{۲} \Rightarrow y'' = \frac{۱۳}{۶}$$

۴۲.گزینه ۳

$$\pi^+ \to f(x) = [۲^-]\sin ۲x \to f(x) = \sin ۲x \to f'(x) = ۲\cos ۲x \to f'_+(\pi) = ۲ \to \quad m_۱ = ۲$$

$$\pi^- \to f(x) = [۲^+]\sin ۲x \to f(x) = ۲\sin ۲x \to f'(x) = ۴\cos ۲x \to f'_-(\pi) = -۴ \to m_۲ = ۴$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right| = \left|\frac{۲-۴}{۱+۸}\right| = \left|\frac{-۲}{۹}\right| = \frac{۲}{۹}$$

۴۳.گزینه ۱

ابتدا مشتق اول را محاسبه می‌کنیم

$$x^۲y + y^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x\cdot y + x^۲\cdot y' + ۲y\cdot y' = ۰ \quad (۱)$$

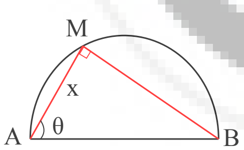
$$\xrightarrow{x=۲\ \ ,\ \ y=-۱} -۴+۴y'-۲y' = ۰ \to \boxed{y'=۲}$$

حال از طرفین رابطه‌ی (۱) مشتق گرفته تا مشتق دوم را به دست آوریم.

$$۲(y+x\cdot y') + ۲x\cdot y' + x^۲\cdot y'' + ۲(y''^۲ + y\cdot y'') = ۰$$

$$\xrightarrow[\substack{y=-۱\\ y'=۲}]{x=۲} ۲(-۱+۴) + ۲\times۲\times۲ + ۴y'' + ۲(۴-y'') = ۰ \Rightarrow ۲۲ + ۲y'' = ۰ \Rightarrow y'' = -۱۱$$

۴۴.گزینه ۱ اگر فرض کنیم $AM = x$ باتوجه به شکل مقابل خواهیم داشت.



$$A\hat{M}B = ۹۰^\circ \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{۱۰} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} (-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰}\times\frac{dx}{dt}$$

در لحظه‌ای که $x=۶$ داریم $\sin\theta = \frac{۸}{۱۰}$. پس می‌توان نوشت:

$$-\frac{8}{10}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{40}=-0/025$$

علامت منفی نشان‌دهنده‌ی کم شدن θ است.

۴۵.گزینه ۳

$$y=f(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)\cdot f'(f(x))\Rightarrow y'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})f'(f(\frac{1}{3}))$$

اکنون حاصل $f(\frac{1}{3})$ را به دست می‌آوریم:

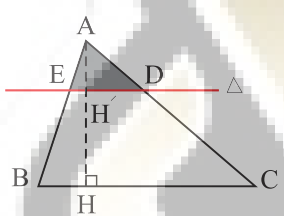
$$f(x)=\sin^2\pi x-\frac{1}{2}\cos\pi x\Rightarrow f(\frac{1}{3})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow y'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})f'(\frac{1}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\sin^2\pi x-\frac{1}{2}\cos\pi x\Rightarrow f'(x)=2\pi\sin\pi x\cos\pi x+\frac{\pi}{2}\sin\pi x\\ f'(\frac{1}{3})=2\pi\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{4}=\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}\\ f'(\frac{1}{2})=2\pi\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow y'(\frac{1}{3})=\frac{3\pi^2\sqrt{3}}{8}=(3\sqrt{3})(\frac{\pi^2}{8})$$

بنابراین مشتق تابع y در $x=\frac{1}{3}$, برابر $3\sqrt{3}\frac{\pi^2}{8}$ است.

