۱. گزینه ۴

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{\text{زوج}} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}}_{\text{فرد}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\tan^2 x)dx + 0 = 2\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2(\sqrt{3}-0) = 2\sqrt{3}$$

۲. گزینه ۲

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{-\sin 2x}_{u'}\underbrace{(1+\cos^2 x)}_{u}dx = -\frac{u^2}{2} = -\frac{(1+\cos^2 x)^2}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}$$

۳. گزینه ۳

می‌دانیم: $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x)$

$$F'(x) = \cos x\frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$F''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow F''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

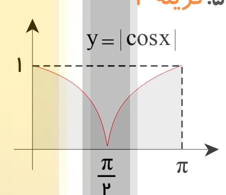
۴. گزینه ۱ ابتدا بازه $[0,1]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و برای محاسبه‌ی $L_n(f)$ باید Δx را در کمترین مقدار هر بازه ضرب کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad x\in[0,1] \quad n=4 \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$

$$L_4(f) = \Delta x\sum_{i=0}^{3} f(l_i) = \frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\right) = \frac{101}{420}$$

۵. گزینه ۳



$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi}\underbrace{|\cos x|}_{\text{زوج}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\times 1 = 2$$

۶.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{(\sin^{-1}u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$

$$F(x)=\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx+\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x^2+\sin^{-1}x+c$$

$$F(0)=0\Rightarrow c=0\Rightarrow F(x)=\sin^{-1}x^2+\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow F(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$$

۷.گزینه ۱

$$y=\frac{4}{4\sin^2x\,\cos^2x}=\frac{4}{\sin^2 2x}=4(1+\cot^2 2x)$$

$$S=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}4(1+\cot^2 2x)=-2\cot 2x\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}=0-(-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

۸.گزینه ۳

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

توجه: چون $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f(a+i(\frac{b-a}{n}))$، **بنابراین در یک حالت خاص وقتی $a=0$ و $b=1$ باشد**

داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

۹.گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}x & ;\ \text{گویا}\ x\\ 2 & ;\ \text{گنگ}\ x\end{cases}\qquad x\in[0,3]\ ,\ n=3\quad ,\quad \Delta x=\frac{3-0}{3}=1$$

بازه‌ها : $[0,1],[1,2],[2,3]$

برای محاسبه ی $U_3(f)$ باید از حداکثر مقدار تابع $f(x)$ در هر بازه استفاده کنیم:

$$U_3(f)=\Delta x\sum_{i=1}^{3}f(u_i)=1\times(2+2+3)=7$$

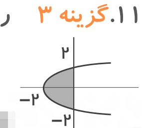
۱۰.گزینه ۱

ریشه های تابع در بازه ی $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ قرار ندارد.

$$y=0\Rightarrow\cos x=-1\Rightarrow x=\pi\ ,\ \sin 2x=-1\Rightarrow x=\frac{-\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\sin 2x)\cos x\ dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\underbrace{\cos x dx}_{\text{زوج}}+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\underbrace{\sin 2x\cos x dx}_{\text{فرد}}=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx+0\to S=2(\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

۱۱.گزینه ۳ راه اول: با توجه به شکل، این یک سهمی افقی است و می توانیم مساحت را در بازه‌ی $[-2,0]$ بیابیم و دو برابر کنیم.



$$y^2=2x+4$$

$$S=2\int_{-2}^{0}\sqrt{2x+4}dx=\frac{2\times\frac{2}{3}}{2}(2x+4)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-2}^{0}=\frac{2}{3}(8-0)=\frac{16}{3}$$

راه دوم: چون مساحت با محور yها را خواسته‌اند می‌توانیم معکوس تابع را بیابیم و از معکوس انتگرال بگیریم:

$$y^2 = 2x+4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - 2 \xrightarrow{\text{زوج است}} S = \int_{-2}^{2} \left|\frac{1}{2}y^2 - 2\right| dy$$

$$\Rightarrow S = 2\int_0^2 \left|\frac{1}{2}y^2 - 2\right| dy = 2\left|\frac{1}{6}y^3 - 2y\right| = \frac{16}{3}$$

۱۲.گزینه ۴

با توجه به وجود تابع جزء صحیح، کران انتگرال را یک واحد، یک واحد تقسیم می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{0} 2\cos(\frac{\pi}{2}x)dx + \int_0^1 \cos(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\times 2\sin(\frac{\pi}{2}x)\Big]_{-1}^{0} + \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x)\Big]_0^1 = 0 - (-\frac{4}{\pi}) + \frac{2}{\pi} = \frac{6}{\pi} \Rightarrow 6 \times \frac{1}{\pi}$$