۴۶.گزینه ۳ خط Δ همواره موازی BC است، بنابراین طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AH'}{AH}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{AH'}{15}=\frac{ED}{20}\Rightarrow ED=\frac{4}{3}AH'$$



بنابراین مساحت ناحیه سایه زده شده برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{AED}}=\frac{1}{2}AH'\cdot ED$$

و چون هم قاعده و هم ارتفاع مثلث AED در حال تغییر است باید همه را برحسب ارتفاع بنویسیم و سپس نسبت به زمان مشتق بگیریم.

$$S_{\overset{\Delta}{AED}}=\frac{1}{2}AH'\times ED=\frac{1}{2}AH'\times\frac{4}{3}AH'=\frac{2}{3}(AH')^2$$

از آن جایی که طول 'AH وابسته به زمان است، بنابراین مساحت نیز وابسته به زمان است. از مساحت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. داریم.

$$(S_{\overset{\Delta}{AED}})'_t=\frac{4}{3}(AH')\times(AH')'_t$$

باتوجه به داده‌های مسأله $(AH')'_t=\frac{5}{100}$ است. در لحظه‌ای که فاصله Δ و BC برابر با ۳ است، $AH'=12$ می‌باشد، لذا داریم:

$$(S_{\overset{\Delta}{AED}})'_t=\frac{4}{3}\times 12\times\frac{5}{100}=0/8$$

۴۷.گزینه ۱

$$y=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x)\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times(2\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))\times(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))$$

می‌دانیم $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$، پس:

$$y'(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}}\times(۲\tan(\frac{۲\pi}{۳}))\times(۱+\tan^۲(\frac{۲\pi}{۳}))=۲\times(۲(-\sqrt{۳}))(۱+(-\sqrt{۳})^۲)=-۱۶\sqrt{۳}$$

.۴۸ گزینه ۳ معادله کلی خطوط گذرا از نقطه $A=(۲,۹)$ با شیب m برابر است با: $y=m(x-۲)+۹$

برای یافتن شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی $y=-x^۲+۲x+۵$ از نقطه $A=(۲,۹)$، کافی است خطوط گذرا از A را با منحنی فوق تلاقی دهیم و به دنبال ریشه‌های مضاعف آن باشیم:

$$-x^۲+۲x+۵=m(x-۲)+۹\Rightarrow x^۲+(m-۲)x+(۴-۲m)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه ی مضاعف}}\Delta=(m-۲)^۲-۴(۴-۲m)=۰\Rightarrow\Delta=m^۲+۴m-۱۲=۰\Rightarrow(m+۶)(m-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m_۱=-۶\\m_۲=۲\end{cases}$$

اگر زاویه بین این دو مماس را θ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|=\left|\frac{-۶-۲}{۱+(-۶)(۲)}\right|=\frac{۸}{۱۱}$$

.۴۹ گزینه ۱

$$f(x)=۳x+|x|=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}\quad,\quad g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|=\begin{cases}(\frac{۳}{۴}+a)x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)x & x<۰\end{cases}$$

از آنجا که ضابطه‌های توابع f و g در $x=۰$ عوض می‌شود و مشتق‌پذیری تابع gof را در مبدأ مختصات خواسته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(gof)'(۰)\Rightarrow\begin{cases}(gof)'_+(۰)=f'_+(۰)\times g'(f(۰^+))=(۴)\times(\frac{۳}{۴}+a)\\(gof)'_-(۰)=f'_-(۰)\times g'(f(۰^-))=(۲)\times(\frac{۳}{۴}-a)\end{cases}$$

باید مشتق چپ و راست در $x=۰$ برابر باشند.

$$(gof)'_-(۰)=(gof)'_+(۰)\Rightarrow ۳+۴a=\frac{۳}{۲}-۲a\Rightarrow ۶a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

.۵۰ گزینه ۳

$$g(x)=\sqrt{۲x}f^{-۱}(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}f^{-۱}(x)+\sqrt{۲x}(f^{-۱}(x))'\Rightarrow g'(۲)=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(۲)+۲(f^{-۱}(۲))'\quad(*)$$

$$\begin{cases}f(۴)=۲\Rightarrow f^{-۱}(۲)=۴\\f'(۴)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(f^{-۱}(۲))'=\frac{۱}{f'(۴)}=۳\end{cases}\xrightarrow{(*)}g'(۲)=\frac{۱}{۲}\times۴+۲\times۳=۸$$