۱۳.گزینه ۴

ابتدا محل برخورد دو تابع را می‌یابیم و سپس از معادله‌ی تلاقی انتگرال می گیریم.

$$\sin\frac{\pi}{2}x = x^2 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$S = \left|\int_0^1 \left(x^2 - \sin\frac{\pi}{2}x\right)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big]_0^1\right| \Rightarrow S = |\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}}_{\text{منفی}}| = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

۱۴.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c}$

$$\int\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 + 4}\,dx = \int\left(\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2}\right)dx = \int\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}\,dx = \int\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + c = \frac{x^4 - 3}{3x} + c$$

۱۵.گزینه ۱

$$C_4(f) = \sum_{i=1}^{4} f(c_i)\Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{\frac{15}{8} - \frac{7}{8}}{4} = \frac{1}{4} \quad , \quad C_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

بازه‌ها : $\left[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right] , \left[\frac{9}{8}, \frac{11}{8}\right] , \left[\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right] , \left[\frac{13}{8}, \frac{15}{8}\right] \Rightarrow C_1 = 1 , C_2 = \frac{5}{4} , C_3 = \frac{6}{4} , C_4 = \frac{7}{4}$

$$C_4(f) = \frac{1}{4}(f(1) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{6}{4}) + f(\frac{7}{4})) = \frac{1}{4}(\log\frac{5}{4} + \log\frac{6}{5} + \log\frac{7}{6} + \log\frac{8}{7})$$

$$= \frac{1}{4}\log(\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7}) = \frac{1}{4}\log 2$$

۱۶.گزینه ۱ تابع f صعودی است، بنابراین برای محاسبه مجموع پایین از نقاط ابتدایی هر زیر فاصله استفاده می کنیم:

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

$$\Delta x = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow L_3(f) = \frac{1}{3}(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{27} + \frac{8}{27}) = \frac{1}{9}$$

۱۷.گزینه ۲

$$\begin{cases} g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}} \\ f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(2)=\dfrac{2}{3} \\ f'(2)=\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} f(2)=0 \\ g(2)=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gf)'=(g\cdot f)'=g'f+f'g=(\frac{2}{3}\times 0)+(\frac{1}{3}\times 3)=1$$

توجه کنیم که $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$

۱۸.گزینه ۴

نقطه‌ی c محل برخورد تابع با مقدار متوسط خودش در $[0,4]$ است، طبق قضیه مقدار میانگین:

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}dx=\sqrt{c}\Rightarrow \int_0^4 \sqrt{x}dx=\sqrt{c}(4-0)\Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \Big]_0^4=4\sqrt{c}$$

$$\frac{16}{3}=4\sqrt{c}\Rightarrow \sqrt{c}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{16}{9}$$

۱۹.گزینه ۳

$$\int_{-2}^{1} x\left([x]-1\right)dx=\int_{-2}^{-1} x(-2-1)dx+\int_{-1}^{0} x(-1-1)dx+\int_0^1 x(-1)dx$$

$$-\frac{3x^2}{2}\Big]_{-2}^{-1}+(-x^2)\Big]_{-1}^{0}-\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\left(-\frac{3}{2}\right)-(-6)+(0)-(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)-0=5$$

۲۰.گزینه ۴

در محاسبه انتگرال اگر نسبت‌های مثلثاتی به صورت ضرب و با کمان‌های مختلف ظاهر شوند ابتدا باید به جمع تبدیل شود.

$$\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin x\cos 3x dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 4x-\sin 2x)dx=-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

۲۱.گزینه ۱

$$G'(x)=\frac{\cos\pi x}{1+x^2}\Rightarrow G'(2)=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

$$y'=G(\frac{1}{x})-\frac{1}{x}G'(\frac{1}{x})\Rightarrow y'(\frac{1}{2})=G(2)-2G'(3)=0-2(+\frac{1}{5})=-\frac{2}{5}$$

توجه کنیم که $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad ,\quad \int_a^a f(x)dx=0$