.۵۱ گزینه ۳

به دلیل وجود قدرمطلق ابتدا تابع $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱+x} & , & x\geq۰\\ \sqrt{۱-x} & , & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}} & , & x>۰\\ \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}} & , & x<۰\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی مشتق تابع f، این تابع تنها در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۰)=\frac{۱}{۲}\\f'_-(۰)=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)-f'_-(۰)=\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})=۱$$

.۵۲ گزینه ۳ خط $۵y+x=b$ بر نمودار $f^{-۱}$ عمود است پس شیب خط قائم بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ برابر $-\frac{۱}{۵}$ است. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ برابر ۵ است لذا: $(f^{-۱})'(\alpha)=۵$

$(f^{-1})'(\alpha) = ۵ =$ شیب خط مماس بر f^{-1} در $x=\alpha \Rightarrow \frac{-۱}{۵} =$ شیب خط قائم بر f^{-1} در $x=\alpha$

هم‌چنین می‌دانیم که اگر $(\alpha\,,\,\beta)\in f^{-1}$، آنگاه $(\beta\,,\,\alpha)\in f$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(\alpha)=\frac{۱}{f'(\beta)} \Rightarrow ۵=\frac{۱}{\frac{۵}{(\beta+۲)^۲}} \Rightarrow (\beta+۲)^۲=۲۵ \Rightarrow \begin{cases}\beta=-۷ & \text{غ ق ق}\\ \beta=۳ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$f(\beta)=\alpha \Rightarrow f(۳)=۱ \Rightarrow (۳\,,\,۱)\in f \Rightarrow (۱\,,\,۳)\in f^{-۱}$$

هم‌چنین نقطه‌ی به‌دست آمده روی خط قائم نیز قرار دارد. داریم:

$$d: ۵y+x=b \xrightarrow{(۱\,,۳)\in d} ۵\times ۳+۱=b \Rightarrow b=۱۶$$

توجه کنیم که $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲} \to f'(x)=\frac{۵}{(x+۲)^۲}$

.۵۳ گزینه ۱

چون باید خط $(m+۲)y=mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ باشد، پس باید شیب خط با مشتق منحنی برابر باشند.

$$y=(\frac{m}{m+۲})x \quad , \quad y=\sqrt{۱+x^۲} \to y'=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{m}{m+۲} \xrightarrow{-۱<\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}<۱} -۱<\frac{m}{m+۲}<۱ \to m>-۱$$

.۵۴ گزینه ۲

$$f(x)=(x+۲)e^{۱-x}$$

$$f(۱)=۳ \to A\Big|_{۳}^{۱} \quad O\Big|_{\circ}^{\circ} \to m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-\circ}{۱-\circ}=۳$$

$$f'(x)=e^{۱-x}-e^{۱-x}(x+۲) \to f'(۱)=m'=-۲$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=\left|\frac{۵}{۱-۶}\right|=۱$$

.۵۵ گزینه ۳

شیب خط همان ضریب x یعنی $m-۲$ است و شیب خط مماس بر منحنی همان مشتق منحنی در نقطه‌ی مورد نظر است.

شرط موازی $\Rightarrow$ شیب مماس $=$ شیب خط

$$f'(x)=\frac{-\frac{۱}{x^۲}}{۱+\frac{۱}{x^۲}}=m-۲ \to \frac{-۱}{۱+x^۲}=m-۲$$

$$\xrightarrow{-۱<\frac{-۱}{۱-x}<\circ} -۱<m-۲<\circ \Rightarrow ۱<m<۲$$

.۵۶ گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس و بعد معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم.

$$f(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \to f'_{(x)}=\frac{\cos x\cdot(۱+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(۱+\cos x)^۲}$$

$$m=f'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۲})+\frac{۳}{۴}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳\times ۴}{۲\times ۹}=\frac{۲}{۳}$$