۲۲.گزینه ۱

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos^2 x^2\sin x^2 dx$$

توجه داشته باشید که هرگاه ضرب دو نسبت مثلثاتی موجود باشد آن نسبتی که توان غیر یک دارد را عامل اصلی می‌گیریم یعنی در این عبارت $\cos x^2$ را عامل اصلی می‌گیریم که مشتق آن $-2x\cdot\sin x^2$ می‌باشد و در عبارت انتگرال‌گیری باید ظاهر شود پس عبارت را در -2 و $-\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\underbrace{-2x\cdot\sin x^2}_{\text{مشتق}}\cdot\underbrace{\cos^2 x^2}_{\text{اصلی}}dx=-\frac{1}{2}\,\frac{\cos^{2+1}x^2}{2+1}=-\frac{1}{6}\cos^3 x^2\Big]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{6}(0-1)=\frac{1}{6}$$

۲۳.گزینه ۴ چون $n=10$ و بازه ی $[0,1]$ مورد نظر است، پس طول هر بازه $\Delta x=\frac{1}{10}$ خواهد بود. از طرفی می دانیم در هر بازه ی غیرتهی (هر چند کوچک) بی شمار عدد گنگ و بی شمار عدد گویا وجود داردپس در هر بازه $f(u_i)=2$ و $f(l_i)=-3$ است. داریم:

$$U_{10}(f)=\frac{1}{10}\overbrace{(2+2+\cdots+2)}^{\text{۱۰ بار}}=\frac{1}{10}\times 20=2$$ مجموع بالا

$$L_n(f)=\frac{1}{10}\overbrace{(-3-3-3\cdots-3)}^{\text{۱۰ بار}}=\frac{1}{10}\times 10(-3)=-3$$ مجموع پایین

$$U_{10}(f)-L_{10}(f)=2-(-3)=5$$

۲۴.گزینه ۳

می‌دانیم $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x)$

$$f(x)=\int_2^{2x}\frac{t+1}{t}dt\Rightarrow f'(x)=(2x)'\left(\frac{2x+1}{2x}\right)=2\left(\frac{2x+1}{2x}\right)=\frac{2x+1}{x}$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=1$ برابر $f'(1)=3$ و در نتیجه شیب خط قائم برابر $m=\frac{-1}{f'(1)}=-\frac{1}{3}$ است.

هم چنین $f(1)=\int_2^2\frac{t+1}{t}dt=0$ ، پس معادله‌ی خط قائم بر تابع f در نقطه‌ی $(1,0)$ به صورت زیر است:

$$y-0=-\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow 3y=-x+1\Rightarrow 3y+x=1$$

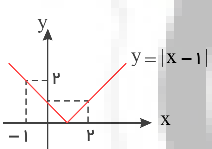
۲۵.گزینه ۲ روش اول: مقدار متوسط تابع $y=|1-x|$ در بازه ی $[-1,2]$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b ydx\Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}|1-x|dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{1}(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx\right)=\frac{1}{3}\left(\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big]_1^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

روش دوم: برای محاسبه ی $\int_{-1}^{2}|1-x|dx$ ، نمودار $y=|1-x|$ را رسم می کنیم و مساحت بین این نمودار و محور x ها را می یابیم.



$$\Rightarrow S=\frac{2\times 2}{2}+\frac{1\times 1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{2-(-1)}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

۲۶.گزینه ۴

$$f'(x)=\frac{3}{(x-1)^2}\Rightarrow \text{انتگرال گیری} \Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int \frac{3}{(x-1)^2}dx \Rightarrow f(x)=-\frac{3}{(x-1)}+C$$

با توجه به این که $f(x)$ از نقطه ی $(2,1)$ می گذرد، داریم:

$$f(2)=1\Rightarrow 1=-\frac{3}{(2-1)}+C\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{(x-1)}+4$$

مجانب های افقی تابع $y=f(x)$ از میل دادن $x\to\pm\infty$ به دست می آید:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{3}{x-1}+4)=0+4\Rightarrow y=4$$:معادله ی مجانب افقی

۲۷.گزینه ۲ مساحت دو ناحیه هاشور خورده برابرند، بنابراین c نقطه متناظر با قضیه مقدار میانگین برای تابع $y=\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[0,4]$ است:

$$f(c)=\bar{y}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)d(x)$$

$$f(c)=\frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=\frac{4}{3}\Rightarrow\sqrt{c}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{16}{9}$$

۲۸.گزینه ۳ از آن جا که $f'(x)=2x \xrightarrow{x\in[1,4]} f'(x)>0$ ، در نتیجه تابع $f(x)$ در بازه $[1,4]$ صعودی بوده و همچنین $\Delta x=\frac{4-1}{180}=\frac{1}{60}$ می باشد، در نتیجه می توان نوشت:

$$Un(f)-Ln(f)=\Delta x(f(b)-f(a))\Rightarrow U_{180}(f)-L_{180}(f)=\Delta x(f(4)-f(1))$$
$$=\frac{1}{60}(4^2-1^2)=\frac{16-1}{60}=\frac{1}{4}$$

۲۹.گزینه ۱ از آن جا که تابع f در بازه ی $[-1,1]$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، در نتیجه در بازه فوق تابعی فرد بوده و در نتیجه $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ خواهد بود. حال می توان نوشت:

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx=B+0=B$$

۳۰.گزینه ۱

$$G(x)=\int_2^x \frac{\cos\pi t}{1+t^2}dt\Rightarrow G(2)=\int_2^2\frac{\cos\pi t}{1+t^2}=0$$

$$G(\frac{1}{x})=\int_2^{\frac{1}{x}}\frac{\cos\pi t}{1+t^2}\to G'(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}(\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2})\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} G'(2)=-4(\frac{1}{5})=-\frac{4}{5}$$

$$y=xG(\frac{1}{x})\to y'=G(\frac{1}{x})+xG'(\frac{1}{x})\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y'(\frac{1}{2})=G(2)+\frac{1}{2}G'(2)=0+\frac{1}{2}(-\frac{4}{5})=-\frac{2}{5}$$

۳۱.گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{(\tan^{-1}u)'=\frac{u'}{1+u^2}}$

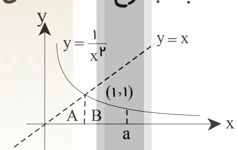
$$F(x)=\int\frac{x^3+x+2}{1+x^2}dx=\int\frac{x(x^2+1)+2}{x^2+1}dx=\int(x+\frac{2}{1+x^2})dx=\int xdx+2\int\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+2\tan^{-1}x+c\xrightarrow{F(0)=0}0=\frac{0^2}{2}+2\tan^{-1}0+c\Rightarrow c=0$$
$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2\tan^{-1}x\Rightarrow F(1)=\frac{1^2}{2}+2\tan^{-1}1=\frac{1}{2}+2\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(\pi+1)$$

۳۲.گزینه ۲

اگر عبارتی به صورت ضرب دو نسبت مثلثاتی با کمان‌های مختلف باشند باید ابتدا به جمع تبدیل شوند.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\quad,\quad\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\to\cos x\sin 3x=\frac{1}{2}[\sin(3x+x)+\sin(3x-x)]=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sin 3xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 4x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\cos 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{8}(-1-1)-\frac{1}{4}(0-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

۳۳.گزینه ۳ خط $y=x$ و منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ در نقطه‌ی $(1,1)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. همان طور که در شکل می‌بینیم، S_α برابر است با مجموع مساحت‌های نواحی A و B . مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی A برابر است با:



$$S_A=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

مساحت ناحیه‌ی B برابر است با سطح زیر نمودار $y=\frac{1}{x^2}$ و محصور بین خطوط $x=1$ و $x=\alpha$ و محور xها، یعنی

$$:S_B=\int_1^\alpha\frac{1}{x^2}dx$$

$$S_B=\int_1^\alpha\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big]_1^\alpha=-\frac{1}{\alpha}-(-1)=-\frac{1}{\alpha}+1$$

در نتیجه:

$$S_\alpha=S_A+S_B=\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}S_\alpha=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{3}{2}$$

۳۴.گزینه ۴ انتگرال را به بازه هایی افراز می کنیم تا مقدار $[\sqrt{x}]$ مشخص شود.

$$\int_1^{16}[\sqrt{x}]dx=\underset{1<\sqrt{x}<2}{\int_1^4[\sqrt{x}]dx}+\underset{2<\sqrt{x}<3}{\int_4^9[\sqrt{x}]dx}+\underset{3<\sqrt{x}<4}{\int_9^{16}[\sqrt{x}]dx}=\int_1^4(1)dx+\int_4^9(2)dx+\int_9^{16}(3)dx$$
$$=(4-1)\times1+(9-4)\times2+(16-9)\times3=34$$

توجه داشته باشید که بازه‌ی $[1,16]$ به سه بازه‌ی $[1,4]$ و $[4,9]$ و $[9,16]$ تبدیل شده است و اعداد ۴ و ۹ اعدادی هستند که عبارت داخل براکت را صحیح می کنند.