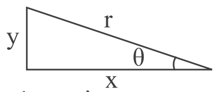
معادله‌ی خط مماس $y-t_\circ=m\cdot(x-x_\circ) \Rightarrow y-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲}{۳}(x-\frac{\pi}{۳})$

شیب این خط (ضریب x) عدد $\frac{۲}{۳}$ است و شیب خط $y=x$ هم عدد ۱ است. بنابراین زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_2\cdot m_2}\right|=\left|\frac{\frac{2}{3}-(1)}{1+\frac{2}{3}}\right|=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=0/2$$

۵۷.گزینه ۲

چون واحدها برحسب زمان می‌باشد این مسئله مربوط به کمیت‌های وابسته است و در این تست باید رابطه‌ای بین مساحت مثلث و وتر و یکی از زاویه‌های حادّه مثلث نوشت.

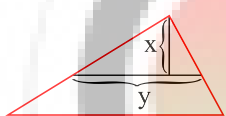


$$\begin{cases} s=\frac{1}{2}xy \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \rightarrow\ s=\frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta\rightarrow s=\frac{r^2}{4}\sin 2\theta$$

$$\xrightarrow{r=10} s=25\sin 2\theta\rightarrow s'=50\theta'\times\cos 2\theta \xrightarrow[\theta=\frac{\pi}{6}]{\theta'=\frac{1}{20}} s'=1/25$$

۵۸.گزینه ۳

چون جمع مثلث و ذوزنقه مقدار ثابتی است لذا سرعت تغییر آنها هم با یکدیگر برابر است لذا سرعت تغییر مساحت مثلث را می‌یابیم:



$$\frac{y}{20}=\frac{x}{12}\rightarrow y=\frac{5}{3}x$$

$$S=\frac{1}{2}xy\xrightarrow{y=\frac{5}{3}x}S=\frac{1}{2}\times x\times\frac{5}{3}x\rightarrow S=\frac{5}{6}x^2$$

$$S'(x)=2\times\frac{5}{6}\times x'\times x\xrightarrow[x'=0/2]{x=3}S=\frac{5}{3}\times 3\times 0/2=1$$

۵۹.گزینه ۳ شیب خط $4y+5x=a$ برابر عدد $-\frac{5}{4}$ است چون این خط عمود بر منحنی $f^{-1}(x)$ است پس مشتق تابع معکوس در نقطه‌ی تماس برابر قرینه و معکوس عدد $-\frac{5}{4}$ است لذا:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{4}{5}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{4}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{x}=2$$

$$x=4\xrightarrow{\text{منحنی}}y=4+\sqrt{4}=4+2=6$$

نقطه‌ی $(4,6)$ روی منحنی $f(x)$ قرار دارد پس $(6,4)$ به تابع معکوس تعلق دارد بنابراین نقطه‌ی $(6,4)$ باید داخل خط قائم بر منحنی معکوس هم صدق کند چون نقطه‌ی تماس خط و تابع معکوس است.

$$(6,4)\xrightarrow{\text{خط}}4(4)+5(6)=a\Rightarrow a=46$$

۶۰.گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در گزینه‌ی ۱ دامنه‌ی تابع $[0,+\infty)$ است پس در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

در گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی $x=0$ ریشه‌ی مضاعف رادیکال فرجه‌ی فرد است و فرجه بزرگ‌تر از توان زیر رادیکال است پس نقطه‌ی $x=0$ ریشه‌ی مضاعف است و نقطه بازگشتی و مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

در گزینه‌ی ۳ داریم: $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2}=x\cdot|x|$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{\pm}}|x|=0$$ مشتق پذیر است

در گزینه‌ی ۴ داریم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x \cdot [x] - ۰}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} [x]$$

$۱) x \to ۰^{+} = [۰^{+}] = ۰ = f'_{+}(۰)$

$۲) x \to ۰^{-} = [۰^{-}] = -۱ = f'_{-}(۰)$

در $x = ۰$ مشتق پذیر نیست.