۳۵.گزینه ۲

$$\int_1^4(\sqrt{(1+\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}})dx=\int_1^4\sqrt{1+2\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}dx=\int_1^4|\sqrt{x}-1|dx\overset{1\le x\le4}{=\!=\!=}\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$$
$$=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x)\Big|_1^4=(\frac{16}{3}-4)-(\frac{2}{3}-1)=\frac{5}{3}$$

۳۶.گزینه ۳ می‌دانیم:

$$y=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \to y'=g'(x)\cdot f(g(x))-h'(x)\cdot f(h(x))$$

$$G'(x)=(x^2)'\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+2)}{t^2}dt+(\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+2)}{t^2}dt)'\cdot x^2$$

$$G'(x)=2x\cdot\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\ln(4+2)}{t^2}dt+(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{x}-0)\cdot x^2$$

$$G'(4)=8\times\int_2^2\frac{\ln(t+2)}{t^2}dt+(\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(4)}{4}-0)\times 16$$

$$G'(4)=0+(\frac{1}{16}\ln 4)16=\ln 4=\ln 2^2=2\ln(2)$$

توجه کنیم که $\int_a^a f(x)dx=0$

۳۷.گزینه ۱

$$0\le x\le 2\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=0$$

$$2<x<4\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=1$$

$$\int_0^4\left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx=\int_0^2\left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx+\int_2^4\left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

$$=0+\int_2^4 1\times\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx=\int_2^4(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x})dx=\int_2^4(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x})dx$$

$$=2\sqrt{x}-\ln x\Big]_2^4=(4-\ln(4))-(2\sqrt{2}-\ln(2))=4-2\ln(2)-2\sqrt{2}+\ln(2)=4-2\sqrt{2}-\ln 2$$

۳۸.گزینه ۳ باتوجه به شکل $f(c)$ همان مقدار میانگین تابع $f(x)$ در بازه $[1,4]$ است بنابراین داریم:

$$f(c)=\bar{y}=\frac{1}{4-1}\cdot\int_1^4\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{3}\int_1^4(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}-2\sqrt{x})\Big]_1^4=\frac{1}{3}(\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+2)=\frac{8}{9}$$

۳۹.گزینه ۱

$$\int_0^2\frac{x^2-[x]}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2-0}{x+1}dx+\int_1^2\frac{x^2-1}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx+\int_1^2\frac{x^2-1}{x+1}dx$$

$$=\int_0^1(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1})dx+\int_1^2\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{x+1}dx$$

$$=\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+\int_1^2(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x\Big]_0^1+\ln(x+1)\Big]_0^1+(\frac{1}{2}x^2-x)\Big]_1^2=(-\frac{1}{2})+(\ln 2)+(\frac{1}{2})=\ln 2$$

۴۰.گزینه ۲ با کمی دقت در جملات سری داده شده، داریم:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots=\frac{1}{2}(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{6}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$$

توجه: $\frac{1}{A\cdot B}=\frac{1}{|A-B|}\cdot(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})$

۴۱.گزینه ۲ تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ یک تابع زوج است چون $f(-x)=f(x)$

می‌دانیم مقدار متوسط تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر است با $\bar{y}=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$، لذا:

$$f(c)=\frac{\int_{-۲}^{۲}|x^{۲}-۱|\,dx}{۲-(-۲)}\xlongequal{\text{زوج است } f}\frac{۲\int_{۰}^{۲}|x^{۲}-۱|\,dx}{۴}=\frac{\int_{۰}^{۲}|x^{۲}-۱|\,dx}{۲}\Rightarrow f(c)=\frac{(\int_{۰}^{۱}(۱-x^{۲})dx+\int_{۱}^{۲}(x^{۲}-۱)dx)}{۲}$$

$$=\frac{(x-\frac{x^{۳}}{۳})\Big]_{۰}^{۱}+(\frac{x^{۳}}{۳}-x)\Big]_{۱}^{۲}}{۲}=\frac{(۱-\frac{۱}{۳})-(۰-۰)+(\frac{۸}{۳}-۲)-(\frac{۱}{۳}-۱)}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow f(c)=۱\Rightarrow\left|c^{۲}-۱\right|=۱\Rightarrow c^{۲}-۱=\pm۱\Rightarrow c=\left\{-\sqrt{۲},۰,\sqrt{۲}\right\}$$

۴۲.گزینه ۱ میانگین تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x}=x-\dfrac{۱}{x}$ در بازه $[۱,۳]$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f=\frac{۱}{۳-۱}\int_{۱}^{۳}(x-\frac{۱}{x})dx=\frac{۱}{۲}(\frac{x^{۲}}{۲}-\ln x)\Big]_{۱}^{۳}=\frac{۱}{۲}\Big[(\frac{۹}{۲}-\ln ۳)-(\frac{۱}{۲}-\ln ۱)\Big]$$

$$\Rightarrow\bar{f}=\frac{۱}{۲}[۴-\ln ۳]=۲-\frac{۱}{۲}\ln ۳=۲-\ln\sqrt{۳}$$

۴۳.گزینه ۴

$$\int_{۰}^{۹}|\sqrt{x}-۲|dx=\int_{۰}^{۴}(۲-\sqrt{x})dx+\int_{۴}^{۹}(\sqrt{x}-۲)dx=(۲x-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}})\Big]_{۰}^{۴}+(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-۲x)\Big]_{۴}^{۹}$$

$$=\Big[(۸-\frac{۲}{۳}(۸))-(۰-۰)\Big]+\Big[(\frac{۲}{۳}(۲۷)-۱۸)-(\frac{۲}{۳}(۸)-۸)\Big]=\frac{۸}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

۴۴.گزینه ۲

$$\sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(۱-\frac{۱}{k^{۲}})=\sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(\frac{k^{۲}-۱}{k^{۲}})=\sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(\frac{(k-۱)(k+۱)}{k^{۲}})$$

$$=\sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(\frac{\frac{k-۱}{k}}{\frac{k}{k+۱}})=\sum_{k=۲}^{۱۰۰}(\log\frac{k-۱}{k}-\log\frac{k}{k+۱})=\log\frac{۲-۱}{۲}-\log\frac{۱۰۰}{۱۰۱}=\log\frac{۱}{۲}-\log\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

$$\log\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱۰۰}{۱۰۱}}=\log\frac{۱۰۱}{۲۰۰}=\log(۰٫۵۰۵)=\log A\Rightarrow A=۰٫۵۰۵$$

۴۵.گزینه ۳

$$\text{میانگین}=\frac{\int_{۰}^{۵}x\sqrt{x}dx}{۵}=\frac{\int_{۰}^{۵}x^{\frac{۳}{۲}}dx}{۵}=\frac{(\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}})\Big|_{۰}^{۵}}{۵}=\frac{۲(۵^{\frac{۵}{۲}}-۰)}{۲۵}=\frac{۲\sqrt{۵^{۵}}}{۲۵}=\frac{۲\times۲۵\sqrt{۵}}{۲۵}=۲\sqrt{۵}$$

$$f(x)=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f(\sqrt[۳]{c})=(c^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}=c^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{c}\Rightarrow\sqrt{c}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow c=۲۰$$

۴۶.گزینه ۲

$$\text{تابع اولیه: }F(x)=\int(۳x^{۲}-۲x-۵)dx=x^{۳}-x^{۲}-۵x+C$$

$$\xrightarrow{(۰,۳)\in F}C=۳\Rightarrow F(x)=x^{۳}-x^{۲}-۵x+۳\qquad(۱)$$

$$F'(x)=f(x)=۳x^{۲}-۲x-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$$F''(x)=f'(x)=۶x-۲\Rightarrow\begin{cases}F''(-۱)=-۸<۰\Rightarrow Max\text{ نسبی}\\F''(\frac{۵}{۳})=۸>۰\Rightarrow Min\text{ نسبی}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\text{عرض ماکزیمم نسبی}=F(-۱)=۶$$

۴۷.گزینه ۲

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cot^2 x+1)-1 dx$$

$$= -\cot x - x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = (0-\frac{\pi}{2})-(-1-\frac{\pi}{4}) = 1-\frac{\pi}{4}$$

۴۸.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}}$, $\boxed{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3}-\tan 0 = \sqrt{3}-0=\sqrt{3}$$

۴۹.گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\log_a^{A\cdot B} = \log_a^A + \log_a^B$$

$$\log_a^{\frac{A}{B}} = -\log_a^{\frac{B}{A}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_1 - a_{n+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \log\frac{k\cdot(k+3)}{(k+1)\cdot(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\log(\frac{\frac{k}{k+2}}{\frac{k+1}{k+3}})$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\log\frac{k}{k+2} - \log\frac{k+1}{k+3})$$

جمله‌ی عمومی تفاضل دو جمله‌ی متوالی است پس بنا به قانون ادغام داریم:

$$S_n = \log\frac{1}{1+2} - \log\frac{n+1}{n+3} \to S_{99} = \log\frac{1}{3} - \log\frac{100}{102} = \log\frac{\frac{1}{3}}{\frac{100}{102}} = \log\frac{102}{3\times 100} = \log 0/3$$